TEST DE CALCUL SCIENTIFIQUE

Mardi 30 Avril 2013 : durée 2 heures

Les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés. Tout résultat non démontré ne sera pas pris en compte lors de la correction.

$d>0$

PROBLEME I (Schéma numérique)

Soient d un entier strictement positif, x_0 et X deux nombres réels tels que $x_0 < X$ et $f : [x_0, X] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue, L-lipschitzienne par rapport à son second argument. Pour tout y_0 dans $\mathbb{R}^d$ on veut déterminer une approximation numérique de l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On considère alors une subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_N = X$ de l'intervalle $[x_0, X]$, de pas variable $h_n = x_{n+1} - x_n$ et on note z_n l'approximation numérique de $y(x_n)$. θ étant un élément de $[0,1]$, on définit la suite finie des approximations $(z_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ en utilisant pour tout entier n dans $[\![0, N-1]\!]$ le schéma :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{R}^d \\ z_{n+1} = z_n + h_n f(x_n + \theta h_n, z_n + \theta h_n f(x_n + h_n, z_{n+1})) \end{cases}$$

(1pt) 1. Déterminer pour quelle valeur de θ ce schéma est implicite et pour quelle valeur de θ il est explicite. Quel schéma classique obtient-on dans le cas explicite ? Rappeler sans démonstration quel est son ordre.

Dans la suite de ce problème on suppose que θ est choisi de sorte que le schéma soit implicite et par conséquent, pour ce choix, le calcul de z_{n+1} à partir de x_n, z_n et h_n nécessite la résolution d'une équation de point fixe de la forme :

$$s = g_\theta(s, x, z, h) = z + hf(x + \theta h, z + \theta h f(x + h, s)) \qquad (1)$$

où s est l'inconnue et x, z et h sont trois paramètres.

(1,5pt) 2. Déterminer le plus grand $H(L,\theta)$ pour lequel la condition $0 < h < H(L,\theta)$ implique que la fonction $s \mapsto g_\theta(s,x,z,h)$ possède un unique point fixe qu'on notera $G_\theta(x,z,h)$.

(1,5pt) 3. En déduire que G_θ est une fonction continue et calculer $G_\theta(x,z,0)$.

(1pt) 4. En déduire l'expression du schéma sous la forme canonique

$$z_{n+1} = z_n + h_n \Phi_\theta(x_n, z_n, h_n)$$

où $(x,z,h) \mapsto \Phi_\theta(x,z,h)$ est une fonction continue qui sera explicitée en fonction de x, z, h, θ, f et G_θ.

(2pt) 5. Montrer que si $0 < h < H(L, \theta)$, la fonction G_θ est lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

(1pt) 6. Démontrer que ce schéma est convergent.

(2pt) 7. On suppose que f est continument dérivable et on admettra sans démonstration qu'alors G_θ admet une dérivée partielle continue par rapport à sa troisième variable. Déterminer pour quelles valeurs de θ ce schéma est exactement d'ordre 1 et l'unique valeur de θ pour laquelle il est au moins d'ordre 2.

(1pt) 8. Pourquoi a-t-on considéré la fonction $s \mapsto g_\theta(s, x, z, h)$ à trois paramètres plutôt que la fonction $s \mapsto g(s, x, z, h, \theta)$ à quatre paramètres ?

PROBLEME II (Méthode itérative) /5

Soient α un nombre réel, U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2(U)$. On suppose que f admet un zéro simple noté x^* appartenant à U et que de plus $f''(x^*)$ n'est pas nul ce qui signifie que le graphe de f ne présente pas un point d'inflexion d'abscisse x^*. Pour calculer par approximations successives x^*, on utilise la méthode itérative à un pas associée à la fonction d'itération $F_{\alpha,f}$ définie par la formule :

$$F_{\alpha,f}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x - \alpha \frac{f(x)}{f'(x)})}$$

(0,5pt) 1. A quelle méthode itérative correspond la fonction $F_{0,f}$? Rappeler, sans aucun calcul et avec les hypothèses de l'énoncé, quel est l'ordre de convergence de cette méthode.

