E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Mercredi 9 Janvier 2013

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours). Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

Premier problème : Mise en rotation d'un fluide de Bingham Un fluide de Bingham incompressible occupe le domaine $\mathcal{V}$ de l'espace physique représenté sur la figure 1 et défini, dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), par $\mathcal{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r \in [r_0, +\infty[, \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$. Le fluide est en contact, aux points de sa frontière $\mathcal{S}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r = r_0, \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$, avec un disque constitué d'un matériau solide indéformable solidaire d'un arbre de torsion (figure 1). Les particules fluides situées sur $\mathcal{S}_0$ étant adhérentes au disque, l'application d'un couple $\vec{C} = C\vec{e_z}$ à l'arbre de torsion permet ainsi d'imprimer au fluide un mouvement de rotation d'axe Oz.

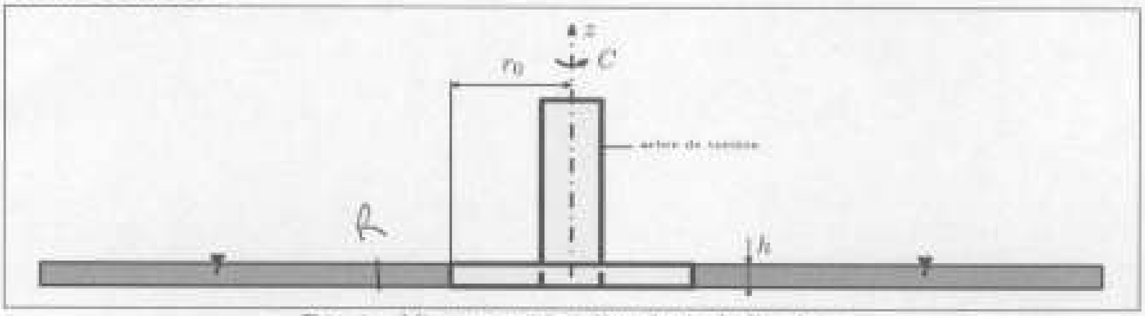

Fig. 1 – Mise en rotation d'un fluide de Bingham

Le comportement de ce fluide visqueux non-newtonien est régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ (i.e. $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ où η est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici $\mathbf{D} = Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}\| - s_0\right)\frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}\|}\right)\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ où Y désigne la fonction de Heaviside et où $s_0 > 0$ est une constante mécanique caractéristique du fluide et appelée seuil d'écoulement (certaines pâtes et boues épaisses présentent un tel comportement). L'objectif du problème est de déterminer le couple minimal C_0 déclenchant l'écoulement puis, pour $C > C_0$, l'expression du champ des vitesses au sein du fluide. Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on supposera qu'en régime permanent le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r)\vec{e_\theta}$ où v est une fonction inconnue de la variable r.

1. Donner la forme du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ où p désigne la pression. Préciser le degré de dépendance des composantes non diagonales de $\boldsymbol{\sigma}$ vis-à-vis des variables r et z.
2. Montrer, si possible sans calculs inutiles, que l'accélération $\boldsymbol{\gamma}$ est centripète (i.e. de direction opposée à $\vec{e_r}$) et ne dépend que de r.
3. Des équations indéfinies du mouvement en projection sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ et de la symétrie de révolution du problème déduire que la pression p ne dépend que de r (on rappelle que l'on néglige les actions mécaniques à distance).
4. De l'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\vec{e_\theta}$ déduire, en fonction de r et d'une constante d'intégration A que l'on ne cherchera pas à déterminer, l'expression de la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$.
5. Soit $R > r_0$, soit $\mathcal{V}_R$ le domaine fluide défini par $\mathcal{V}_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r \in [r_0, R], \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$ et soit $\mathcal{S}_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r = R, \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$ la frontière extérieure de $\mathcal{V}_R$. Donner, en fonction de A et h,

l'expression du moment résultant, aux points de l'axe Oz, des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur $\mathcal{S}_R$. Justifier par ailleurs la nullité du moment résultant, aux points de l'axe Oz, des quantités d'accélération du domaine fluide $\mathcal{V}_R$. De la relation fondamentale de la dynamique appliquée à $\mathcal{V}_R$ déduire ensuite que l'on a $\sigma_{r\theta}(r) = \frac{-C}{2\Pi h r^2}$. Quelle est alors, en fonction de h, r_0 et s_0, l'expression du couple minimal C_0 déclenchant l'écoulement ?

