E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Jeudi 22 Novembre 2012

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours). Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

Problème : Cylindre creux soumis à une densité massique radiale de forces

Un cylindre creux d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est en équilibre sous l'action du champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b}(\vec{x}) = -\frac{q}{r^3}\vec{e_r}$ où q est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. Ce cylindre est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. On suppose alors, compte tenu de ces hypothèses et des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\vec{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = \frac{\rho q}{Er^2} \quad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de ρ, q et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En déduire alors, en fonction de ρ, q, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. On suppose que la paroi intérieure du cylindre ($r = R_0$) n'est soumise à aucune action mécanique de contact et que sa paroi extérieure ($r = R_1$) reste fixe. Écrire alors les conditions aux limites en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, q, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
5. De la question 4 déduire, en fonction de ρ, q, E, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, q, R_0, R_1 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.

S1 $\to$ F(C) $\to$ S2

6. Dans tout ce qui suit on suppose $R_1 = 2R_0$. Représenter les variations des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de r.
7. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, des résultats de la question 6 déduire, en fonction de ρ, R_0 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur q_e de q au-delà de laquelle apparaissent les premières déformations plastiques.

Premier exercice : État de contrainte plane et fonction de contrainte

Un solide déformable est soumis à un état de contrainte plane relativement au plan euclidien (Ox_1, Ox_2). Les composantes non nulles σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} du tenseur des contraintes planes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ étant des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ des variables d'espace x_1 et x_2, on suppose, dans tout cet exercice, qu'en tout point du solide l'on a $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ et que le solide à l'équilibre n'est soumis à aucune action mécanique extérieure à distance.

1. Montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre, que σ_{11} et σ_{12} sont des fonctions harmoniques des variables d'espace x_1 et x_2. (une fonction réelle f est harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace $\Delta f = 0$).
2. On suppose qu'il existe une fonction réelle φ des variables d'espace x_1 et x_2 (fonction de contrainte) telle qu'en tout point du solide l'on ait $\sigma_{11} = \partial_1\varphi$ et $\sigma_{12} = \partial_2\varphi$. Montrer que les équations indéfinies de l'équilibre sont satisfaites si et seulement si φ est une fonction harmonique des variables d'espace x_1 et x_2.

Questions bonus Dans tout ce qui suit le solide est un tube de rayon intérieur r_0, de rayon extérieur r_1 et d'axe de révolution Ox_3 perpendiculaire au plan de contrainte (Ox_1, Ox_2). On considère alors la fonction de contrainte $\varphi(x_1, x_2) = \tau r_0 \ln r$, où τ est une contrainte donnée et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

3. Vérifier rapidement que φ est une fonction harmonique puis donner l'expression du tenseur des contraintes planes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en tout point du tube.
4. Déterminer les actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur les parois intérieure $r = r_0$ et extérieure $r = r_1$ du tube.
5. Déterminer les directions principales de contrainte et les contraintes principales en tout point du tube.

Second exercice : Sollicitation thermomécanique d'une sphère

En l'absence d'actions mécaniques extérieures à distance, une sphère de rayon R est soumise à une variation ΔT de sa température initiale ainsi qu'à une pression uniforme p_0 sur sa paroi extérieure $(r = R)$. Cette sphère est constituée d'un matériau ayant un comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique linéaire β.

1. Quelle valeur ΔT_0 doit on donner à ΔT pour qu'en tout point de la sphère le champ des déplacements soit nul ? On exprimera ΔT_0 en fonction de p_0, E, ν et β.
2. L'élévation de température ΔT ayant la valeur ΔT_0 trouvée à la question 1, quel est alors, en tout point du solide, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

RivoiRARD Lucas 1A

Test MMC

8.5/13 13.5/20 + 1

Problème 1

1 1. On a $\bar{\bar{\varepsilon}} =$ sym$\left(\overline{\overline{grad}}(\vec{u})\right)$ avec $\vec{u} = u(r)\vec{e_r}$

1/1 et

Donc $\boxed{\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ ✓

D'après la loi de Hooke.

