

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Probabilités (1^{ère} année)
second devoir surveillé

vendredi 31 mai 2013

Documents autorisés : *Deux feuilles de notes recto-verso au format A4.*
Les dispositifs électroniques autres qu'une simple calculatrice ne sont pas autorisés.

Premier exercice : l'albinisme chez l'homme

On sait qu'à la naissance un être humain sur 20000 est atteint d'albinisme. Combien de naissances faut-il observer pour que la probabilité de rencontrer plus de 10 cas de cette maladie soit supérieure à 0,95 ?

Deuxième exercice : l'obésité aux États-Unis d'Amérique

On sait que la proportion p d'étasuniens atteints d'obésité est comprise entre 0,3 et 0,35. Un institut médical souhaite préciser cet encadrement. Quelle doit alors être la taille minimale d'échantillon à considérer si l'on veut que la fréquence observée d'individus obèses s'écarte de p de moins de 1% avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. En utilisant l'inégalité de Hoeffding.
3. En utilisant le théorème de la limite centrée.

Troisième exercice : l'établissement avicole

Dans un établissement avicole bressan l'on dénombre 1000 volailles réparties en 600 poulets et 400 poulardes. On choisit, au hasard et sans remise, 100 de ces volatiles. Quelle est la probabilité d'avoir plus de 70 poulets ?

Quatrième exercice : un couple de variables aléatoires absolument continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires absolument continues est uniformément réparti sur le quart de disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Déterminer les densités des variables aléatoires X et Y puis calculer leur espérance et leur variance. **Indication** On pensera, pour le calcul de EX^2 , à faire le changement de variable $x = \sin t$
2. Calculer $Cov(X, Y)$.
3. Soit $T = \frac{Y}{X}$. Déterminer la densité de T . Que peut-on dire de son espérance, de sa variance ?

Fonction de répartition de la loi de Poisson

La valeur de la fonction de répartition en n lorsque le paramètre est λ est à l'intersection de la ligne n est de la colonne λ .

