CALCUL SCIENTIFIQUE

Test n°2 : durée 2 heures

Jeudi 3 mai 2012

Les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés. Tout résultat non démontré ne sera pas pris en compte lors de la correction.

PREAMBULE

Soient $(x_0, X, y_0, H) \in \mathbb{R}^4$ avec $x_0 < X$, $0 < H$, $f \in C^2([x_0, X] \times \mathbb{R})$ une fonction L-lipschitzienne par rapport à son deuxième argument et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [x_0, X] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

On considère le schéma numérique à un pas associé à une fonction Φ définie pour tout $(x, y, h) \in [x_0, X] \times \mathbb{R} \times [0, H]$:

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{R} \\ z_{n+1} = z_n + h_n \Phi(x_n, z_n, h_n) & 0 \le n \le N-1 \end{cases} \tag{2}$$

On rappelle que si f est deux fois continuement dérivable dans $[x_0, X] \times \mathbb{R}$ et si Φ, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}$ et $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}$ existent et sont continues dans $[x_0, X] \times \mathbb{R} \times [0, H]$ alors le schéma (2) est au moins d'ordre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \Phi(x, y, 0) = f(x, y) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \dfrac{1}{2} f^{[1]}(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

et exactement d'ordre 2 si de plus

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(x, y, 0) \neq \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f^{[1]}}{\partial x}(x, y) + f(x, y)\frac{\partial f^{[1]}}{\partial y}(x, y)\right) \tag{4}$$

EXERCICE

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et Φ une fonction définie pour tout $(x, y, h) \in [x_0, X] \times \mathbb{R} \times [0, H]$ par la formule :

$$\Phi(x, y, h) = \alpha f(x, y) + \beta f\left(x + h, y + hf\left(x + h, y + hf(x, y)\right)\right) \tag{5}$$

(1pt) 1. Quelle relation doit lier α et β pour que le schéma associé à (5) soit consistant ?

(2pt) 2. Si cette relation est vérifiée démontrer que ce schéma est convergent.

(2pt) 3. Déterminer α et β pour que ce schéma soit au moins d'ordre 2.

[illegible]t) 4. On condidère le cas particulier f(x,y)=xy. Montrer que $\Phi(x, y, h)$ est un polynôme de degré 4 en h dont on déterminera les coefficients en fonction de x et y. En déduire qu'en général le schéma associé à (5) n'est pas d'ordre 3.

PROBLEME

On considère le schéma numérique implicite à un pas suivant :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{R} \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{2} f(x_n, z_n) + \dfrac{h}{2} f(x_n + h, z_n + hf(x, z_{n+1})) \end{cases} \tag{6}$$

Le calcul de z_{n+1} à partir de z_n, x_n et h nécessite par conséquent la résolution d'une équation de la forme :

$$s = r + \frac{h}{2} f(x, r) + \frac{h}{2} f(x + h, r + hf(x, s)) \tag{7}$$

où s est l'inconnue et r, x, h sont trois paramètres.

(2pt) 1. On note g la fonction définie par $g(x, r, s, h) = r + \frac{h}{2} f(x, r) + \frac{h}{2} f(x+h, r+hf(x, s))$. Déterminer $H(L)$ tel que si $0 < h < H(L)$, la fonction $s \mapsto g(x, r, s, h)$ admet un unique point fixe qu'on notera $G(x, r, h)$.

(2pt) 2. En déduire l'expression du schéma (6) sous la forme $z_{n+1} = z_n + h\Phi(x_n, z_n, h)$ où la fonction $(x, y, h) \mapsto \Phi(x, y, h)$ sera explicitée en fonction de x, y, h, f et $G(x, y, h)$.

(2pt) 3. Montrer que la fonction $(x, y, h) \mapsto G(x, y, h)$ est continue et quelle est lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

(2pt) 4. Déterminer pour h assez petit, une condition de Lipschitz portant sur la deuxième variable de la fonction Φ et en déduire que le schéma (6) est convergent.

(4pt) 5. Montrer que le schéma est au moins d'ordre 2.

Corrigé du second test de Calcul Scientifique

Pierre WERNY

5 mai 2012

EXERCICE

1. Consistance

On rappelle (théorème du cours) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma soit consistant est

$$\forall x \in [x_0, X], \forall y \in \mathbb{R}, \Phi(x, y, 0) = f(x, y)$$

Dans le cas étudié, $\Phi(x, y, 0) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y) = (\alpha + \beta) f(x, y)$.
Le schéma est donc consistant si et seulement si $\alpha + \beta = 1$.

