E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Mercredi 10 Octobre 2012

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours).*
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.

Problème : Transformation plane isochore

Soit $\overline{\Omega}_0 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2, X_1^2 + X_2^2 \geq 1\}$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ privé du disque ouvert unité centré sur l'origine O de ce plan et soit, relativement au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\mathcal{F}$ la transformation définie sur $\overline{\Omega}_0 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & X_1 \cos a(R,t) + X_2 \sin a(R,t) \\ x_2 & = & -X_1 \sin a(R,t) + X_2 \cos a(R,t) \end{array} \right. \qquad (1)$$

où $t \geq 0$ désigne la variable temps, $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $a(R,t) = \frac{\alpha t^2}{R}$ et où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension LT^{-2}.

Indications Dans tout le problème et dans le souci d'alléger l'écriture on posera $b(R,t) = \frac{3\alpha t^2}{R}$ ainsi que $c(R,t) = \frac{\alpha t^3}{R^3}$ et l'on pourra même simplement, sans pour autant oublier leur dépendance vis-à-vis des variables d'espace et de temps, désigner respectivement par a, b et c les grandeurs $a(R,t)$, $b(R,t)$ et $c(R,t)$.

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules de $\overline{\Omega}_0$.
2. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les cercles de $\overline{\Omega}_0$ centrés sur l'origine du plan $\mathbb{R}^2$. Que deviennent elles à l'instant t ?
3. Reprendre la question 2 en considérant cette fois les courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les demi-droites de $\overline{\Omega}_0$ d'équations en coordonnées polaires $\Theta = \text{cste}$ (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires r et θ relatif à la configuration déformée $\overline{\Omega}_t$). Représenter sommairement la transformée à l'instant t de l'une de ces demi-droites.

4. Donner l'expression lagrangienne $\mathbf{v}(\vec{X},t)$ du champ des vitesses.
5. Inverser la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t.
6. Des résultats obtenus aux questions 4 et 5 déduire l'expression eulérienne $\mathbf{v}(\vec{x},t)$ du champ des vitesses. Montrer alors que la transformation de $\overline{\Omega}_0$ est isochore puis donner l'expression des lignes de courant à l'instant t. Quelle réflexion vous inspire ce dernier résultat lorsqu'on le compare à celui de la question 1 ?
7. Donner l'expression $\boldsymbol{\gamma}(\vec{x},t)$ du champ des accélérations en variables d'Euler puis celle de ses courbes enveloppes (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires r et θ). Représenter sommairement quelques unes de ces courbes.
8. Déterminer, $\forall\,\vec{X}\in\Omega_0$ et $\forall t\geq 0$, la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}(\vec{X},t)$. Donner, en la justifiant mais sans pour autant la calculer, la valeur de son déterminant.
9. On se limite, dans cette question, aux points de la demi-droite matérielle $\mathcal{D}_0\subset\Omega_0$ d'équation $X_2=0$ et $X_1>1$ à l'instant $t=0$. Donner alors l'expression de $\mathbf{F}(\vec{X},t)$ aux points de $\mathcal{D}_0$ et en déduire celle du tenseur de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ puis du tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. Déterminer les dilatations ε_{NN} dans les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{N}=\vec{e_2}$ puis montrer que la distorsion γ_{NT} entre ces deux directions est égale à $\arctan a$. Donner enfin l'expression des valeurs principales de $\mathbf{L}$ puis celle des directions principales de déformation.
10. On suppose à présent que $t\in[0,\mathrm{T}]$, l'instant T étant choisi de façon telle que $\alpha\mathrm{T}^2\ll 1$. On a donc, $\forall R\geq 1$ et $\forall t\in[0,\mathrm{T}]$, $a\ll 1$. Reprendre, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en a, l'expression de $\mathbf{F}$ obtenue à la question 8 et valable $\forall\,\vec{X}\in\Omega_0$ et $\forall t\geq 0$. En déduire ensuite, $\forall\,\vec{X}\in\Omega_0$ et $\forall t\in[0,\mathrm{T}]$, celle du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Quelles sont alors les déformations principales et les directions principales de déformation aux points de la droite matérielle $\mathcal{D}_0$ définie à la question 9 ?

