ENTPE mars 2013

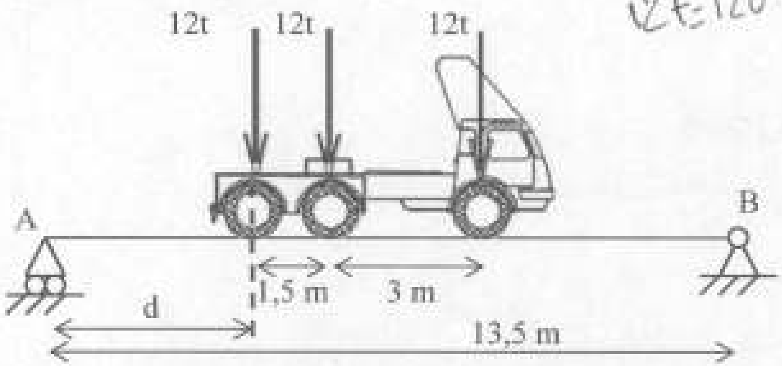
Résistance des matériaux – Test 1 sujet

Partie I :

Sollicitations et charges mobiles (8pts)

On étudie les sollicitations sur un pont de petite portée soumis à une charge roulante (définition fixe et position mobile paramétrée par d) :

12t=120 kN



Remarque : une masse de 1t correspond à un poids de 10 kN

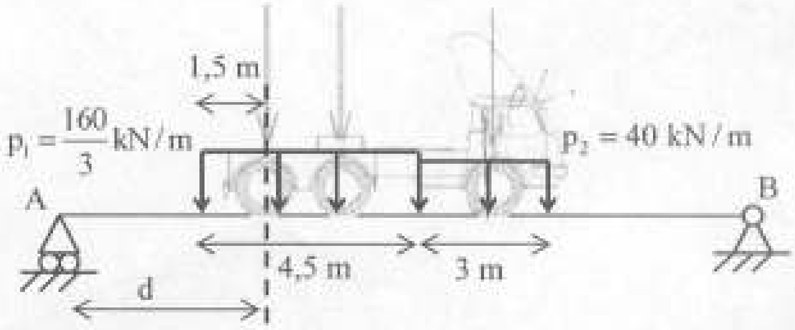
1. Montrer que le moment fléchissant est maximum toujours au droit d'un essieu.
2. Montrer qu'au droit d'une force, si l'effort tranchant change de signe : $V(x_0^-) \leq 0 \leq V(x_0^+)$, alors le moment fléchissant est maximum.
3. Calculer la réaction d'appui en A : R_A pour $d = 2,5$ m et pour $d = 7,0$ m
4. En déduire que pour une position telle que $2,5 \text{ m} < d < 7,0 \text{ m}$ le moment fléchissant est maximum sous le deuxième essieu
5. Quelle est la valeur du moment maximum si le deuxième essieu est au milieu de la travée
6. Quelle est la valeur du moment maximum si la résultante de la charge roulante est au milieu de la travée

Théorème de BARRE :

« Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupent des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre. »

7. Quelle est la position de la charge mobile pour avoir un moment maximum sous le deuxième essieu en application du théorème de BARRE
8. Quelle est la valeur du moment maximum correspondant

On modélise maintenant les actions par des forces réparties :



9. Montrer que ce cas de charge est globalement équivalent au précédent
10. Calculer la réaction d'appui en A : R_A pour $d = 2,5$ m et pour $d = 7,5$ m

11. En déduire que pour une position telle que $2{,}5\ \text{m} < d < 7{,}5\ \text{m}$ le moment fléchissant est maximum sous la charge répartie p_1

La suite du problème est étudiée pour $2{,}5\ \text{m} < d < 7{,}5\ \text{m}$

12. Déterminer l'expression de l'effort tranchant sous la charge répartie p_1 : $d - 1{,}5\ \text{m} < x < d + 3{,}0\ \text{m}$
13. Déterminer la position du moment maximum
14. En déduire en fonction de d le moment maximum
15. En déduire la valeur de d la plus préjudiciable mécaniquement pour la poutre
16. Calculer le moment maximum correspondant

