DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

20 JUIN 2001

EXERCICE 1 (barème : 5)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Peut-on appliquer la méthode du gradient conjugué pour résoudre numériquement ce système?
2) En partant des conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ calculer numériquement deux itérations de la méthode du gradient conjugué. On détaillera et on présentera soigneusement les différents calculs nécessaires, les résultats numériques seront donnés avec 6 décimales.
3) Conclure en justifiant.

EXERCICE 2 (barème : 3)

On considère un nombre réel $\alpha > 0$, une fonction $f \in C^0(]0,1[)$ et le problème : Trouver $u \in C^2(]0,1[)$ vérifiant l'équation :

$$-u''(x) + \alpha u(x) = f(x) \quad \text{dans} \quad]0,1[$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$u'(0) = -1 \quad \text{et} \quad u(1) = 0$$

1) Etablir la formulation variationnelle (PV) de ce problème
2) (PV) admet-il une solution et une seule?

EXERCICE 3 (barème : 3)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

où f est une fonction continue vérifiant une condition de Lipschitz sur la variable y.

Pour résoudre numériquement ce problème, on introduit un pas de temps constant h et on utilise le schéma :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2h}{3} f(y_i + h f(y_i, t_i), ti + h)$$

où y_i est l'approximation de $y(t_i)$.
1) Démontrer que ce schéma est convergent.
2) Calculer son ordre.

EXERCICE 4 (barème : 9)

On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = 1 + y(t) + y^2(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0$$

Pour résoudre numériquement ce problème, on utilise le schéma d'Euler implicite avec un pas de temps constant $h > 0$. On notera ici encore, y_i l'approximation de $y(t_i)$.
1) Ecrire ce schéma implicite et montrer que h ne peut pas dépasser une borne supérieure dont on donnera l'expression en fonction de y_i.
2) Calculer explicitement y_{i+1} en fonction de y_i et de h.
3) En utilisant la valeur $h = 0.1$ calculer y_2, y_5 et y_8 et comparer ces résultats aux valeurs exactes $y(0.2)$, $y(0.5)$ et $y(0.8)$.
4) Avec cette valeur du pas et ce schéma peut-on calculer l'approximation y_{10} de $y(1)$?

Wasnon
Sébastien

(1)

20/00 1.3

13/20

Analyse numerique.

exercice 1.

q) 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. A est une matrice reelle; symetrique et définie positive.
On a l'equation $Ax = b$ avec x solution du système linéaire.
A admet 3 valeurs propres distinctes MAIS ?
donc la méthode du gradient conjugué est applicable et elle converge en 3 iterations vers la solution de $Ax = b$..

0,5

2. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ $\quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

(2)

$$\rightarrow \quad r_0 = A X_0 - b = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad d_0 = -r_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{\|r_0\|^2}{(d_0 : A d_0)} = \frac{14}{44} = \frac{7}{22} \simeq 0{,}318182$$

$$\rightarrow \quad X_1 = X_0 + \alpha_0 d_0$$

$$X_1 = \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0{,}636364 \\ 0{,}318182 \\ 0{,}954545 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad r_1 = r_0 + \alpha_0 A d_0$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \cancel{0{,}272727}\ 0{,}318182 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} -0{,}727273 \\ 0{,}909909 \\ 0{,}181818 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \beta_0 = \frac{\|r_1\|^2}{\|r_0\|^2} \simeq \cancel{0{,}093270}\ 0{,}099174$$

$$\rightarrow \quad d_1 = -r_1 + \beta_0 d_0$$

$$\cancel{d_1 = \begin{pmatrix} 1{,}095632 \\ -0{,}543092 \\ 0{,}552540 \end{pmatrix}} \qquad d_1 \simeq \begin{pmatrix} 0{,}925620 \\ -0{,}809917 \\ 0{,}115702 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad \alpha_1 = \dfrac{\|r_1\|^2}{(d_1 : Ad_1)} = 0{,}392857$

$\rightarrow \quad X_2 = X_1 + \alpha_1 d_1 .$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}999999 \simeq 1{,}000\,000 \\ 5{,}681\,817 \cdot 10^{-8} \simeq 0{,}000\,001 \\ 0{,}999999 \simeq 1{,}000\,000 \end{pmatrix}$$

2

3. On remarque que la methode converge vers $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est solution du système. le resultat montre bien que l'on a 3 valeurs propres.

10

W. >

④

exercice 2.

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) = f(x) & \text{dans }]0;1[\\ u'(0) = -1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

1. $-u'' + \alpha u = f \quad \forall x \in]0;1[$

$-u''(x)\,v(x) + \alpha u(x)\,v(x) = f(x)\,v(x) \quad \forall v \in H^1(]$

car

$u \in \mathcal{C}^2(]0;1[) \Rightarrow u \in H^2(]0;1[)$.

* On utilise la formule de Green. et on obtient :

$$-[u'v]_0^1 + \int_0^1 (\alpha u(x)v(x) + u'(x)v'(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

* $u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = -v(0) - u'(1)v(1)$

$u \in H^2(]0;1[) \Rightarrow u' \in H^1(]0;1[)$

$u' \in V = \{ f \in H^1(]0;1[) \,/\, f(1) = 0 \}$

$\Rightarrow v \in V$

$\Rightarrow [u'v]_0^1 = -v(0)$ oui

Nouvelle formulation.