2. Convergence

Une condition suffisante de stabilité est qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in [x_0, X], \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, H], |\Phi(x, y, h) - \Phi(x, z, h)| \leq C|y - z|$$

On rappelle que f est L-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable et donc vérifie

$$\forall x \in [x_0, X], \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|x - z|$$

$$\begin{aligned}
|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)| &= \Big|\alpha f(x,y) + \beta f\left(x+h, y+hf\left(x+h, y+hf(x,y)\right)\right) \\
&\qquad - \alpha f(x,z) - \beta f\left(x+h, z+hf\left(x+h, z+hf(x,z)\right)\right)\Big| \\
&\leq |\alpha||f(x,y) - f(x,z)| \\
&\qquad + |\beta|\Big|f\left(x+h, y+hf\left(x+h, y+hf(x,y)\right)\right) - f\left(x+h, z+hf\left(x+h, z+hf(x,z)\right)\right)\Big|
\end{aligned}$$

On exprime une fois ou trois fois la condition de Lipschitz

$$|f(x,y) - f(x,z) \leq L|y - z|$$

$$\begin{aligned}
&\Big|f\left(x+h, y+hf\left(x+h, y+hf(x,y)\right)\right) - f\left(x+h, z+hf\left(x+h, z+hf(x,z)\right)\right)\Big| \\
&\qquad \leq L\Big|y + hf\left(x+h, y+hf(x,y)\right) - z - hf\left(x+h, z+hf(x,z)\right)\Big| \\
&\qquad \leq L|y-z| + Lh\Big|f\left(x+h, y+hf(x,y)\right) - f\left(x+h, z+hf(x,z)\right)\Big| \\
&\qquad \leq L|y-z| + L^2h|y + hf(x,y) - z - hf(x,z)| \\
&\qquad \leq L|y-z| + L^2h|y-z| + L^2h^2|f(x,y) - f(x,z)| \\
&\qquad \leq (L + L^2H + L^3H^2)|y-z|
\end{aligned}$$

On en déduit $|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)| \leq \left(|\alpha L| + |\beta|(L + L^2H + L^3H^2)\right)|y-z| \leq C|y-z|$
Le schéma est donc stable avec une constante de stabilité $C = (|\alpha| + |\beta|)L + |\beta|(L^2H + L^3H^2)$.
Si de plus, on suppose que $\alpha + \beta = 1$, le schéma est alors stable et consistant donc convergent

3. Ordre de convergence

On utilise le théorème donné en préambule.

f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0, X] \times \mathbb{R}$, Φ, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}$ et $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}$ existent et sont continues dans $[x_0, X] \times \mathbb{R} \times [0, H]$.

On a trivialement pour $\alpha + \beta = 1$, $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$ (condition de consistance).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,h) = \beta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x+h, y+hf\,(x+h, y+hf(x,y))\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x+h, y+hf\,(x+h, y+hf(x,y))\Big)\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,h)\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x,y,h) &= hf\,(x+h, y+hf(x,y)) \\
\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,h) &= f\,(x+h, y+hf(x,y)) + h\frac{\partial \Phi_2}{\partial h}(x,y,h) \quad \text{avec} \quad \Phi_2(x,y,h) = f(x+h, y+hf(x,y))
\end{aligned}$$

soit en $h = 0$, $$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,0) = \beta\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)\right)$$

La méthode est donc au moins d'ordre 2 si $\alpha + \beta = 1$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$ soit $\boxed{\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}}$

4. Etude du cas $f(x,y) = x + y$

$$\Phi(x,y,h) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}\Big(x+h+y+h\big(x+h+y+h(x+y)\big)\Big) = x + y + \frac{h}{2}(1+x+y) + \frac{h^2}{2}(1+x+y)$$

On a bien

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,y,0) = x + y = f(x,y) \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,0) = \frac{1}{2}\Big((1 + (x+y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)\Big) = \frac{1}{2}f^{[1]}(x,y) \\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(x,y,0) = 1 + x + y \neq \frac{1}{3}f^{[2]}(x,y) \quad \text{puisque} \quad f^{[2]}(x,y) = \frac{\partial f^{[1]}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f^{[1]}}{\partial y}(x,y) f(x,y) = 1 + x + y
\end{aligned}$$

La méthode n'est donc pas d'ordre 3 en général.