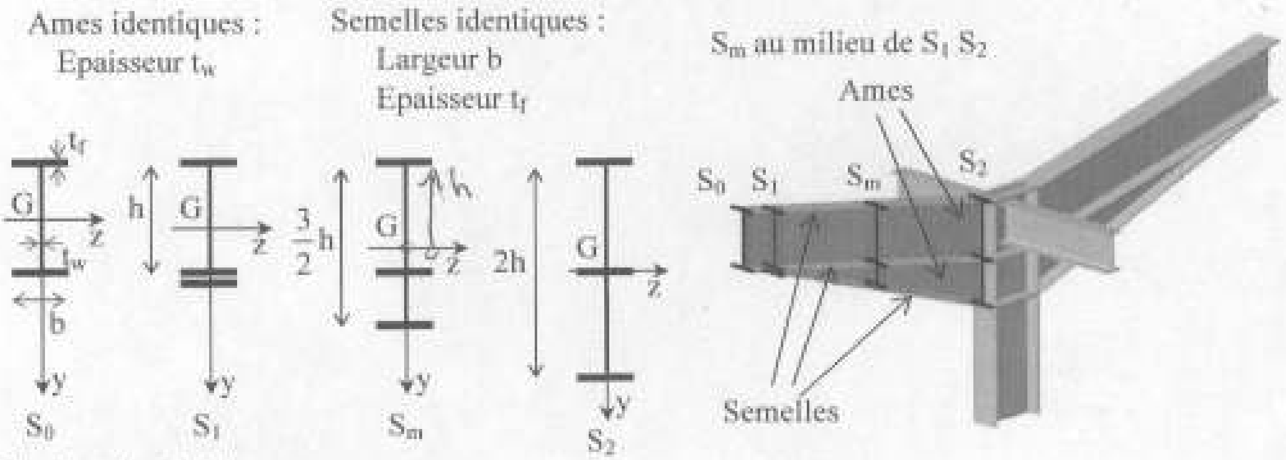
Tracés des sollicitations (5pts)

Tracer les sollicitations correspondantes au document réponse

Partie II :

Inerties Profils minces (7pts)

Pour augmenter les caractéristiques des sections droites en construction métallique, on peut souder un renfort :



En fonction de b,h,t_w et t_f :

1. Calculer $I_z(S_0)$ et $I_y(S_0)$
2. Calculer $I_z(S_2)$ et $I_y(S_2)$
3. Monter l'intérêt du renfort en prouvant que $I_z(S_2) > 4.I_z(S_0)$