| $n \backslash \lambda$ | 15,5 | 16 | 16,5 | 17 | 17,5 | 18 | 18,5 | 19 | 19,5 | 20 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 0,0020 | 0,0014 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| 6 | 0,0055 | 0,0040 | 0,0029 | 0,0021 | 0,0015 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0003 |
| 7 | 0,0135 | 0,0100 | 0,0074 | 0,0054 | 0,0040 | 0,0029 | 0,0021 | 0,0015 | 0,0011 | 0,0008 |
| 8 | 0,0288 | 0,0220 | 0,0167 | 0,0126 | 0,0095 | 0,0071 | 0,0052 | 0,0039 | 0,0028 | 0,0021 |
| 9 | 0,0552 | 0,0433 | 0,0337 | 0,0261 | 0,0201 | 0,0154 | 0,0117 | 0,0089 | 0,0067 | 0,0050 |
| 10 | 0,0961 | 0,0774 | 0,0619 | 0,0491 | 0,0387 | 0,0304 | 0,0237 | 0,0183 | 0,0141 | 0,0108 |
| 11 | 0,1538 | 0,1270 | 0,1041 | 0,0847 | 0,0684 | 0,0549 | 0,0438 | 0,0347 | 0,0273 | 0,0214 |
| 12 | 0,2283 | 0,1931 | 0,1621 | 0,1350 | 0,1116 | 0,0917 | 0,0748 | 0,0606 | 0,0488 | 0,0390 |
| 13 | 0,3171 | 0,2745 | 0,2357 | 0,2009 | 0,1699 | 0,1426 | 0,1189 | 0,0984 | 0,0809 | 0,0661 |
| 14 | 0,4154 | 0,3675 | 0,3225 | 0,2808 | 0,2426 | 0,2081 | 0,1771 | 0,1497 | 0,1257 | 0,1049 |
| 15 | 0,5170 | 0,4667 | 0,4180 | 0,3715 | 0,3275 | 0,2867 | 0,2490 | 0,2148 | 0,1840 | 0,1565 |
| 16 | 0,6154 | 0,5660 | 0,5165 | 0,4677 | 0,4204 | 0,3751 | 0,3321 | 0,2920 | 0,2550 | 0,2211 |
| 17 | 0,7052 | 0,6593 | 0,6120 | 0,5640 | 0,5160 | 0,4686 | 0,4226 | 0,3784 | 0,3364 | 0,2970 |
| 18 | 0,7825 | 0,7423 | 0,6996 | 0,6550 | 0,6089 | 0,5622 | 0,5156 | 0,4695 | 0,4246 | 0,3814 |
| 19 | 0,8455 | 0,8122 | 0,7757 | 0,7363 | 0,6945 | 0,6509 | 0,6061 | 0,5606 | 0,5151 | 0,4703 |
| 20 | 0,8944 | 0,8682 | 0,8385 | 0,8055 | 0,7694 | 0,7307 | 0,6898 | 0,6472 | 0,6034 | 0,5591 |
| 21 | 0,9304 | 0,9108 | 0,8878 | 0,8615 | 0,8319 | 0,7991 | 0,7636 | 0,7255 | 0,6854 | 0,6437 |
| 22 | 0,9558 | 0,9418 | 0,9248 | 0,9047 | 0,8815 | 0,8551 | 0,8256 | 0,7931 | 0,7580 | 0,7206 |
| 23 | 0,9730 | 0,9633 | 0,9513 | 0,9367 | 0,9193 | 0,8989 | 0,8755 | 0,8490 | 0,8196 | 0,7875 |
| 24 | 0,9840 | 0,9777 | 0,9696 | 0,9594 | 0,9468 | 0,9317 | 0,9139 | 0,8933 | 0,8697 | 0,8432 |
| 25 | 0,9909 | 0,9869 | 0,9816 | 0,9748 | 0,9661 | 0,9554 | 0,9424 | 0,9269 | 0,9087 | 0,8878 |
| 26 | 0,9950 | 0,9925 | 0,9892 | 0,9848 | 0,9791 | 0,9718 | 0,9626 | 0,9514 | 0,9380 | 0,9221 |
| 27 | 0,9973 | 0,9959 | 0,9939 | 0,9912 | 0,9875 | 0,9827 | 0,9765 | 0,9687 | 0,9591 | 0,9475 |
| 28 | 0,9986 | 0,9978 | 0,9967 | 0,9950 | 0,9928 | 0,9897 | 0,9857 | 0,9805 | 0,9739 | 0,9657 |
| 29 | 0,9993 | 0,9989 | 0,9982 | 0,9973 | 0,9959 | 0,9941 | 0,9915 | 0,9882 | 0,9838 | 0,9782 |
| 30 | 0,9997 | 0,9994 | 0,9991 | 0,9986 | 0,9978 | 0,9967 | 0,9951 | 0,9930 | 0,9902 | 0,9865 |
| 31 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9993 | 0,9988 | 0,9982 | 0,9973 | 0,9960 | 0,9943 | 0,9919 |
| 32 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9994 | 0,9990 | 0,9985 | 0,9978 | 0,9967 | 0,9953 |
| 33 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9992 | 0,9988 | 0,9982 | 0,9973 |
| 34 | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9994 | 0,9990 | 0,9985 |
| 35 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9992 |
| 36 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9996 |
| 37 | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 |
| 38 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 |
| 39 | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 |
| 40 | | | | | | | | | | 1,0000 |

Fonction de répartition Φ de la loi normale standard.

La valeur de x est la somme des premières valeurs d'une ligne et d'une colonne et la valeur de $\Phi(x)$ est à l'intersection de la ligne et de la colonne.