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\eta \bar{\bar{\varepsilon}} - I_{1\varepsilon} \lambda \bar{\bar{I}}$$

Or $I_{1\varepsilon} = tr(\varepsilon) = u' + \frac{u}{r}$ $\quad 2\eta = \frac{E}{1+\nu}$ et $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Donc $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\eta u' - (u' + \frac{u}{r})\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta \frac{u}{r} - (u' + \frac{u}{r})\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(u' + \frac{u}{r})\lambda \end{bmatrix}$

Donc

$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} Eu' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eu}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ ✓

1/2

2/ l'Équation indéfinie d'équilibre s'écrit

1/1pt

$$\vec{\operatorname{div}}\,\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{b} = \vec{0}$$

En projection sur $\vec{e_r}$ on a donc

(1) $\boxed{E u''(r) + E\frac{u'(r)}{r} - E\frac{u(r)}{r^2} - \frac{\rho q}{r^2} = 0}$ V car $\vec{\operatorname{div}}\,\bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{e_r} = \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$

Avec $r \in]R_0 ; R_1[$

3/ Si on prend $\begin{cases} \boxed{a = -\frac{\rho q}{E}} \text{ V} \\ u(r) = a \end{cases}$ on a bien

2/2pt

il faut faire l'inverse, pour $u(r) = a$ on a $a = -\frac{\rho q}{E}$

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -\left(\frac{-q r}{E r^2}\right)$$

* Les solutions de l'équation homogène $\left(u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0\right)$

On cherche sous la forme $u(r) = r^{\alpha}$

On obtient $(\alpha)(\alpha-1)\, r^{\alpha-2} + \alpha\frac{r^{\alpha-1}}{r} - \frac{r^{\alpha}}{r^2} = 0$

Donc $\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0$

Donne $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ V

Donc $u^{(o)}(r) = Ar + \frac{B}{r}$

La solution complète est donc

$\boxed{u(r) = -\frac{q\rho}{E} + Ar + \frac{B}{r}}$ V on cherche à déterminer (A, B) avec les conditions initiale

4/ Conditions limites

2/2pt

$$\text{et}\begin{cases}\vec{\sigma}(r=R_i) = \vec{0} \checkmark \\ \vec{\sigma}(r=R_0) = \vec{0} \quad \text{donc } \sigma_{rr}(r=R_0) = 0 \checkmark\end{cases}$$

D'après (1) on a donc $u''(r=R_0) + \frac{u'(r=R_0)}{R_0} - \frac{u(r=R_0)}{R_0^2} = 0$

Donc
$$\begin{cases}\frac{-q\rho}{E} + AR_i + B/R_i = 0 \\ \frac{2B}{R_0^3} + \frac{1}{R_0}\left(A - \frac{B}{R_0^2}\right) - \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{-q\rho}{E} + AR_0 + \frac{B}{R_0}\right) = 0\end{cases}$$

D'où
$$\begin{cases}AR_i + \frac{B}{R_i} = \frac{\rho q}{E} \\ A - \frac{B}{R_0^2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = \frac{B}{R_0^2} \\ B\left(\frac{R_i^2 + R_0^2}{R_i R_0^2}\right) = \frac{\rho q}{E}\end{cases}$$

Donc $\boxed{B = \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i R_0^2}{R_i^2 + R_0^2}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\right)}$ ✓

5/ On a donc

$$u(r) = \frac{-q\rho}{E} + \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\right) r + \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i R_0^2}{R_i^2 + R_0^2}\right) \times \frac{1}{r} \checkmark$$

1.5/2pt

$\varepsilon_r = u' = A - \frac{B}{r^2} = A\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)$

