E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Probabilités et statistiques (1ère année)
Premier devoir surveillé

vendredi 15 mars 2013

Documents autorisés : *Une feuille de notes recto-verso au format A4.*
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.

Premier exercice : dénombrement d'applications

Soient m et n deux entiers naturels non nuls, soit E un ensemble de cardinal m et soit F un ensemble de cardinal n. L'univers $\Omega = F^E$ des applications de E dans F, de cardinal n^m, est muni de la probabilité uniforme P. On choisit alors au hasard une application f dans Ω.

1. On désigne par $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les éléments de l'ensemble F et, pour tout entier i compris entre 1 et n, par A_i l'évènement « l'élément y_i de F n'a aucun antécédent par f ». Calculer la probabilité de cet évènement.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et n, soit F_k une partie de F à k éléments et soit B_k l'évènement « aucun élément de F_k n'a d'antécédent par f ». Calculer la probabilité de cet évènement.
3. Quelle est la probabilité que f soit surjective ? **Indication** On considèrera l'évènement contraire et l'on tirera parti de la formule du crible de Poincaré :
$$P\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$
4. En considérant le cas $m = n$, prouver que
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$
5. On suppose à nouveau, dans tout ce qui suit, que m et n sont deux entiers naturels non nuls quelconques. Pour tout entier i compris entre 1 et n, soit alors X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'élément y_i de F n'a aucun antécédent par f et à 0 dans le cas contraire. Calculer l'espérance de X_i.
6. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$ et égale à k si exactement k éléments de F n'ont aucun antécédent par f. Prouver que
$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
puis, sans chercher à déterminer la loi de X, calculer son espérance.

Deuxième exercice : fiabilité d'un test médical

Dans une population animale, une maladie touche un individu sur mille. Un test de dépistage de cette maladie est tel qu'un animal malade réagit positivement au test avec une probabilité égale à 0.99 et qu'un animal sain réagit négativement à ce test avec la même probabilité. On désigne par M l'évènement « être malade » et par T l'évènement « réagir positivement au test ».

1 — 1. Quelle est la probabilité qu'un animal réagisse négativement au test, puis celle qu'un animal ayant réagi négativement au test soit sain ?

2 — 2. Quelle est, cette fois, la probabilité qu'un animal ayant réagi positivement au test soit malade ? Selon vous, ce test est-il fiable ?

Troisième exercice : les explorateurs inconscients

Le nombre d'explorateurs mordus chaque année par des piranhas est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Un explorateur mordu voit alors sa blessure s'infecter et meurt avec une probabilité p. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre d'explorateurs morts chaque année des suites d'une morsure de piranha.

1 — 1. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de Y sachant $\{X = n\}$?

3 — 2. Déterminer la loi de Y.

Quatrième exercice : un couple de variables aléatoires absolument continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires absolument continues uniformément réparti sur le triangle ayant pour sommets, dans le plan euclidien, les points de coordonnées $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

2 — 1. Déterminer les densités des variables aléatoires X et Y puis calculer leur espérance.

1 — 2. Calculer $Cov(X, Y)$.

2 — 3. Soit $Z = \ln X$. Déterminer la densité de Z.

2 — 4. Soit n un entier naturel non nul. Calculer le moment d'ordre n de Z. **Indication** On rappelle que l'on a, pour tout entier naturel n

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{u}^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = n!$$

2 — 5. Soit $T = Y - X$. Déterminer la fonction de répartition de T puis sa densité et son espérance.