Pour $x \leq 0$, utiliser $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

| x | 0 | 0,005 | 0,01 | 0,015 | 0,02 | 0,025 | 0,03 | 0,035 | 0,04 | 0,045 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,5000 | 0,5020 | 0,5040 | 0,5060 | 0,5080 | 0,5100 | 0,5120 | 0,5140 | 0,5160 | 0,5179 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5418 | 0,5438 | 0,5458 | 0,5478 | 0,5497 | 0,5517 | 0,5537 | 0,5557 | 0,5576 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5812 | 0,5832 | 0,5851 | 0,5871 | 0,5890 | 0,5910 | 0,5929 | 0,5948 | 0,5968 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6198 | 0,6217 | 0,6236 | 0,6255 | 0,6274 | 0,6293 | 0,6312 | 0,6331 | 0,6350 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6573 | 0,6591 | 0,6609 | 0,6628 | 0,6646 | 0,6664 | 0,6682 | 0,6700 | 0,6718 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6932 | 0,6950 | 0,6967 | 0,6985 | 0,7002 | 0,7019 | 0,7037 | 0,7054 | 0,7071 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7274 | 0,7291 | 0,7307 | 0,7324 | 0,7340 | 0,7357 | 0,7373 | 0,7389 | 0,7405 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7596 | 0,7611 | 0,7627 | 0,7642 | 0,7658 | 0,7673 | 0,7688 | 0,7704 | 0,7719 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7896 | 0,7910 | 0,7925 | 0,7939 | 0,7953 | 0,7967 | 0,7981 | 0,7995 | 0,8009 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8173 | 0,8186 | 0,8199 | 0,8212 | 0,8225 | 0,8238 | 0,8251 | 0,8264 | 0,8277 |
| 1 | 0,8413 | 0,8426 | 0,8438 | 0,8449 | 0,8461 | 0,8473 | 0,8485 | 0,8497 | 0,8508 | 0,8520 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8654 | 0,8665 | 0,8676 | 0,8686 | 0,8697 | 0,8708 | 0,8718 | 0,8729 | 0,8739 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8859 | 0,8869 | 0,8878 | 0,8888 | 0,8897 | 0,8907 | 0,8916 | 0,8925 | 0,8934 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9041 | 0,9049 | 0,9057 | 0,9066 | 0,9074 | 0,9082 | 0,9091 | 0,9099 | 0,9107 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9200 | 0,9207 | 0,9215 | 0,9222 | 0,9229 | 0,9236 | 0,9244 | 0,9251 | 0,9258 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9338 | 0,9345 | 0,9351 | 0,9357 | 0,9364 | 0,9370 | 0,9376 | 0,9382 | 0,9388 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9458 | 0,9463 | 0,9468 | 0,9474 | 0,9479 | 0,9484 | 0,9490 | 0,9495 | 0,9500 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9559 | 0,9564 | 0,9568 | 0,9573 | 0,9577 | 0,9582 | 0,9586 | 0,9591 | 0,9595 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9645 | 0,9649 | 0,9652 | 0,9656 | 0,9660 | 0,9664 | 0,9667 | 0,9671 | 0,9675 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9716 | 0,9719 | 0,9723 | 0,9726 | 0,9729 | 0,9732 | 0,9735 | 0,9738 | 0,9741 |
| 2 | 0,9772 | 0,9775 | 0,9778 | 0,9780 | 0,9783 | 0,9786 | 0,9788 | 0,9791 | 0,9793 | 0,9796 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9824 | 0,9826 | 0,9828 | 0,9830 | 0,9832 | 0,9834 | 0,9836 | 0,9838 | 0,9840 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9863 | 0,9864 | 0,9866 | 0,9868 | 0,9870 | 0,9871 | 0,9873 | 0,9875 | 0,9876 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9894 | 0,9896 | 0,9897 | 0,9898 | 0,9900 | 0,9901 | 0,9902 | 0,9904 | 0,9905 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9919 | 0,9920 | 0,9921 | 0,9922 | 0,9923 | 0,9925 | 0,9926 | 0,9927 | 0,9928 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9939 | 0,9940 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9942 | 0,9943 | 0,9944 | 0,9945 | 0,9945 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9954 | 0,9955 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9957 | 0,9958 | 0,9959 | 0,9959 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9969 | 0,9970 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9983 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 |
| 3 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9988 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Pour $x \geq 3,6$ et une approximation jusqu'à 10^{-7} près, on pourra utiliser la relation suivante :

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^6} + \frac{105}{x^8}\right).$$

Fractiles u_α de la loi normale standard.

La valeur de α est la somme des premières valeurs d'une ligne et d'une colonne et la valeur de u_α est à l'intersection de la ligne et de la colonne.
 Pour $\alpha \leq 0,5$ utiliser $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.