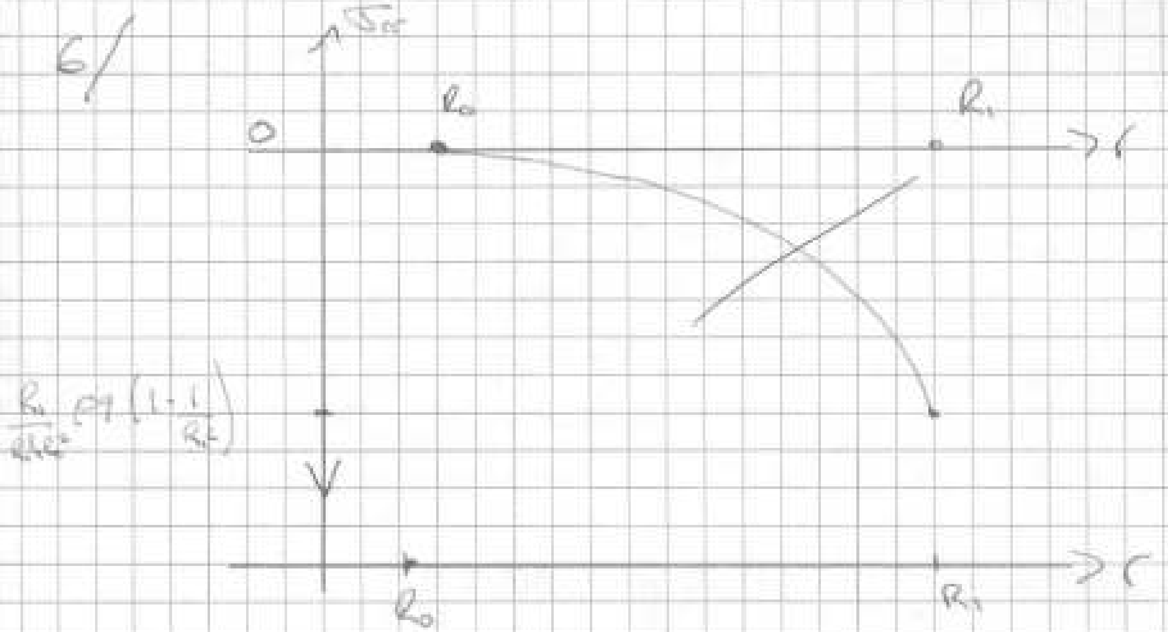
$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\rho q}{E} \frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho q}{E r} + \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\right) + \frac{\rho q}{E}\left(\frac{R_i R_0^2}{R_i^2 + R_0^2}\right) \times \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

erreur de recopie

$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2} - \frac{\rho q}{E}\frac{1}{r}$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \rho q \frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) \text{ idem} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-q\rho}{E r} + \rho q\left(\frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\right) + \rho q \frac{1}{r^2}\left(\frac{R_i}{R_i^2 + R_0^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6/



0.5 / 2,5 pt pour effort

7/ Le critère de Tresca donne

0.5 / 2,5 pt

$$\boxed{\max \frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2} < \frac{\sigma_0}{2}}$$ cercle de Mohr

D'où $\left|\left[\rho q \frac{R_1}{R_1^2+R_0^2}\left(1-\frac{1}{R_1^2}\right) - \left(\frac{-\rho q}{r} + \rho q \frac{R_1}{R_1^2+R_0^2} + \rho q \frac{1}{R_1^2}\frac{R_1}{R_1^2+R_0^2}\right)\right]\right| \leq \sigma_0$

$R_1 = 2R_0$

faussent cette question

Donc $q\rho \left(\frac{8R_0^2-1-2R_0-8R_0^3+2R_0^2}{4R_0}\right) \leq 2\sigma_0$

Donc

$$\boxed{q_e = \frac{2\sigma_0(4R_0)}{\rho(8R_0^2-1-2R_0-8R_0^3+2R_0^2)}}$$

RIVOIRARD LUCAS 1A

MMC

Exercice 1 4/4 + 1

1/ 2/ 2pt

$O_1 \sim \quad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & -\sigma_{11} \end{pmatrix}$

