

DEMI-PROMO B
PREMIER TEST
DE CALCUL SCIENTIFIQUE
30 MARS 2005
DUREE 2h

EXERCICE 1 (barème : 4+2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 8 points : $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;3)$, $D(3;0)$, $K(1;1)$, $L(1;2)$, $M(2;2)$, $N(2;1)$. On note Γ_1 la frontière du carré ABCD, Γ_2 la frontière du carré KLMN et Ω l'ouvert contenu entre ces deux frontières. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} u(x,y) - \Delta u(x,y) = 4xy & \text{dans } \Omega \\ u(x,y) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u(x,y) = 1 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Discrétiser ce problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan. On numérotera les points utiles du maillage $(i/2, j/2)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par colonnes, de bas en haut et de gauche à droite. En déduire la matrice A du système linéaire obtenu ainsi que le second membre b . On écrira la matrice A avec des termes diagonaux positifs.

EXERCICE 2 (barème : 1+3+3)

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que l'algorithme de factorisation LU sans pivotation de la matrice A ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.
- 2) Effectuer la décomposition LU de la matrice PA où P est la matrice de permutation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente. On pourra soit faire le calcul exact, soit un calcul numérique avec 6 décimales.

EXERCICE 3 (barème : 1+1+3.5+1.5)

On considère la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^2$.

- 1) Peut-on résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec la méthode de Jacobi?
- 2) Calculer la matrice d'itération L_ω de la méthode S.O.R, appliquée au système linéaire $Ax = b$.
- 3) Calculer les valeurs propres de L_ω en fonction de ω , en spécifiant dans quels domaines de ω , elles sont réelles ou complexes.
- 4) La méthode SOR converge-t-elle? Si oui, quel est le meilleur choix pour la valeur du paramètre ω ?

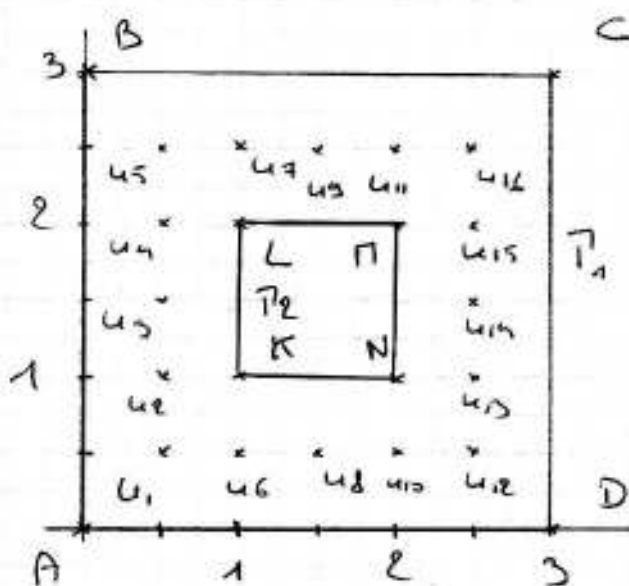
Calcul Scientifique

Test m=0-1

130
20

Exercice 1:

~~5,5 pt~~
0



Pour les points intérieurs, on peut utiliser la formule générale du poly page 28.

$$-\Delta_h u(P) = \frac{1}{h^2} (4u(P) - \sum_{i=1}^4 u(P_i))$$

Pour les points 1 à 16 intérieurs on a donc

$$u(P) + \frac{1}{h^2} (4u(P) - \sum_{i=1}^4 u(P_i)) = 4xy$$

$$u(P) + 4(4u(P) - \sum_{i=1}^4 u(P_i)) = 4xy$$

$$17u(P) - 4 \sum_{i=1}^4 u(P_i) = 4xy$$

$$\begin{aligned}
 17u_1 - 4u_2 - 4u_6 &= 1 \quad / \\
 17u_2 - 4u_1 - 4u_3 - 4 &= 2 \quad / \\
 17u_3 - 4u_2 - 4u_4 - 4 &= 3 \quad / \\
 17u_4 - 4u_3 - 4u_5 - 4 &= 4 \quad / \\
 17u_5 - 4u_4 - 4u_7 &= 5 \quad / \\
 17u_6 - 4u_1 - 4u_8 - 4 &= 2 \quad / \\
 17u_7 - 4u_5 - 4u_9 - 4 &= 10 \quad / \\
 17u_8 - 4u_6 - 4u_{10} - 4 &= 3 \quad / \\
 17u_9 - 4u_7 - 4u_{11} - 4 &= 15 \quad / \\
 17u_{10} - 4u_8 - 4u_{12} - 4 &= 4 \quad / \\
 17u_{11} - 4u_9 - 4u_{16} - 4 &= 20 \quad / \\
 17u_{12} - 4u_{10} - 4u_{13} &= 5 \quad / \\
 17u_{13} - 4u_{12} - 4u_{14} - 4 &= 10 \quad / \\
 17u_{14} - 4u_{13} - 4u_{15} - 4 &= 15 \quad / \\
 17u_{15} - 4u_{14} - 4u_{16} - 4 &= 20 \quad / \\
 17u_{16} - 4u_{15} - 4u_{11} &= 25 \quad /
 \end{aligned}$$