(1,5pt) 2. Démontrer, en évitant des calculs inutiles, que $F_{\alpha,f}$ est dérivable en x^* et que x^* est super-attractif.

(2pt) 3. On suppose que $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Déterminer l'ordre de convergence de cette méthode itérative, en détaillant toutes les étapes du calcul.

(3pt) 4. On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^3(U)$. A quelle condition cette méthode itérative est-elle d'ordre 3 ?

(0,5pt) 5. On suppose que a est un réel strictement positif et on applique cette méthode itérative avec $\alpha = \frac{1}{2}$ à la fonction définie par $f(x) = x^2 - a$. Quel est l'ordre de convergence dans ce cas ?

(1,5pt) 6. Déterminer rigoureusement le bassin d'attraction de $x^* = \sqrt{a}$.

Corrigé du test de Calcul Scientifique

Pierre WERNY

30 avril 2013

PROBLEME I

1. Explicite ou implicite

Le schéma considéré est explicite pour $\theta = 0$ et implicite sinon.
Dans le cas explicite, $z_{n+1} = z_n + h_n f(x_n, z_n)$, on reconnait le schéma d'Euler explicite qui est d'ordre 1.

2. et 3. Calcul de $H(L,\theta)$ et étude de $G_\theta(x,z,h)$

Si l'on trouve $H(L,\theta)$ tel que pour $h \in [0, H(L,\theta)[$, la fonction $s \mapsto g_\theta(s,x,z,h)$ soit une contraction stricte sur $\mathbb{R}^d$ **de rapport indépendant des paramètres**, on pourra appliquer le théorème de Picard avec paramètres ($\mathbb{R}^d$ étant complet) pour conclure à l'existence d'un unique point fixe $G_\theta(x,z,h)$ et à la continuité de la fonction $(x,z,h) \mapsto G_\theta(x,z,h)$.
La fonction f étant continue, il en résulte que la fonction $s \mapsto g_\theta(s,x,z,h)$ est aussi une fonction continue.
En exprimant deux fois la condition de Lipschitz vérifiée par f, on obtient
$\forall x \in [x_0, X], \forall z \in \mathbb{R}^d,\ \forall h \in [0,H],\ \forall (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\|g_\theta(s_1,x,z,h) - g_\theta(s_2,x,z,h)\| &\leq h\|f(x+\theta h, z+\theta h f(x+h,s_1)) - f(x+\theta h, z+\theta h f(x+h,s_2))\| \\
&\leq hL\|z+\theta h f(x+h,s_1) - z - \theta h f(x+h,s_2)\| \\
&\leq \theta h^2 L\|f(x,s_1) - f(x,s_2)\| \leq \theta h^2 L^2 \|s_1 - s_2\|
\end{aligned}$$

Si on choisit h tel que $\theta h^2 L^2 < 1$ cad $h < H(L,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\theta} L}$ alors par application du théorème de Picard avec paramètres, la fonction $s \mapsto g_\theta(s,x,z,h)$ admet un unique point fixe noté $G_\theta(x,z,h)$ et la fonction $(x,z,h) \mapsto G_\theta(x,z,h)$ est continue. Elle vérifie

$$G_\theta(x,z,h) = z + hf\left(x+\theta h, z+\theta h f\Big(x+h, G_\theta(x,z,h)\Big)\right) \qquad \text{avec en } \ h=0, G_\theta(x,z,0) = z$$

4. Calcul de $\Phi_\theta(x,z,h)$

Par construction, $G_\theta(x,z,h) = g_\theta(x,z,G_\theta(x,z,h),h) = z + hf\Big(x+\theta h, z+\theta h f(x+h, G_\theta(x,z,h)\Big)$
z_{n+1} étant solution pour $h_n < H(L,\theta)$ de l'équation $z_{n+1} = g_\theta(z_{n+1}, x_n, z_n, h_n)$,
z_{n+1} s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n + h_n f(x_n + \theta h_n, z_n + h_n \theta f(x_n, G_\theta(x_n, z_n, h_n)) = z_n + h_n \Phi_\theta(x_n, z_n, h_n) \\
\text{avec} \quad \Phi_\theta(x,z,h) &= f(x+\theta h, z+\theta h f(x+h, G_\theta(x,z,h))
\end{aligned}$$