5. Détermination du tableau de Runge-Kutta correspondant (hors test)

On cherche a priori une méthode explicite à 3 étages s'exprimant par le tableau de Runge-Kutta suivant

$$\begin{array}{c|ccc}
c_1 & 0 & & \\
c_2 & a_{21} & 0 & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= y \\
y_2 &= y + a_{21}hf(x + c_1h, y_1) = y + a_{21}hf(x + c_1h, y) \\
y_3 &= y + a_{31}hf(x + c_1h, y_1) + a_{32}hf(x + c_2h, y_2) \\
&= y + a_{31}hf(x + c_1h, y) + a_{32}hf(x + c_2h, y + a_{21}hf(x + c_1h, y))
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,h) =& b_1f(x + c_1h, y) + b_2f(x + c_2h, y + a_{31}hf(x + c_1h, y)) \\
&+ b_3f(x + c_3h, y + a_{31}hf(x + c_1h, y) + a_{32}hf(x + c_2h, y + a_{21}hf(x + c_1h, y)))
\end{aligned}$$

par identification, on obtient

$$\begin{aligned}
&b_1 = \alpha, \; b_2 = 0, b_3 = \beta \\
&c_1 = 0, \; c_2 = 1, \; c_3 = 1 \\
&a_{31} = 0, \; a_{21} = 1, \; a_{32} = 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
1 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \alpha & 0 & \beta
\end{array}$$

PROBLEME

1. Calcul de $H(L)$

Si l'on trouve $H(L)$ tel que pour $h \in]0, H(L)[$, la fonction $s \mapsto g(x, r, s, h)$ soit une contraction stricte sur $\mathbb{R}$, on pourra appliquer le théorème de Picard avec paramètres ($\mathbb{R}$ étant complet) pour conclure à l'existence d'un unique point fixe $G(x, r, h)$ et à la continuité de la fonction $(x, y, h) \mapsto G(x, y, h)$.
La fonction f étant continue, il en résulte que la fonction $s \mapsto g(x, r, s, h)$ est aussi une fonction continue.
En exprimant deux fois la condition de Lipschitz vérifiée par f, on obtient
$\forall x \in [x_0, X], \forall r \in \mathbb{R}, \ \forall h \in [0, H], \ \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|g(x,r,s_1,h) - g(x,r,s_2,h)| &\leq \frac{h}{2}|f(x+h, r+hf(x,s_1)) - f(x+h, r+hf(x,s_2))| \\ &\leq \frac{h}{2}L|r + hf(x,s_1) - r - hf(x,s_2)| \\ &\leq \frac{h^2}{2}L|f(x,s_1) - f(x,s_2)| \leq \frac{h^2L^2}{2}|s_1 - s_2|\end{aligned}$$

Si on choisit h tel que $\dfrac{h^2L^2}{2} < 1$ cad $h < H(L) = \dfrac{\sqrt{2}}{L}$ alors par application du théorème de Picard avec paramètres, la fonction $s \mapsto g(x, r, s, h)$ admet un unique point fixe noté $G(x, r, h)$ et la fonction $(x, y, h) \mapsto G(x, y, h)$ est continue.

2. Calcul de $\Phi(x, y, h)$

Par construction, $G(x,y,h) = g(x,y,G(x,y,h),h) = y + \frac{h}{2}f(x,y) + \frac{h}{2}f\Big(x+h, y+hf(x, G(x,y,h))\Big)$
z_{n+1} étant solution pour $h < H(L)$ de l'équation $z_{n+1} = g(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$,
z_{n+1} s'écrit sous la forme

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n) + \frac{h}{2}f(x_n + h, z_n + hf(x, G(x_n, z_n, h)) = z_n + h\Phi(x_n, z_n, h)$$

$$\text{avec} \quad \Phi(x,y,h) = \frac{1}{2}f(x,y) + \frac{1}{2}f(x+h, y+hf(x, G(x,y,h))$$

3. Etude de la fonction $(x, y, h) \mapsto G(x, y, h)$

<u>Continuité :</u> La continuité de la fonction $(x, y, h) \mapsto G(x, y, h)$ a été traitée à la question 1.
Ce résultat peut aussi se démontrer directement (et facilement) sans utiliser le théorème du point fixe de Picard avec paramètres (solution donnée en annexe).