RIVOIRARD Lucas

1A

Test MMC 1

10.5/20

Notation

$b(R,t) = \frac{3\alpha t^2}{R}$ $c(R,t) = \frac{\alpha t^3}{R^3}$ $a(R,t) = \frac{\alpha t^3}{R}$

Q1 On a une particule de Ω_0

1/1

$$x_1 = X_1 \cos\left(\frac{\alpha t^3}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) + X_2 \sin\left(\frac{\alpha t^3}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) \quad (1)$$

$$x_2 = -X_1 \sin\left(\frac{\alpha t^3}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) + X_2 \cos\left(\frac{\alpha t^3}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) \quad (2)$$

Les trajectoires des particules de Ω_0 sont des cercles de centre l'origine et de rayon $R = \sqrt{X_1^2+X_2^2}$ ✓

En effet x_1 et x_2 verifie pour tout t :

$$x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2 \quad \forall t$$

1 Q2 A $t=0$, on considère un cercle de Ω_0

Les particules vérifient donc

/1 $$X_1^2 + X_2^2 = R^2$$

A l'instant t on a

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos a + X_2 \sin a \\ x_2 = -X_1 \sin a + X_2 \cos a \end{cases}$$

D'où
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (X_1 \cos a + X_2 \sin a)^2 + (-X_1 \sin a + X_2 \cos a)^2 \\ &= X_1^2 \cos^2 a + X_2^2 \sin^2 a + X_1^2 \sin^2 a + X_2^2 \cos^2 a \\ &\quad + \cancel{2 X_1 X_2 \cos a \sin a} - \cancel{2 X_1 X_2 \sin a \cos a} \\ &= X_1^2 + X_2^2 = R^2 \end{aligned}$$

Donc les courbes materielles constituées à l'instant $t=0$ par les cercles de Ω_0 centré en $\binom{0}{0}$ restent des cercles de même rayon

Q3
1.5/2 On considère une demi droite d'équation polaire $\theta = cst$ à $t=0$

/2 On a donc $X_1 = R\cos(\theta_0)$ avec $\theta_0 = cst$
$X_2 = R\sin(\theta_0)$

La transformation donne à l'instant t

$$x_1 = R\cos(\theta_0)\cos\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right) + R\sin\theta_0 \sin\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)$$

$$x_2 = -R\cos\theta_0 \sin\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right) + R\sin\theta_0\cos\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)$$

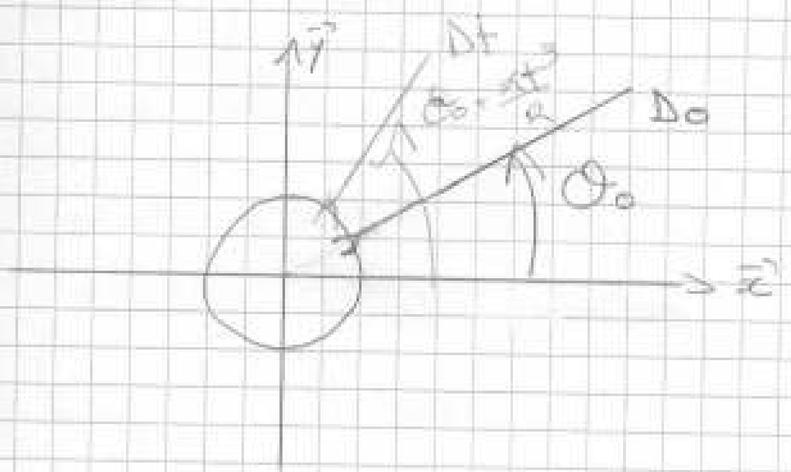
Donc
$$x_1 = R\cos\left(\theta_0 \mp \frac{\alpha t^3}{R}\right)$$
$$x_2 = R\sin\left(\theta_0 \mp \frac{\alpha t^3}{R}\right)$$