5. Etude de la fonction $(x,z,h) \mapsto G_\theta(x,z,h)$

<u>Continuité :</u> La continuité de la fonction $(x,z,h) \mapsto G_\theta(x,z,h)$ a été traitée à la question 2. Ce résultat peut aussi se démontrer directement et facilement sans utiliser le théorème du point fixe de Picard avec paramètres.

Condition de Lipschitz : En exprimant deux fois la condition de Lipschitz vérifiée par f, on obtient $\forall x \in [x_0, X]$, $\forall h \in [0, H]$, avec $H < H(L, \theta)$, $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\|G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h)\| &\leq \Big\| z_1 + hf\Big(x + \theta h, z_1 + \theta h f(x + h, G_\theta(x, z_1, h))\Big) \\
&\quad - z_2 - hf\Big(x + \theta h, z_2 + \theta h f(x + h, G_\theta(x, z_2, h))\Big) \Big\| \\
&\leq \|z_1 - z_2\| + hL \Big\| z_1 + \theta h f(x + h, G_\theta(x, z_1, h)) - z_2 - \theta h f(x + h, G_\theta(x, z_2, h)) \Big\| \\
&\leq (1 + hL)\|z_1 - z_2\| + \theta h^2 L^2 \Big\| G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h) \Big\| \\
&\leq (1 + HL)\|z_1 - z_2\| + \theta H^2 L^2 \Big\| G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h) \Big\|
\end{aligned}$$

soit

$$\|G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h)\|(1 - \theta H^2 L^2) \leq (1 + HL)\|z_1 - z_2\|$$

et comme $1 - \theta H^2 L^2 > 0$ puisque $H < H(L, \theta)$

$$\|G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h)\| \leq \frac{1 + HL}{1 - \theta H^2 L^2}\|z_1 - z_2\| \leq L_G\|z_1 - z_2\|$$

$G_\theta(x, z, h)$ est donc L_G-lipchitzienne par rapport à son deuxième argument avec $L_G = \dfrac{1 + HL}{1 - \theta H^2 L^2}$

6. Convergence du schéma

On rappelle qu'un schéma est convergent s'il est stable et consistant.
Consistance On rappelle (théorème du cours) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma soit consistant est

$$\forall x \in [x_0, X], \forall z \in \mathbb{R}^d, \Phi_\theta(x, z, 0) = f(x, z)$$

condition qui est vérifiée.
Stabilité $\forall x \in [x_0, X]$, $\forall h \in [0, H]$, avec $H < H(L, \theta)$, $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\theta(x, z_1, h) - \Phi_\theta(x, z_2, h)\| &\leq \Big\| f\Big(x + \theta h, z_1 + h\theta f(x + h, G_\theta(x, z_1, h))\Big) - f\Big(x + \theta h, z_2 + h\theta f(x + h, G_\theta(x, z_2, h))\Big) \Big\| \\
&\leq L \Big\| z_1 + h\theta f(x + h, G_\theta(x, z_1, h)) - z_2 - h\theta f(x + h, G_\theta(x, z_2, h)) \Big\| \\
&\leq L\|z_1 - z_2\| + h\theta L \Big\| f(x + h, G_\theta(x, z_1, h)) - f(x + h, G_\theta(x, z_2, h)) \Big\| \\
&\leq L\|z_1 - z_2\| + h\theta L^2 \Big\| G_\theta(x, z_1, h) - G_\theta(x, z_2, h) \Big\| \\
&\leq L\|z_1 - z_2\| + H\theta L^2 L_G \|z_1 - z_2\| \leq L_\Phi \|z_1 - z_2\|
\end{aligned}$$

Pour $h \in [0, H]$ avec $H < H(L, \theta)$, la fonction $\Phi_\theta(x, z, h)$ est L_Φ-lipchitzienne par rapport à son deuxième argument avec $L_\Phi = L + HL^2\theta L_G$ *(inutile de développer, pas de forme simple)*
On en conclut que le schéma est stable.
Etant **consistant et stable**, ce schéma est **convergent**.