<u>Condition de Liphschitz :</u> En exprimant deux fois la condition de Lipschitz vérifiée par f, on obtient
$\forall x \in [x_0, X], \ \forall h \in [0, H]$, avec $H < H(L)$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)| &\leq \Big| y_1 + \frac{h}{2}f(x,y_1) + \frac{h}{2}f\Big(x+h, y_1 + hf(x, G(x,y_1,h))\Big) \\ &\qquad - y_2 - \frac{h}{2}f(x,y_2) - \frac{h}{2}f\Big(x+h, y_2 + hf(x, G(x,y_2,h))\Big)\Big| \\ &\leq |y_1 - y_2| + \frac{hL}{2}|y_1 - y_2| + \frac{hL}{2}\Big|y_1 + hf(x, G(x,y_1,h)) - y_2 - hf(x, G(x,y_2,h))\Big| \\ &\leq (1 + hL)|y_1 - y_2| + \frac{h^2L^2}{2}\Big|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)\Big| \\ &\leq (1 + HL)|y_1 - y_2| + \frac{H^2L^2}{2}\Big|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)\Big|\end{aligned}$$

soit

$$|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)|\Big(1 - \frac{H^2L^2}{2}\Big) \leq (1 + HL)|y_1 - y_2|$$

et comme $1 - \dfrac{H^2L^2}{2} > 0$ puisque $H < H(L)$

$$|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)| \leq \frac{1 + HL}{1 - \dfrac{H^2L^2}{2}}|y_1 - y_2| \leq L_G|y_1 - y_2|$$

$G(x, y, h)$ est donc L_G-lipchitzienne par rapport à son deuxième argument avec $L_G = \dfrac{1 + HL}{1 - \dfrac{H^2L^2}{2}}$

4. Convergence du schéma

$\forall x \in [x_0, X]$, $\forall h \in [0, H]$, avec $H < H(L)$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,y_1,h) - \Phi(x,y_2,h)| &\leq \frac{1}{2}\Big| f(x,y_1) + f\Big(x+h, y_1 + hf(x, G(x,y_1,h))\Big) - f(x,y_2) - f\Big(x+h, y_2 + hf(x, G(x,y_2,h))\Big)\Big| \\ &\leq \frac{L}{2}|y_1 - y_2| + \frac{L}{2}|y_1 + hf(x, G(x,y_1,h)) - y_1 - hf(x, G(x,y_2,h))| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + \frac{hL^2}{2}\Big|G(x,y_1,h) - G(x,y_2,h)\Big| \\ &\leq L|y_1 - y_2| + \frac{HL^2}{2}L_G|y_1 - y_2| \leq L_\Phi |y_1 - y_2|\end{aligned}$$

Pour $h \in [0, H]$ avec $H < H(L)$, la fonction $\Phi(x,y,h)$ est L_Φ-lipchitzienne par rapport à son deuxième argument avec $L_\Phi = L + \dfrac{HL^2}{2} L_G$ *(inutile de développer, pas de forme simple)*
On en conclut que le schéma (6) est stable en application du théorème (déja énoncé à la question 2 de l'exercice) assurant une condition suffisante de stablité.
D'autre part, $\Phi(x,y,0) = \dfrac{1}{2}f(x,y) + \dfrac{1}{2}f(x,y) = f(x,y)$. Le schéma est donc consistant (cf CNS de consistance énoncée à la question 2 de l'exercice). Etant **consistant et stable**, ce schéma est **convergent**.

5. Ordre du schéma

Le schéma est au moins d'ordre 1 (cf la condition de consistance). Montrons qu'il est au moins d'ordre 2 en utilisant le théorème donné en préambule. Pour cela, on admettra que $\dfrac{\partial G}{\partial h}$ existe et est continue (résultat issu du théorème des fonctions implicites). Alors $\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}$ existe et est continue.

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,h) &= \frac{1}{2}f(x,y) + \frac{1}{2}f(x+h, y + hf(x, G(x,y,h))) \\ &= \frac{1}{2}f(x,y) + \frac{1}{2}f(x+h, y + \Phi_1(x,y,h)) \quad \text{avec } \Phi_1(x,y,h) = hf(x, G(x,y,h))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x+h, y+hf(x,G(x,y,h))\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x+h, y+hf(x,G(x,y,h))\Big)\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,h)\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,h) = f(x, G(x,y,h)) + h\frac{\partial \Phi_2}{\partial h}(x,y,h) \quad \text{avec} \quad \Phi_2(x,y,h) = f(x, G(x,y,h))$$

soit en $h = 0$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial h}(x,y,0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ f(x,y)\right) = \frac{1}{2}f^{[1]}(x,y)$$

Le schéma étudié est donc au moins d'ordre 2.