Pour la suite, on prendra $b = \frac{h}{2}$, $t_f = 2e$ et $t_w = e$

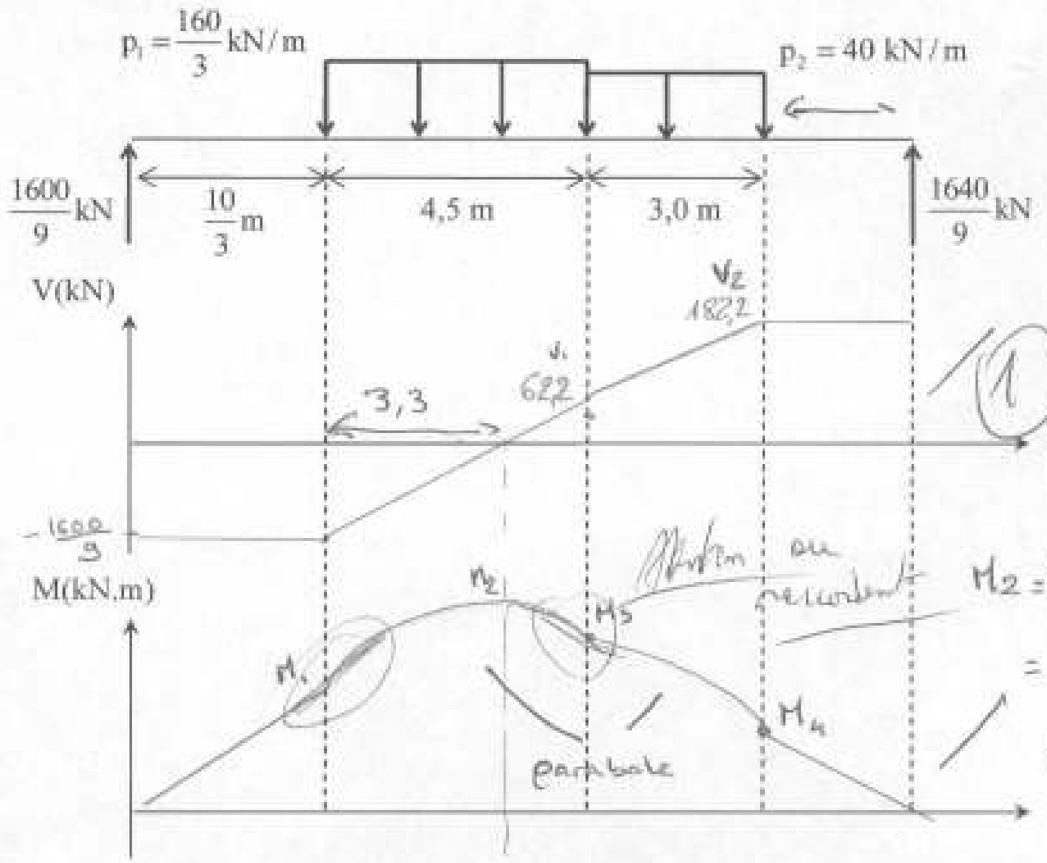
En fonction de h et e :

4. Déterminer la position du CdG de la section S_m
5. Calculer $I_z(S_m)$

On donne : $I_z(S_1) = \frac{37}{48} eh^3$

6. Prouver que la variation d'inertie le long du renfort I_z n'est pas linéaire (contrairement à l'aire)
7. Donner un exemple de poutre droite où l'aire et l'inertie I_z varient linéairement