7. Ordre du schéma

Le schéma est au moins d'ordre 1 (cf la condition de consistance). On admettra que $\dfrac{\partial G_\theta}{\partial h}$ existe et est continue (résultat issu du théorème des fonctions implicites). Alors $\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial h}$ existe et est continue.

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta(x, y, h) &= f(x + \theta h, y + \theta h f(x + h, G_\theta(x, y, h))) \\
&= f(x + \theta h, y + \Phi_1(x, y, h)) \quad \text{avec} \quad \Phi_1(x, y, h) = h\theta f(x + h, G_\theta(x, y, h))
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial h}(x, y, h) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \theta h, y + \Phi_1(x, y, h)\Big)\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \theta h, y + \Phi_1(x, y, h)\Big)\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x, y, h)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x, y, h) = \theta f(x + h, G_\theta(x, y, h)) + h\theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial h}(x, y, h) \quad \text{avec} \quad \Phi_2(x, y, h) = f(x + h, G_\theta(x, y, h))$$

soit en $h = 0$,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,0) = \theta f(x, G_\theta(x,y,0)) + 0 \times \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial h}(x,y,0) = \theta f(x,y) \quad \text{car} \quad G_\theta(x,y,0) = y$$

$$\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial h}(x,y,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,0) = \theta\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ f(x,y)\right) = \theta f^{[1]}(x,y)$$

Le schéma étudié est donc d'ordre 1 si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et au moins d'ordre 2 si $\theta = \frac{1}{2}$.

8. θ paramètre ou θ fixé

Si on ne fixe pas a priori θ mais qu'on le considère comme un paramètre de la fonction g_θ, on ne peut plus choisir h indépendamment des autres paramètres (en l'occurrence ici θ) de telle sorte que g_θ soit contractante et on ne peut donc plus appliquer le théorème de Picard, d'où la nécessité de fixer θ.

PROBLEME II

Préambule

Comme f est deux fois dérivable en x^*, f' est continue en x^* et comme $f'(x^*) \neq 0$, il existe un voisinage de x^* sur lequel l'application $x \mapsto g(x) = x - \alpha \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est **définie**, continue et dérivable et ne s'annule pas (puisque $g(x^*) = f'(x^*) \neq 0$).
On en déduit qu'il existe un voisinage de x^* sur lequel l'application $F_{\alpha,f}$ est définie et dérivable.

1. Cas $\alpha = 0$

$$F_{0,f}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On reconnait la fonction d'itération associée à la méthode de Newton, qui est d'ordre 2 en x^* racine simple de f vérifiant la condition $f''(x^*) \neq 0$

2. Attractivité de x^*

Dérivabilité de $F_{\alpha,f}$: voir préambule
x^* solution de l'équation $f(x) = 0$ est un point fixe de l'application $F_{\alpha,f}$ et

$$F'_{\alpha,f}(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{f'\left(x^* - \alpha\dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)}\right)} - f(x^*) \times \left[\frac{1}{f'\left(x - \alpha\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}\right]'_{x=x^*} = 1 - \frac{f'(x^*)}{f'(x^*)} - 0 \times [\ldots] = \mathbf{0}$$

x^* est donc super-attractif.