6. **Dans tout ce qui suit on suppose** $C > C_0$. Montrer, en tirant parti des équations de comportement et de l'expression de $\sigma_{r\theta}$ trouvée à la question 5, qu'il existe $r_1 > r_0$ tel que $v(r) = 0$ $\forall r \in [r_1, +\infty[$ (on remarquera que $\lim_{r \to +\infty} v(r)$ ne peut être infinie). Donner l'expression de r_1 en fonction de r_0, C et C_0.
7. Montrer que pour $r \in]r_0, r_1[$, v est solution de l'équation différentielle $v'(r) - \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{\eta}(s_0 - \frac{C}{2\Pi h r^2})$. Montrer ensuite que cette équation admet une solution particulière de la forme $v^{(1)}(r) = \frac{a}{r} + br\ln r$ puis en donner la solution générale. Achever enfin la détermination de v en tirant parti de la condition aux limites en $r = r_1$. Donner enfin l'expression de v en fonction de h, η, C, C_0, r_0 et r.
8. Donner, en fonction de h, η, C, C_0 et r_0, l'expression de la vitesse angulaire ω de l'arbre de torsion. Représenter ses variations en fonction de C et les comparer à celles que l'on obtiendrait pour un fluide visqueux newtonien (i.e. pour $s_0 = 0$).
9. Montrer que la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur le domaine fluide $\mathcal{V}_{r_1}$ a pour expression $\mathcal{P}^e = C\omega$. Du théorème de l'énergie cinétique déduire alors celle de la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}^i$ dissipée dans l'écoulement.
10. Montrer que l'on a, $\forall r \in [r_0, r_1[$, $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = c(r)$. Que vous inspire ce résultat ? **Question bonus :** À quelle condition le théorème de Bernoulli reste-t-il valable pour un fluide visqueux ?

Second problème : Mise en pression d'une cavité sphérique Un sphère creuse, de rayon intérieur r_0 et de dimension infinie dans la direction radiale r, est soumise sur sa paroi intérieure ($r = r_0$) à une pression uniforme $p_0 > 0$. Cette sphère est constituée d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module de Lamé μ. Il obéit par ailleurs au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par σ_0 sa limite élastique en traction simple.

La pression p_0 étant telle que le comportement du matériau reste dans le domaine élastique, on suppose que le champ de déplacement exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\vec{e_r}$, $r \geq r_0$.

1. Des équations de Lamé-Navier déduire l'équation différentielle dont u est solution, puis l'intégrer en tirant parti des conditions aux limites en $r = +\infty$ et $r = r_0$. En déduire alors, en fonction de p_0, μ, r_0 et r, l'expression des champs de déplacement, de déformation et de contrainte.
2. Montrer que la solution obtenue à la question 1 reste valable tant que $p_0 < p_l = \frac{2}{3}\sigma_0$.

On suppose à présent que $p_0 \geq p_l$. Le comportement du matériau est alors parfaitement plastique dans une couronne sphérique $r \in [r_0, r_1]$, où r_1 est à déterminer, et élastique au delà.

3. On admet que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes restent $\sigma_{rr}(r)$ et $\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$. Déterminer alors, en tirant parti de l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_r}$, du critère de Tresca ainsi que des conditions aux limites en $r = r_0$, l'état de contrainte dans la zone plastifiée $r \in [r_0, r_1]$. On donnera les expressions de σ_{rr} et de $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ en fonction de p_0, σ_0, r_0 et r.
4. Montrer, en s'appuyant sur les développements de la question 1, que la continuité des contraintes en $r = r_1$ entraîne $\sigma_{rr}(r_1) = -2\sigma_{\theta\theta}(r_1) = -p_l$. En déduire alors l'expression de r_1 en fonction de p_0, σ_0 et r_0.
5. Achever la détermination du champ des contraintes pour $r \geq r_1$.
6. **Question bonus :** Retrouver l'expression de u obtenue à la question 1 en tirant parti du théorème d l'énergie potentielle (on considérera le sous-espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles de la forme $\mathbf{u} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

RIVOIRARD LUCAS G2B

Test 3 MMC

11/20

Problème 1 9/13

Q1 Par hypothèse comme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$, et comme

$D = \text{sym}(\text{grad}(\vec{v}))$ on a

1 /1pt

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\theta\right) & 0 \\ D_{r\theta} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{D}$ doit être symétrique

Et donc $\sigma = -p\delta + \sigma_v$

Or $D = Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\sigma_v\| - s_0\right)\frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\sigma_v\|}\right)\sigma_v$

On a donc

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & D_{r\theta} / Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\sigma^v\| - s_0\right)\frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\sigma_v\|}\right) & 0 \\ \sigma_{r\theta} & -p & 0 \\ & & -p \end{bmatrix}$$

$\bar{\bar{\sigma}}$ idem

Seul $\sigma_{r\theta}$ dépend de r degré 1

Q2

0.5 /0,5pt

L'arbre de torsion induit une vitesse au fluide selon $\vec{e_\theta}$

On a $\vec{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$

Or $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{v}\,.\,\vec{v}$

$\vec{v}$ est independant du temps : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

et $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{v}\,.\,\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r}v(r) & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ v(r) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r}v^2(r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Donc $\boxed{\vec{\gamma} = -\frac{1}{r}v^2(r)\,\vec{e_r}}$