Document Réponse : **Nom :** RIVOIRARD LUCAS **Gpe :** G2



$V_1 = -\frac{1600}{9} + 4.5 \times p_1$

$V_1 = 62,2$ kN

$V_2 = V_1 + 3 \times p_2$

$= 182,2$ kN

1

$M_1 = \frac{1600}{9} \times \frac{10}{3} = 592,6$ kN.m

$M_2 = M_1 + \left(3{,}3 \times \frac{1600}{9}\right)\frac{1}{2}$

$= 888,9$ kN.m

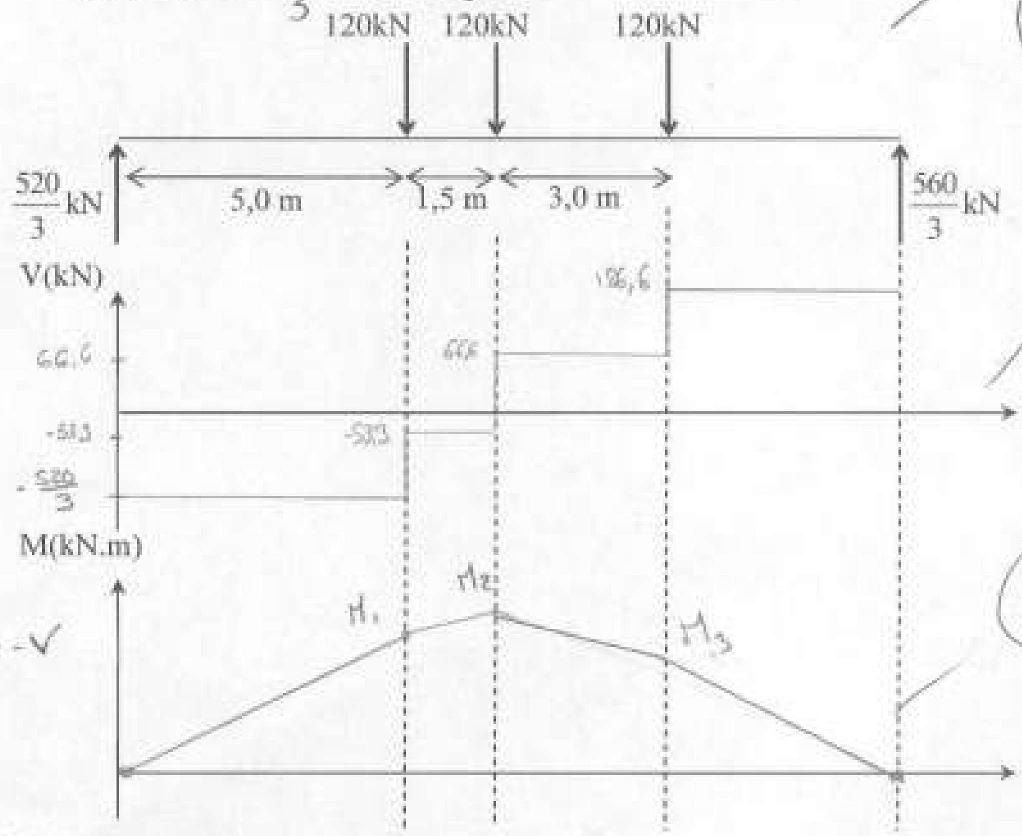
$M_3 = M_2 - (4.5 - 3.3) \times 62,2$

$= 814,3$ kN.m

$\frac{dM}{dx} = -V$

$M_4 = \left(13.5 - \frac{10}{3} - 4,5 - 3\right) \times 182,2 = 485,9$ kN.m

1,5



1

1,5

$\frac{dM}{dx} = -V$

$M_1 = \frac{520}{3} \times 5 = 866,7$ kN.m

$M_2 = M_1 + 53,3 \times 1.5 = 946,6$ kN.m

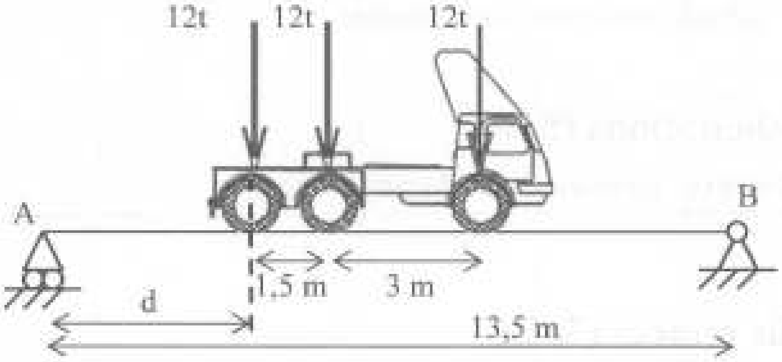
$M_3 = M_2 - 66,6 \times 3 = 746,8$ kN.m

Résistance des matériaux – Test 1 ***sujet***

Partie I :

Sollicitations et charges mobiles (8pts)

On étudie les sollicitations sur un pont de petite portée soumis à une charge roulante (définition fixe et position mobile paramétrée par d) :