Trouver $u \in V \,/\, a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$.

exercice 3. ⑤

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2h}{3} f(y_i + h f(y_i, t_i), t_i + h)$$

1.- . consistance :

$$\Phi(y_i, t_i, h_i) = \frac{1}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2}{3} f(y_i + h f(y_i, t_i), t_i + h)$$

$$\Phi(y_i, t_i, 0) = \frac{1}{3} f(y_i, t_i) + \frac{2}{3} f(y_i, t_i) = f(y_i, t_i)$$

d'où le schéma est consistant

. stabilité :

$$\|\Phi(y,t,h) - \Phi(z,t,h)\| = \Big\| \frac{1}{3} f(y,t) + \frac{2}{3} f(y + h f(y,t), t+h) - \frac{1}{3} f(z,t) + \frac{2}{3} f(z + h f(z,t), t+h) \Big\|$$

or f vérifie une condition de Lipschitz sur y.

$$\|\Phi(y,t,h) - \Phi(z,t,h)\| \le \frac{1}{3} \|f(y,t) - f(z,t)\| + \frac{2}{3} \|f(\underbrace{y + h f(y,t)}_{c_1}, t+h) - f(\underbrace{z + h f(z,t)}_{c_2}, t+h)\|$$

$$\le \frac{1}{3} M \|y - z\| + \frac{2}{3} M' \|y + h f(y,t) - (z + h f(z,t))\|$$

$$\le \frac{1}{3} M \|y - z\| + \frac{2}{3} M' (\|y - z\| + h \|f(y,t) - f(z,t)\|)$$

$$\le \left(\frac{1}{3} M + \frac{2}{3} M' (1 + h M'') \right) \|y - z\|$$

d'où la stabilité

⑥

donc comme un Shema explicite a 1 pas stable et consistant est convergent.

on a bien un shema convergent.

2. ordre de ce shema.

$$\Phi(y,t,h) = \frac{1}{3} f(y,t) + \frac{2}{3} f(y + h f(y,t), t+h)$$

$$= \frac{1}{3} f(y,t) + \frac{2}{3}\left[f(y,t) + h \frac{\partial f}{\partial t}(y,t) + h f(y,t) \frac{\partial f}{\partial y}(y,t) + \dots \right]$$

$$= f(y,t) + \frac{2h}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y,t) + f(y,t) \frac{\partial f}{\partial y}(y,t) + O(h^2) \right)$$

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) - y(t) + O(h^3)}{h}$$

$$= y'(t) + \frac{h}{2} y''(t) + O(h^2)$$

$$y'(t) = f(y,t)$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(y,t) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(y,t)$$

$$\Rightarrow \left| \left(-\frac{2}{3} h + \frac{h}{2} \right) y''(t) \right| = \left| \frac{1}{6} h\, y''(t) \right|$$

d'où

on a un shema d'ordre 2.

0

ordre 1

W.> <u>exercice 4.</u>

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) + y^2(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. $y_{i+1} = y_i + h(1 + y_{i+1}^2 + y_{i+1})$

$h\, y_{i+1}^2 + (h-1)\, y_{i+1} + y_i + h = 0$

1

$\Delta = (h-1)^2 - 4h(y_i + h)$

$\Delta = h^2 + 1 - 2h - 4h^2 - 4hy_i$

$\Delta = -3h^2 - 2h + 1 - 4hy_i$

$\Delta = h(-3h - 2 - 4y_i) + 1$

$\Delta > 0 \Rightarrow -3h^2 - (2+4y_i)h + 1 > 0$ (*)

* $\Delta_2 = (2+4y_i)^2 + 4 \times 3 = 12 + (2+4y_i)^2$

$\Delta_2 > 0$

$\Rightarrow h_1 = \frac{-(2+4y_i) + \sqrt{12 + (2+4y_i)^2}}{6}$

$h_2 = \frac{-(2+4y_i) + \sqrt{12 + (2+4y_i)^2}}{6}$

or $h > 0$ donc unique solution h_2
équation (*) vérifié si
$h < h_2$

<u>d'où</u>

2

h ne peut pas dépasser la borne

$h = \frac{-(2+4y_i) + \sqrt{12 + (2+4y_i)^2}}{6}$

2. On a alors $\Delta > 0$

<u>donc</u>

$$(y_{i+1})_{1,2} = \frac{-(h-1) \mp \sqrt{(h-1)^2 - 4h(y_i + h)}}{2h}$$

<u>d'où</u> comme on doit avoir quand $h \to 0$ $y_{i+1} \to y_i$,

on a en faisant un developpement limité

$$(y_{i+1})_{1,2} = \frac{-(h-1) \pm \left(1 - \frac{3}{2}h^2 - h - 2h y_i + o(h^2)\right)}{2h}$$

Pour que l'on ait la condition souhaitée, il faut que y_{i+1} egal :

$$y_{i+1} = \frac{-(h-1) - \sqrt{(h-1)^2 - 4h(y_i + h)}}{2h}$$

3/ $h = 0,1$

$y_1 = 0,11152$ [illegible]

[illegible]