Ainsi: on obtient une droite qui a subit une "rotation" d'angle $-a$

pas tout à fait car

$$R \to \infty \quad \frac{\alpha t^3}{R} \to 0 \quad x \to R\cos\theta = X$$

Représentation



Q4

2 /2 On cherche $\vec{v}(\vec{X},t)$

Or $v(\vec{X},t) = \frac{dx}{dt}(X,t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{ex} \\ \vec{ey} \end{pmatrix}$

Donc

$$v_1 = -X_1\left(\frac{3\alpha t^2}{R}\right)\sin\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right) + X_2\left(\frac{3\alpha t^2}{R}\right)\cos\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)$$

et $v_2 = -X_1\left(\frac{3\alpha t^2}{R}\right)\cos\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right) - X_2\left(\frac{3\alpha t^2}{R}\right)\sin\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)$

D'après les notations :

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= -X_1 b \sin(a) + X_2 b \cos(a) \\ v_2 &= -X_1 b \cos(a) - X_2 b \sin(a) \end{aligned}} \quad \left(= \begin{pmatrix} b x_2 \\ -b x_1 \end{pmatrix} \right)$$ ✓ 1

2 Q5 On remarque que

$$F \quad \overline{\overline{F}}_t = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad \text{et } a = \frac{\alpha t^3}{R}$$

ne pas confondre F et $\overline{\overline{F}}$

Donc la transformation $\overline{\overline{F_t}}$ est une rotation avec un angle qui varie en fonction du temps.

Ainsi il est logique qu'un cercle reste un cercle (Q2) et qu'une droite devienne une droite qui a subit une rotation.

Donc l'inverse de F_t est une rotation d'angle $-a$

Donc $\left(\overline{\overline{F_t}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-a) & \sin(-a) \\ -\sin(-a) & \cos(-a) \end{pmatrix}$ Non

$\overline{\overline{F}}^{-1}$

ne pas confondre F_t et $\overline{\overline{F}}$

$$\boxed{\text{Donc } \left(\overline{\overline{F_t}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos(a) \end{pmatrix} = {}^T\overline{\overline{F}}}$$

Q6 On a $\vec{v}(x,t) = \overline{\overline{F_t}}\ \vec{V}(X,t)$

1,5/2

/2

Donc $\vec{v}(x,t) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_1 b \sin a + X_2 b \cos a \\ -X_1 b \cos a - X_2 b \sin a \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{v}(x,t) = \begin{pmatrix} -X_1 b \sin a \cos a + X_2 b \cos^2 a - X_1 b \sin^2 a + X_2 b \sin a \cos a \\ \sin a \cos a\, b X_1 + X_2 b \sin^2 a - X_1 b \cos^2 a - X_2 b \sin a \cos a \end{pmatrix}}$$

$= b \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ (1)

On a $\det F = J = \frac{dv}{dV}$

Or $\cancel{\det F = 1}$ donc $dv = dV$

$\boxed{\text{La transformation est isochore}}$

montrer $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

RIVOIRARD LUCAS 1A

Test MMC - 1

Q6 suite

Calcul des lignes de courant :

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \rightarrow \frac{dx_1}{\cancel{b}x_2} = \frac{dx_2}{-\cancel{b}x_1}$$

$$\rightarrow x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

On remarque que

$$v_1 = b x_2 \cos a - b x_1 \sin a$$
$$v_2 = -b x_1 \cos a - b x_2 \sin a.$$

Donc $\frac{dx_1}{v_1} = -\frac{dx_2}{v_2}$ d'où $x_1^2 = -(x_2)^2 + K$

où $K \in \mathbb{R}$

L'expression des lignes de courant est

$\boxed{x_1^2 = -(x_2)^2 + K}$ d'où $\boxed{x_1^2 + x_2^2 = K = R^2}$ ✓

Ce sont **des cercles** ce qui correspond exactement à la trajectoire des particules trouvées à Q1. Ainsi