Remarque : une masse de 1t correspond à un poids de 10 kN

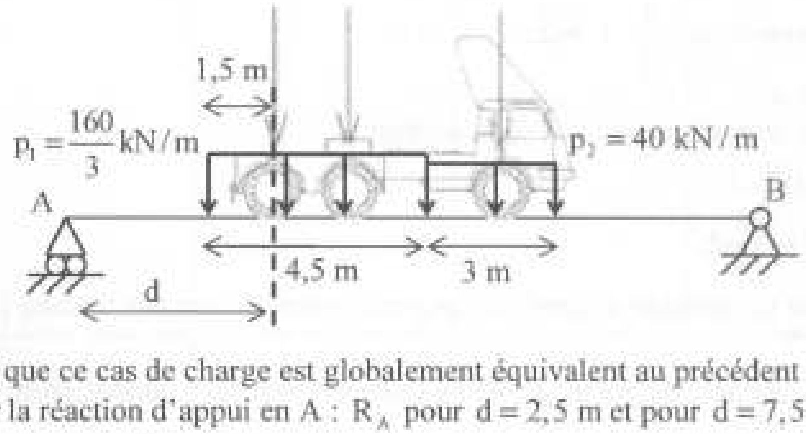
1. Montrer que le moment fléchissant est maximum toujours au droit d'un essieu.
2. Montrer qu'au droit d'une force, si l'effort tranchant change de signe : $V(x_0^-) \leq 0 \leq V(x_0^+)$, alors le moment fléchissant est maximum.
3. Calculer la réaction d'appui en A : R_A pour $d = 2{,}5$ m et pour $d = 7{,}0$ m
4. En déduire que pour une position telle que $2{,}5 \text{ m} < d < 7{,}0 \text{ m}$ le moment fléchissant est maximum sous le deuxième essieu
5. Quelle est la valeur du moment maximum si le deuxième essieu est au milieu de la travée
6. Quelle est la valeur du moment maximum si la résultante de la charge roulante est au milieu de la travée

Théorème de BARRE :

« Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupent des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre. »

7. Quelle est la position de la charge mobile pour avoir un moment maximum sous le deuxième essieu en application du théorème de BARRE
8. Quelle est la valeur du moment maximum correspondant

On modélise maintenant les actions par des forces réparties :



9. Montrer que ce cas de charge est globalement équivalent au précédent
10. Calculer la réaction d'appui en A : R_A pour $d = 2{,}5$ m et pour $d = 7{,}5$ m

11. En déduire que pour une position telle que $2{,}5\ \text{m} < d < 7{,}5\ \text{m}$ le moment fléchissant est maximum sous la charge répartie p_1

La suite du problème est étudiée pour $2{,}5\ \text{m} < d < 7{,}5\ \text{m}$

12. Déterminer l'expression de l'effort tranchant sous la charge répartie p_1 : $d - 1{,}5\ \text{m} < x < d + 3{,}0\ \text{m}$
13. Déterminer la position du moment maximum
14. En déduire en fonction de d le moment maximum
15. En déduire la valeur de d la plus préjudiciable mécaniquement pour la poutre
16. Calculer le moment maximum correspondant

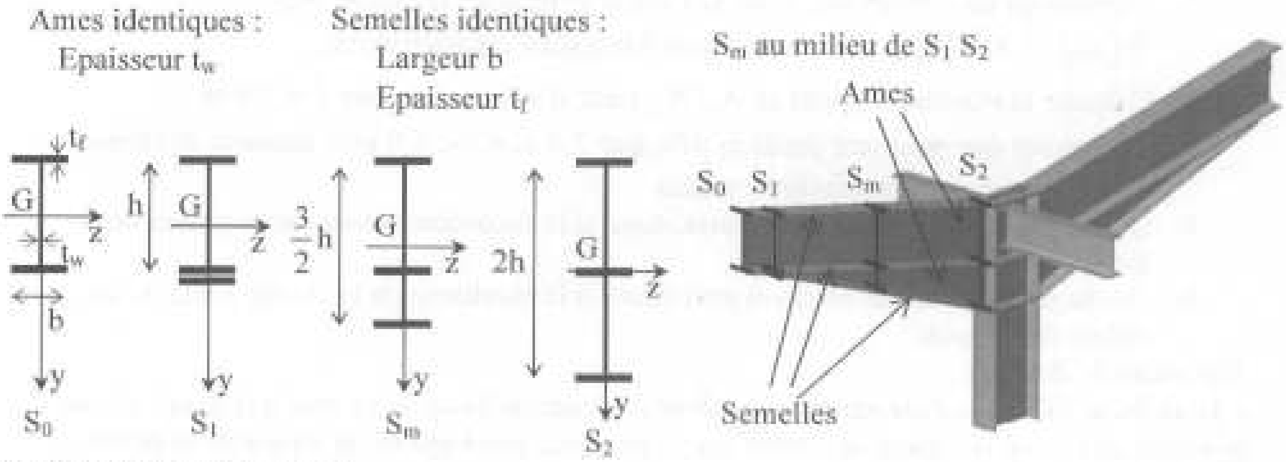
Tracés des sollicitations (5pts)