3. Ordre de convergence de la méthode itérative pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$

On note $f' = f'(x^*)$ et $f'' = f''(x^*)$ les valeurs de la dérivée et de la dérivée seconde de f au point x^*.
f étant de classe C^2 sur U, on peut écrire les développements suivants

$$f(x^* + h) = hf' + \frac{h^2}{2}f'' + o(h^2) = hf' \times \left(1 + \frac{h}{2}\frac{f''}{f'} + o(h)\right)$$

$$f'(x^* + h) = f' \times \left(1 + h\frac{f''}{f'} + o(h)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{f(x^* + h)}{f'(x^* + h)} &= h\frac{1 + \frac{h}{2}\frac{f''}{f'} + o(h)}{1 + h\frac{f''}{f'} + o(h)} \\
&= h\left(1 + \frac{h}{2}\frac{f''}{f'} + o(h)\right)\left(1 - h\frac{f''}{f'} + o(h)\right) \\
&= h - \frac{h^2}{2}\frac{f''}{f'} + o(h^2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'\left(x^* + h - \alpha\frac{f(x^* + h)}{f'(x^* + h)}\right) &= f'\left(x^* + h - \alpha h + o(h)\right) = f'\left(x^* + (1-\alpha)h + o(h)\right) \\
&= f' \times \left(1 + (1-\alpha)\frac{f''}{f'}h\right) + o(h)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha,f}(x^*+h) &= x^*+h-\frac{f(x^*+h)}{f'\left(x^*+h-\alpha\dfrac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}\right)} = x^*+h-\frac{hf'}{f'}\frac{1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+o(h)}{1+(1-\alpha)\frac{f''}{f'}h+o(h)} \\
&= x^*+h-h\Big(1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+o(h)\Big)\Big(1-(1-\alpha)\frac{f''}{f'}h+o(h)\Big) \\
&= x^*+h-h\left(1+h\frac{f''}{f'}\Big(\frac{1}{2}-1+\alpha\Big)+o(h)\right) \\
&= x^*+\Big(\frac{1}{2}-\alpha\Big)\frac{f''}{f'}h^2+o(h^2) = x^*+Ah^2+o(h^2) \quad \text{avec } A=\Big(\frac{1}{2}-\alpha\Big)\frac{f''}{f'}
\end{aligned}
$$

Si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ alors $A \neq 0$ car $f''(x^*) \neq 0$. En application du théorème donnant l'ordre de convergence d'une méthode scalaire, on en déduit que l'ordre de la méthode itérative associée à $F_{\alpha,f}$ est égal à 2.

4. Ordre de convergence de la méthode itérative pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et de f de classe C^3

On note $f''' = f'''(x^*)$ la valeur de la dérivée troisième de f au point x^*.
f étant de classe C^3 sur U, on peut écrire les développements suivants

$$f(x^*+h) = hf' + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{6}f''' + o(h^3) = hf'\Big(1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{6}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big)$$

$$f'(x^*+h) = f' \times \Big(1+h\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{2}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big)$$

Le développement à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}$ obtenu à la question précédente est suffisant pour calculer un développement limité de $F_{\alpha,f}(x^*+h)$ à l'ordre 3.

$$f'\left(x^*+h-\frac{1}{2}\frac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}\right) = f'\left(x^*+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\frac{f''}{f'}+o(h^2)\right) = f'\left(1+\Big(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\frac{f''}{f'}\Big)\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{8}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\right)$$

$$
\begin{aligned}
F_{\frac{1}{2},f}(x^*+h) &= x^*+h-\frac{f(x^*+h)}{f'\left(x^*+h-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}\right)} = x^*+h-\frac{hf'}{f'}\frac{1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{6}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)}{1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{4}\Big[\frac{f''}{f'}\Big]^2+\frac{h^2}{8}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)} \\
&= x^*+h-h\Big(1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{6}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big)\Big(1-\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}-\frac{h^2}{8}\frac{f'''}{f'}-\frac{h^2}{4}\Big[\frac{f''}{f'}\Big]^2+\frac{h^2}{4}\Big[\frac{f''}{f'}\Big]^2+o(h^2)\Big) \\
&= x^*+h-h\Big(1+\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}+\frac{h^2}{6}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big)\Big(1-\frac{h}{2}\frac{f''}{f'}-\frac{h^2}{8}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big) \\
&= x^*+h-h\Big(1-\frac{h^2}{4}\Big[\frac{f''}{f'}\Big]^2+\frac{h^2}{24}\frac{f'''}{f'}+o(h^2)\Big) \\
&= x^*+Ah^3+o(h^3) \quad \text{avec } A=\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-\frac{1}{24}\frac{f'''}{f'}
\end{aligned}
$$

La méthode est d'ordre 3 si $A \neq 0$ cad si $f'''f' - 6(f'')^2 \neq 0$.