L'équation indéfini de l'équilibre s'écrit

$\vec{div}\, \overline{\overline{\sigma}} = 0 \qquad$ Or $\sigma_{11} = f(x_1, x_2)$
$\sigma_{12} = f(x_1, x_2)$

et $\vec{div}(\overline{\overline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ V

En projetant sur $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ et en dérivant (1) par rapport à x_1 et (2) par rapport à x_2 on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \text{ ie } \Delta \sigma_{11} = 0}$ V

Donc σ_{11} est bien harmonique

2/2

et en dérivant (1) par rapport à x_2 et (2) par rapport à x_1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial^2 x_1} - \dfrac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Donc $\dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} = 0$ ie $\Delta \sigma_{12} = 0$ ✓

Donc σ_{12} est bien une fonction harmonique de (x_1, x_2)

2/ On avait

2/ et
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Equations indéfinies d'équilibre

Si $\exists \varphi \,/\, \sigma_{11} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\sigma_{12} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}$

On a donc

(1) : $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2} = 0$; ie $\Delta \varphi = 0$

(2) : $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$

Donc (1) donne φ comme une fonction harmonique des variables (x_1, x_2)

3/ Si $\varphi(x_1,x_2) = \tau r_0 \ln(r)$ où $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

On a $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0$

car $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \tau r_0 \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ $\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \tau r_0 \dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$

et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \dfrac{\tau r_0(-x_1^2+x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = \left(\dfrac{\tau r_0(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}\right)$

Donc $\boxed{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{ie } \Delta\varphi = 0}$

~~Faux~~

On a donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \sigma_{11}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \sigma_{22}$

Donc $\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau r_0 x_1}{x_1^2+x_2^2} & \dfrac{\tau r_0 x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{\tau r_0 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \dfrac{-\tau r_0 x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}} = \dfrac{\tau r_0}{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$

4/ $\vec{\sigma}(r=r_0) = \cancel{\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\qquad \vec{\sigma}(r=r_1) = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \end{pmatrix}}$

$\vec{\sigma}_n = \bar{\bar{\sigma}}(-\vec{e}_r)$ et $r = R_0$

5/ On a $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & -\sigma_{11} \end{pmatrix}$ $\qquad \det(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\tau r_0}{x_1^2+x_2^2} = \dfrac{\tau r_0}{r}$

détails de calcul absent

Les contraintes principale sont τ et $-\tau$ et les directions principales ~~$\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$~~

1/3 Exercice 2

1/ On a $\overline{\overline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{E}\left((1+\nu)\overline{\overline{\sigma}} - \nu \, tr\,\sigma \, \overline{\overline{I}}\right)}_{\overline{\overline{\varepsilon}}\ \text{élastique}} + \underbrace{\beta \Delta T \, \overline{\overline{I}}}_{\overline{\overline{\varepsilon}}\ \text{thermique}}$ ✓

Or $\vec{u} = u(r)\,\vec{e_r}$

$\sigma_{rr}(r=R) = -P_0$ ✓

0.5/2pt

On veut donc $\vec{u}(r=R) = \vec{0} \rightarrow \overline{\overline{\varepsilon}} = 0$

Donc $-\frac{\nu}{E}\, tr\,\sigma + \beta \Delta T_0 = 0$

pourquoi $\overline{\overline{\sigma}} = 0$?

Donc $\boxed{\cancel{\Delta T_0 = \frac{\nu P_0}{E \beta}}}$

2/ On a $\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + tr_{\varepsilon} \lambda \overline{\overline{I}} - (3\lambda + 2\mu)\beta \Delta T_0 \overline{\overline{I}}$ ✓

Avec $2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}$ et $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

0.5/1pt

et comme $\overline{\overline{\varepsilon}} = 0$

$\overline{\overline{\sigma}} = -(3\lambda + 2\mu)\beta \Delta T \, \overline{\overline{I}}$

$$\boxed{\cancel{\overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\overline{\overline{\varepsilon}} + tr(\overline{\overline{\varepsilon}})\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\overline{\overline{I}} + \left(-\frac{3E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E}{1+\nu}\right)\overline{\overline{I}}}}$$