Tracer les sollicitations correspondantes au document réponse

Partie II :

Inerties Profils minces (7pts)

Pour augmenter les caractéristiques des sections droites en construction métallique, on peut souder un renfort :



En fonction de b,h,t_w et t_f :

1. Calculer $I_z(S_0)$ et $I_y(S_0)$
2. Calculer $I_z(S_2)$ et $I_y(S_2)$
3. Monter l'intérêt du renfort en prouvant que $I_z(S_2) > 4 I_z(S_0)$

Pour la suite, on prendra $b = \dfrac{h}{2}$, $t_f = 2e$ et $t_w = e$

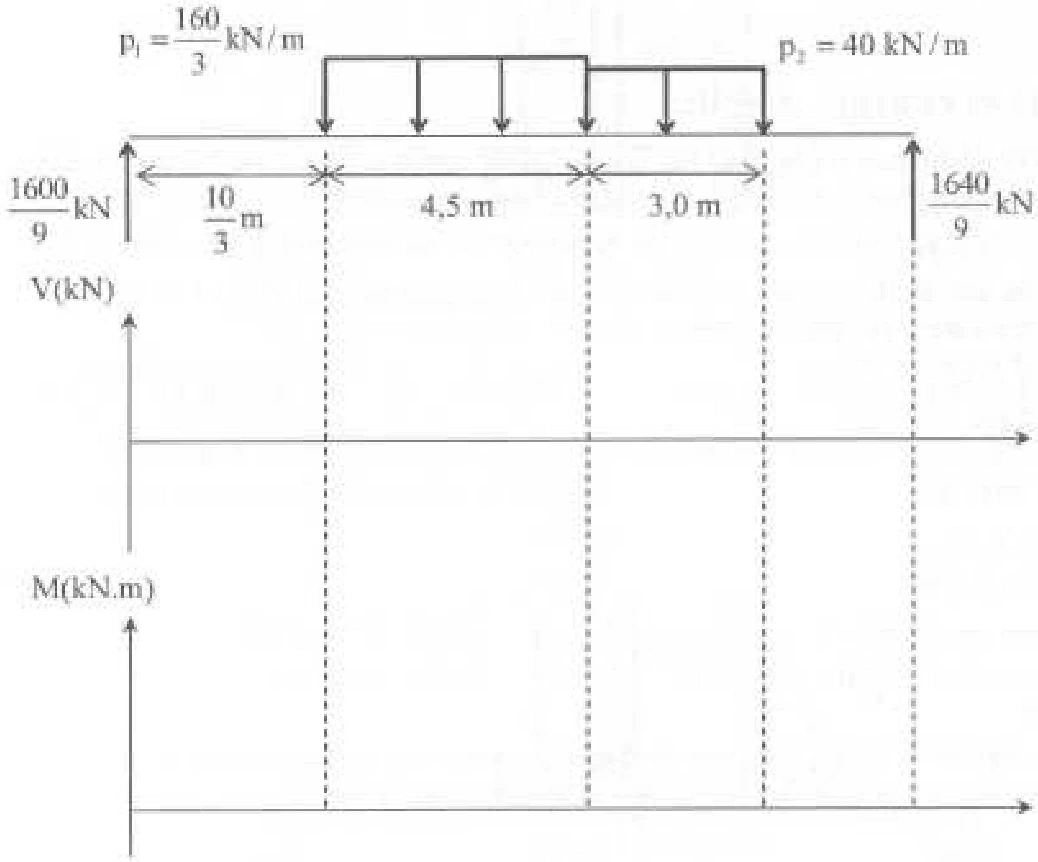
En fonction de h et e :