5. Etude du cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et de $f = x^2 - a$ avec a réel strictement positif

On note $L_a(x)$ la fonction correspondant à $F_{\alpha,f}$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $f(x) = x^2 - a$.
f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f'''(x) = 0$.
$x^* = \pm\sqrt{a}$ est racine simple de f et $f'(\pm\sqrt{a}) = \pm 2\sqrt{a}$, $f''(\pm\sqrt{a}) = 2$ et $f'''(\pm\sqrt{a}) = 0$.

$$L_a(x) = x - \frac{x^2-a}{2\Big(x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2-a}{2x}\Big)} = x - \frac{2x(x^2-a)}{3x^2+a} = \frac{x^3+3ax}{3x^2+a}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que l'ordre de convergence de la méthode est égal à 3 puisque $A = \dfrac{1}{4a}$. Ce résultat peut aussi être obtenu directement

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = L_a(x_n) - \sqrt{a} = x_n - \sqrt{a} - \frac{2x_n(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{3x_n^2 + a} = \left(x_n - \sqrt{a}\right)\left(1 - \frac{2x_n(x_n + \sqrt{a})}{3x_n^2 + a}\right)$$
$$= \left(x_n - \sqrt{a}\right)\left(\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{3x_n^2 + a}\right) = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^3}{3x_n^2 + a}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^3} = \frac{1}{4a}$$

6. Bassin d'attraction de la racine $x^* = \sqrt{a}$

$L_a(x)$ est la fonction de Lambert dont l'étude est faite au chapitre 2 du polycopié.
L'application $L_a(x)$ est impaire et possède trois points fixes : $x_0^* = 0$, $x_+^* = \sqrt{a}$ et $x_-^* = -\sqrt{a}$.
Elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_a'(x) = \frac{3\left(x^2 - a\right)^2}{(3x^2 + a)^2} \geq 0$$

En utilisant la forme

$$L_a(x) = x - \frac{2x(x^2 - a)}{3x^2 + a}$$

on en déduit que

$$\begin{array}{ll} x < L_a(x) < \sqrt{a} & \text{si} \quad 0 < x < \sqrt{a} \\ \sqrt{a} < L_a(x) < x & \text{si} \quad x > \sqrt{a} \end{array}$$

Quatre cas sont alors possibles :

- $x_0 = x_0^*$: la suite des itérés est la suite stationnaire nulle (donc convergente vers x_0^*)
- $x_0^* < x_0 < x_+^*$ alors $x_0 > x_1 = L_a(x_0) < x_+^*$ et par récurrence triviale $0 < x_n < x_{n+1} < x_+^*$.
  La suite des itérés est croissante et majorée par x_+^* : elle admet donc une limite $0 < l \leq x_+^*$.
  Comme L_a est continue cette limite est le point fixe positif de L_a c'est à dire x_+^*
- $x_0 = x_+^*$: la suite des itérés est la suite stationnaire de valeur x_+^* (donc convergente vers x_+^*)
- $x_+^* < x_0$ alors $x_0 > x_1 = L_a(x_0) > x_+^*$ et par récurrence triviale $x_+^* > x_n > x_{n+1}$.
  La suite des itérés est décroissante et minorée par x_+^* : elle admet donc une limite $l \leq x_+^*$.
  Comme L_a est continue cette limite est le point fixe positif de L_a c'est à dire x_+^*

Compte tenu du fait que L_a est impaire, nous en déduisons que le point fixe x_0^* n'est pas attractif et que les deux autres points fixes x_+^* et x_-^* le sont et que leurs bassins d'attraction respectifs sont $B(x_+^*) =]0, +\infty[$ et $B(x_-^*) =]-\infty, 0[$.