le fluide est rotationnel et le mouvement est non permanent

Q7

0.5/3 pour effort

/3

On a $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{v}) \cdot \vec{v}$

Or $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} A = c x_2 \cos a - c x_1 \sin a + b v_2 \cos a - b v_1 \sin a \\ + b^2 x_2 \sin a - b^2 x_1 \cos a \\ B = -c x_1 \cos a - c x_2 \sin a - b v_1 \cos a - b v_2 \sin a \\ + b^2 x_1 \sin a - b^2 x_2 \cos a \end{pmatrix}$

2

et $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \cdot \vec{v}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = \cancel{\begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 \\ \partial v_2/\partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\sin a \\ -b\sin a \end{pmatrix}}$$

c'est un T2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\sin a \; v_1 \\ -b\sin a \; v_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} c x_2 \cos a - c x_1 \sin a + b v_2 \cos a - 2b\sin a \, v_1 - b^2 x_2 \sin a - b^2 x_1 \cos a \\ -c x_1 \cos a - c x_2 \sin a - b v_1 \cos a - 2b\sin a \, v_2 + b^2 x \sin a - b^2 x_2 \cos a \end{pmatrix}}$$

Les courbes envellopes sont telles que

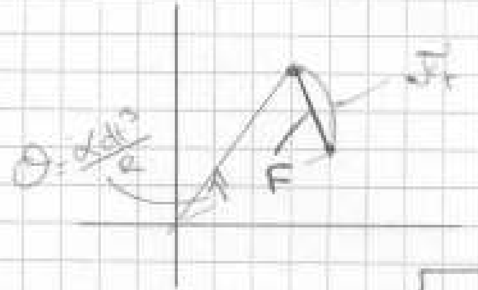
$$\frac{dx_1}{\gamma_1} = \frac{dx_2}{\gamma_2}$$

Q8 On a $\vec{\varphi}_t = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$

0.5/2 pour effort

1/2

Pour trouver la transformation linéaire tangente de $\vec{\varphi}_t$ on fait un développement limité de $\cos a$ et $\sin a$



- particule à l'instant $t+dt$
- particule à l'instant t

$= \overline{\overline{\text{grad}}}_{X}\, \vec{x} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ et $a = f(x,y)$

On a donc $\boxed{\cancel{\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha t^3}{R} \\ -\frac{\alpha t^3}{R} & 1 \end{pmatrix}}}$

faussant la suite

On a $\det(F) = 1$ car φ_t est isochore

Q9 On a soit $\vec{X} \in D_0$,

0.5/3 pour effort

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 > 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\bar{\bar{F}}.\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha t^3}{R} \\ -\frac{\alpha t^3}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{\alpha t^3}{R} X_1 \end{pmatrix} = X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha t^3}{R} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Donc } C = {}^tFF = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 + \left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 \end{pmatrix} = k\,\bar{\bar{I}} \text{ donc ne peut pas être isochore !} \\ \text{et } L = \frac{1}{2}(C - I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 \end{pmatrix} \end{array}}$$

On a $\mathcal{E}_{\vec{e_i}\vec{e_i}} = \sqrt{C(\vec{e_i},\vec{e_i})} - I$

Or $\vec{e_i}\,\overline{\overline{C}}\,\vec{e_i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overline{\overline{C}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

Donc $\mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2$

de même $\mathcal{E}_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2$

et $\sin \gamma_{NT} = \dfrac{L(N,T)}{\sqrt{C(N,N)}\sqrt{C(T,T)}} \approx \gamma_{NT}$

Or $L(N,T) = \vec{T} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{N}$ avec $\vec{N} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{T} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc $\gamma_{NT} =$

On a $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Les valeurs principales de } L \text{ sont } \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha t^3}{R}\right)^2 \text{ et les directions principales } (\vec{e_1} \text{ et } \vec{e_2}).}$