| α | 0 | 0,001 | 0,002 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,008 | 0,009 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,75 | 0,6745 | 0,6776 | 0,6808 | 0,6840 | 0,6871 | 0,6903 | 0,6935 | 0,6967 | 0,6999 | 0,7031 |
| 0,76 | 0,7063 | 0,7095 | 0,7128 | 0,7160 | 0,7192 | 0,7225 | 0,7257 | 0,7290 | 0,7323 | 0,7356 |
| 0,77 | 0,7388 | 0,7421 | 0,7454 | 0,7488 | 0,7521 | 0,7554 | 0,7588 | 0,7621 | 0,7655 | 0,7688 |
| 0,78 | 0,7722 | 0,7756 | 0,7790 | 0,7824 | 0,7858 | 0,7892 | 0,7926 | 0,7961 | 0,7995 | 0,8030 |
| 0,79 | 0,8064 | 0,8099 | 0,8134 | 0,8169 | 0,8204 | 0,8239 | 0,8274 | 0,8310 | 0,8345 | 0,8381 |
| 0,8 | 0,8416 | 0,8452 | 0,8488 | 0,8524 | 0,8560 | 0,8596 | 0,8632 | 0,8669 | 0,8705 | 0,8742 |
| 0,81 | 0,8779 | 0,8816 | 0,8853 | 0,8890 | 0,8927 | 0,8965 | 0,9002 | 0,9040 | 0,9078 | 0,9116 |
| 0,82 | 0,9154 | 0,9192 | 0,9230 | 0,9269 | 0,9307 | 0,9346 | 0,9385 | 0,9424 | 0,9463 | 0,9502 |
| 0,83 | 0,9542 | 0,9581 | 0,9621 | 0,9661 | 0,9701 | 0,9741 | 0,9782 | 0,9822 | 0,9863 | 0,9904 |
| 0,84 | 0,9945 | 0,9986 | 1,0027 | 1,0069 | 1,0110 | 1,0152 | 1,0194 | 1,0237 | 1,0279 | 1,0322 |
| 0,85 | 1,0364 | 1,0407 | 1,0450 | 1,0494 | 1,0537 | 1,0581 | 1,0625 | 1,0669 | 1,0714 | 1,0758 |
| 0,86 | 1,0803 | 1,0848 | 1,0893 | 1,0939 | 1,0985 | 1,1031 | 1,1077 | 1,1123 | 1,1170 | 1,1217 |
| 0,87 | 1,1264 | 1,1311 | 1,1359 | 1,1407 | 1,1455 | 1,1503 | 1,1552 | 1,1601 | 1,1650 | 1,1700 |
| 0,88 | 1,1750 | 1,1800 | 1,1850 | 1,1901 | 1,1952 | 1,2004 | 1,2055 | 1,2107 | 1,2160 | 1,2212 |
| 0,89 | 1,2265 | 1,2319 | 1,2372 | 1,2426 | 1,2481 | 1,2536 | 1,2591 | 1,2646 | 1,2702 | 1,2759 |
| 0,9 | 1,2816 | 1,2873 | 1,2930 | 1,2988 | 1,3047 | 1,3106 | 1,3165 | 1,3225 | 1,3285 | 1,3346 |
| 0,91 | 1,3408 | 1,3469 | 1,3532 | 1,3595 | 1,3658 | 1,3722 | 1,3787 | 1,3852 | 1,3917 | 1,3984 |
| 0,92 | 1,4051 | 1,4118 | 1,4187 | 1,4255 | 1,4325 | 1,4395 | 1,4466 | 1,4538 | 1,4611 | 1,4684 |
| 0,93 | 1,4758 | 1,4833 | 1,4909 | 1,4985 | 1,5063 | 1,5141 | 1,5220 | 1,5301 | 1,5382 | 1,5464 |
| 0,94 | 1,5548 | 1,5632 | 1,5718 | 1,5805 | 1,5893 | 1,5982 | 1,6072 | 1,6164 | 1,6258 | 1,6352 |
| 0,95 | 1,6449 | 1,6546 | 1,6646 | 1,6747 | 1,6849 | 1,6954 | 1,7060 | 1,7169 | 1,7279 | 1,7392 |
| 0,96 | 1,7507 | 1,7624 | 1,7744 | 1,7866 | 1,7991 | 1,8119 | 1,8250 | 1,8384 | 1,8522 | 1,8663 |
| 0,97 | 1,8808 | 1,8957 | 1,9110 | 1,9268 | 1,9431 | 1,9600 | 1,9774 | 1,9954 | 2,0141 | 2,0335 |
| 0,98 | 2,0537 | 2,0749 | 2,0969 | 2,1201 | 2,1444 | 2,1701 | 2,1973 | 2,2262 | 2,2571 | 2,2904 |
| 0,99 | 2,3263 | 2,3656 | 2,4089 | 2,4573 | 2,5121 | 2,5758 | 2,6521 | 2,7478 | 2,8782 | 3,0903 |