L'accélération est centripète

Q3

L'équation indéfinie du mouvement s'écrie

1/1pt

$$\vec{\text{div}}(\overline{\overline{\sigma}}) + \rho\vec{b} = \rho\vec{\gamma}$$

Ici $\vec{b} = \vec{0}$ (actions à distance négligées)

Donc en projection sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}(p - p) = \rho\gamma_r = -\rho\frac{1}{r}v^2(r) & (1) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) => p independant de z

La symétrie de révolution du problème selon l'axe $\vec{e_z}$ donne p independant de θ

Donc p dépend que de r

Q4 Selon $\vec{e_\theta}$:

1/1 pt

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0$$ ✓

Donc $r^2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2r\,\sigma_{r\theta} = 0$ (multiplie par r^2)

Donc $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sigma_{r\theta}\right) = 0$

Donc $r^2 \sigma_{r\theta} = A$ ie $\boxed{\sigma_{r\theta} = \frac{A}{r^2}}$ ✓

Q5

2/2 pt

Soit $\vec{M}_0$ le moment resultant aux points de (Oz) des actions mecaniques exterieur s'exerçant sur S_R.

On a $\vec{M}_0 = \int_{S_r} \vec{m}\, dS$ où $\vec{m}$ le moment élémentaire

Or $\sigma_{r\theta}$ ne depend que de r donc les actions mecanique sur les surfaces verticales de S_r se compensent

Donc $\vec{M}_0 = \int_{r=r_0}^{r=R}\int_{z=0}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\, \sigma_{r\theta}\, dV = \iiint \cancel{r^2}\frac{A}{\cancel{r^2}} dV$

$$\boxed{\vec{M}_0 = A 2\pi h\, \vec{e_z}}$$ ✓

Le moment resultant au point Oz des quantités d'acceleration est nul car l'acceleration est centripète (selon $\vec{e_r}$)

En appliquant le principe fondamental en moment au point O et comme les actions à distance sont negligé on a : (en projection sur $\vec{e_z}$)

$$M + C = 0$$ ✓

Donc $C = -A\, 2\pi h$ ie $A = \frac{-C}{2\pi h}$

Donc comme $\sigma_{r\theta} = \frac{A}{r^2}$ on a $\boxed{\sigma_{r\theta} = \frac{-C}{2\pi h r^2}}$ ✓

L'écoulement est déclenché dès que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|\sigma^v\| = s_0$$

Or $\|\sigma^v\| = |\sigma_{r\theta}|\sqrt{2}$ car $\|\sigma\|^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ji}$

Donc si $\frac{+C_0}{\sqrt{2}\, 2\pi h r_0^2} = s_0$

Donc $\boxed{C_0 = s_0\, 2\sqrt{2}\, \pi h r_0^2}$

Q6

0,5 | 1,5 | et

Si $C > C_0$ alors $\|\sigma^v\| \leq \sqrt{2}\, s_0$

$$D = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\, s_0}{\|\sigma^v\|}\right)\sigma^v$$

Or $D_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v\right)$

et $\sigma_{r\theta} = 2\eta D_{r\theta}$ or $\sigma_{r\theta} = \frac{A}{r^2} = \frac{-C}{2\pi h r^2}$

On a donc $\eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v\right) = s_0 - \frac{C}{2\pi h r^2}$

Q7

2/3 et

D'après la Q6 on a bien

$$v'(r) - \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{\eta}\left(s_0 - \frac{C}{2\pi h r^2}\right) \quad (E)$$

On vérifie que $v^{(1)}(r) = \frac{a}{r} + b r \ln(r)$ est solution :

ie $-\frac{a}{r^2} + b\ln(r) + \frac{br}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{a}{r} + br\ln(r)\right) = b - 2\frac{a}{r^2}$

En prenant $\begin{cases} b = \frac{s_0}{\eta} \\ \text{ie } a = \frac{C}{\eta 4\pi h} \end{cases}$ et $2a = \frac{C}{2\pi h \eta}$