donc

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 10 \\ 3 \\ 15 \\ 4 \\ 20 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

et $A =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	-4	0	0	0	-4										
-4	17	-4													
	-4	17	-4												
		-4	17	-4											
			-4	17	0	-4									
-4				17		-4									
			-4		17		-4								
				-4		17		-4							
					-4		17		-4						
						-4		17		-4					
							-4		17		-4				
								-4		17		-4			
									-4		17		-4		
										-4		17		-4	
											-4		17		-4
												-4		17	
													-4		17
														-4	
															-4

Mettre au moins des zéros autour des non nuls!

Les autres termes étant nuls (r

Exercice 2: $\frac{6,0pt}{7}$

1) A est décomposable en L.U si et seulement si tous les D_k sont nuls. D_k étant le déterminant des k premières lignes et k premières colonnes de A.
ici $1 \leq k \leq 4$

On $D_2 = 2 - 2 = 0$

L'algorithme de factorisation ne peut donc être exécuté



$$2) \quad PA = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

$$PA = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{array} \right) = (PA)_1$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$(PA)_2 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$(PA)_3 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$(PA)_2 = G_1 (PA)_1 \quad \text{avec} \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$g_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$(PA)_3 = G_2 (PA)_2 \quad \text{avec} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$g_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

$$U = (PA)_3 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \checkmark$$

$$L = G^{-1} = G_1^{-1} G_2^{-1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

PERHÉRIN
Céline
1A65

On effectue la vérification

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = A$$

3

3) $Ax = b$

$$L.Ux = b$$

$$Ux = L^{-1}b$$

On peut résoudre ce système directement puisque L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Déjà!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = -1/3 \\ x_2 = -13/6 \\ x_1 = 23/6 \end{cases}$$

oui

2, 0

Exercice 3: $\frac{25}{7}$
1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

~~A n'est pas à diagonale strictement dominante~~

~~On a pas $3 \geq |-4|$ donc la méthode de Jacobi ne converge pas. Sa limite n'est donc pas solution du système. On ne peut pas utiliser Jacobi.~~

On peut \rightarrow convergente $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\rho(J) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$2) A = D - E - F \quad A = \Pi \cdot N$$

$$\text{avec } \Pi = \frac{1}{3} D - E \quad \text{et } N = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) D + F$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & 0 \\ -2 & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) 3 & 4 \\ 0 & \left(\frac{1}{3} - 1 \right) 3 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}$$

a, j

$$L\omega = \Pi^{-1} N = \begin{pmatrix} (\omega - 1) & \frac{4\omega}{3} \\ -\frac{2\omega(\omega - 1)}{3} & \frac{8\omega^2 + \omega - 1}{3} \end{pmatrix}$$

3) Calcul des valeurs propres

$$P = \begin{vmatrix} \omega - 1 - x & \frac{4\omega}{3} \\ \frac{2\omega(\omega - 1)}{3} & \frac{8\omega^2 + \omega - 1}{3} - x \end{vmatrix} = (\omega - 1 - x) \left(\frac{8\omega^2 + \omega - 1}{3} - x \right) - \frac{4\omega \cdot 2\omega(\omega - 1)}{9}$$

$$P(x) = \frac{(9x + 2\omega \sqrt{2(2\omega^2 + 3\omega - 3)} - 4\omega^2 - 3\omega + 9)}{9}$$

$$\times (9x - 2\omega \sqrt{2(2\omega^2 + 3\omega - 3)} - 4\omega^2 - 3\omega + 9)$$

Erreur de signe!

Les valeurs propres sont donc les valeurs annulant $P(x)$

$$\left(\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right) \frac{2\omega \sqrt{2(2\omega^2 + 3\omega - 3)} - 4\omega^2 - 3\omega + 9}{9}$$

Pour ω réel les valeurs propres sont donc réelles.