$v^{(1)}(r)$ est solution particulière

RIVOIRARD LUCAS

Test 3 MMC

P1 - Suite Q7

- La solution générale
  - la solution homogène de (E) est $v' - \frac{v}{r} = 0$

donc $v_{(r)}^{(0)} = A r$

Donc $v = \frac{Ar}{r} + \frac{a}{r} + br\ln r$ est solution de (E)

fournant la suite

Or condition limite $v(r=r_1) = 0^V$ donc

$\frac{A}{r_1} + \frac{a}{r_1} + br_1\ln(r_1) = 0$ ie $A = -a - b r_1^2 \ln(r_1)$

ie $A = -\frac{C}{\eta 4\pi h} - \frac{s_0}{\eta} r_1^2 \ln(r_1)$

Or $s_0 = \frac{C_0}{2\sqrt{2}\pi h r_0^2}$

Donc

$v = \frac{1}{r_1}\left(\frac{-C}{4\eta\pi h} - \frac{C_0}{\eta 2\sqrt{2}\pi h r_0^2} r_1^2\ln(r_1)\right) + \left(\frac{C}{4\pi\eta h}\right)\times\frac{1}{r} + \frac{C_0}{\eta 2\sqrt{2}\pi h r_0^2} r\ln(r)$

ie $\boxed{v = \frac{C}{4\eta\pi h}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{C_0}{\eta 2\sqrt{2}\pi h r_0^2}\left(r\ln(r) - r_1\ln(r_1)\right)}$

Q8 On a $\cancel{\omega = \frac{v}{2\pi r}}$ $v = r\omega$

0/1pt

Pour un fluide newtonien on aurait

$$W =$$

Q9

05/1.5pt pour effort

Théorème de l'energie cinetique :

$$P_e = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dv + \int_V \sigma . D \, dv$$

Question 10

0.5 /0.5 pt

On a d'après Q3 :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{1}{r} v^2(r)$$

Donc on a bien $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = c(r)$ ✓

Ce resultat se ramène au théorème de Bernoulli qui reste valable si on intègre sur une ligne de courant. et $\operatorname{div} \sigma^v = 0$

Problème 2 2/7

Q1 Equation de Lamé-Navier :

1/2 pt
$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \times \vec{u} + (\lambda + \mu)\, \vec{\text{grad}}(\text{div}\, \vec{u})$$

($\vec{b} = \vec{0}$ car matériau non pesant)

Or $\vec{u} = u(r)\,\vec{e_r}$ donc $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\Delta \times \vec{u} = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{u})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{u}))$$

$\text{div}\,\vec{u} = u' + \frac{2}{r} u'$ en sphérique et $\vec{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{u}) = \begin{bmatrix} u'' + \frac{1}{r}u'' + -\frac{1}{r^2}u' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \vec{0}\ \forall$

Donc u solution de

$u'' + \frac{2}{r}u'' - \frac{2}{r^2}u' = 0$ faisant la suite

Donc $u = \frac{A}{r^3} + Br$ donc

Or u est fini en $r \to \infty$ donc $B = 0$

Et $\sigma_{rr}(r = r_0) = p_0$ or

$\sigma_{rr} = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda\, \text{tr}\, \varepsilon$

Or $u = u(r)\,\vec{e_r}$ donc $\varepsilon = \begin{bmatrix} u' & * & * \\ & \frac{1}{r}u & * \\ & & \frac{1}{r}u \end{bmatrix}$

Donc $\sigma_{rr} = 2\mu u' + \lambda\left(u' + \frac{2}{r}u\right)$

Donc $\sigma_{rr}(r = r_0) = p_0 = 2\mu \cdot -\frac{A}{r_0}$

Donc $A = \frac{p_0 r_0}{2\mu}$ ie $\boxed{u = \frac{p_0 r_0}{2\mu r^2}}$

Q2
Cette solution reste valable tant que

Tresca $\max_{i,j}(|\sigma_i - \sigma_j|) \leq \sigma_0$

0.5/1

pour effort

Q3 On a $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ & & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$

0/2

L'équation indéfini du mouvement selon $\vec{e_r}$ donne

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) = 0$$

condition limite $\sigma_{rr}(r=r_0) = p_0$

Tresca : $\max(|\sigma_i - \sigma_j|) < \sigma_0$

Or $\sigma_{rr}(r=r_1) =$

$\sigma =$

RIVOIRARD LUCAS

P2 - Q6 Théorème de l'énergie potentielle

0.5/ 3pt

$$\Pi(u) = \int \sigma(u) : \varepsilon(u)\, dv - \int (\sigma(u) \cdot n)\, u\, ds - \int_V \rho \cancel{K} u\, dv - \int g\, u\, ds$$

On suppose $u = \frac{\alpha}{r^2}$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ & \frac{1}{r}u & 0 \\ & & \frac{1}{r}u \end{bmatrix} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 2\mu u' & 0 & 0 \\ & 2\mu \frac{1}{r} u & 0 \\ & & 2\mu \frac{1}{r} u \end{bmatrix}$$

ie $\int \sigma : \varepsilon\, dv = \int 2\mu (u')^2 + 4\mu \frac{1}{r^2} u^2\, dv$ or $u = \frac{\alpha}{r^2}$

Donc $\int 2\mu \left(\frac{-2}{r^3}\right)^2 + 4\mu \frac{\alpha^2}{r^6}\, dv =$

$\int \sigma(u) \cdot n$