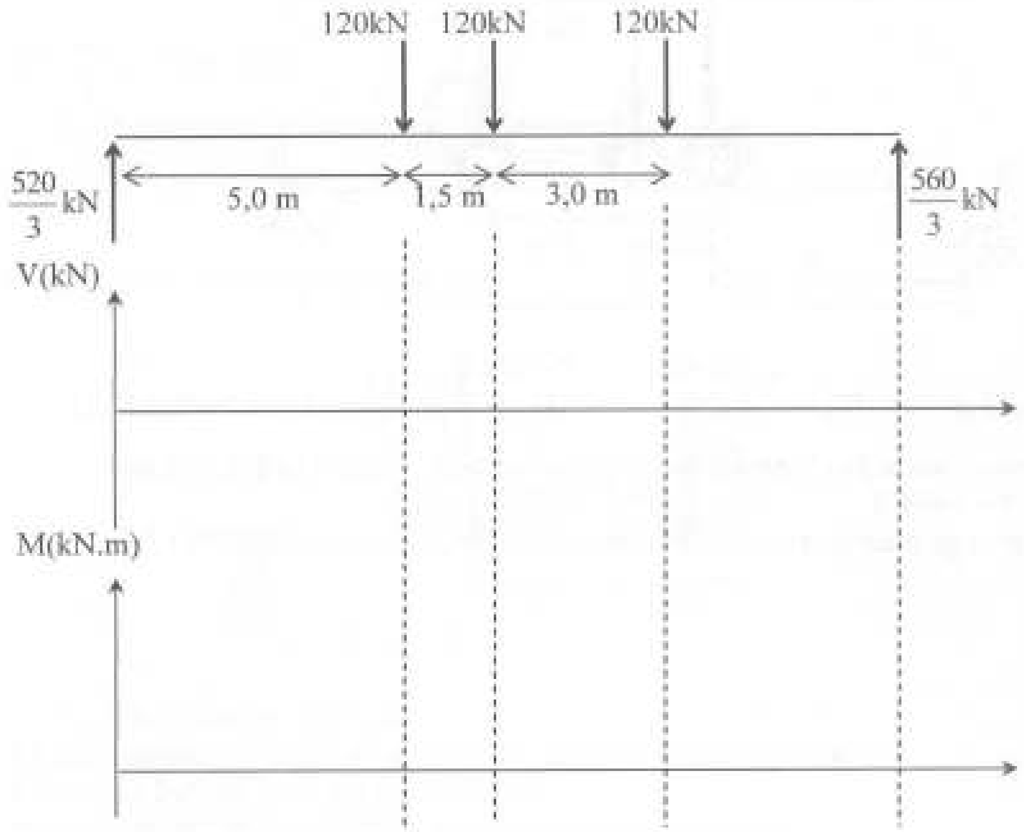
4. Déterminer la position du CdG de la section S_m
5. Calculer $I_z(S_m)$

On donne : $I_z(S_1) = \dfrac{37}{48} e h^3$

6. Prouver que la variation d'inertie le long du renfort I_z n'est pas linéaire (contrairement à l'aire)
7. Donner un exemple de poutre droite où l'aire et l'inertie I_z varient linéairement

Document Réponse : **Nom :** **Gpe :**





ENTPE mars 2013

Résistance des matériaux – Test 1 ***Corrigé***

Partie I

Sollicitations et charges mobiles

1. Le moment fléchissant est linéaire par intervalles et continu, il est donc maximum aux bornes des intervalles, c'est-à-dire au droit des forces ponctuelles.
2. $V(x_0^-) \leq 0 \leq V(x_0^+)$ avant x_0 le moment est une droite inclinée croissante, après x_0 le moment est une droite inclinée décroissante, sans couple ponctuel le moment est continu, le moment est donc maximum en x_0
3. Réaction d'appui en A :

$$R_A = 360\frac{11,5-d}{13,5}\,\text{kN}$$

$d = 2,5$ m $R_A = 240$ kN

$d = 7,0$ m $R_A = 120$ kN

4. $2,5\text{ m} < d < 7,0\text{ m}$

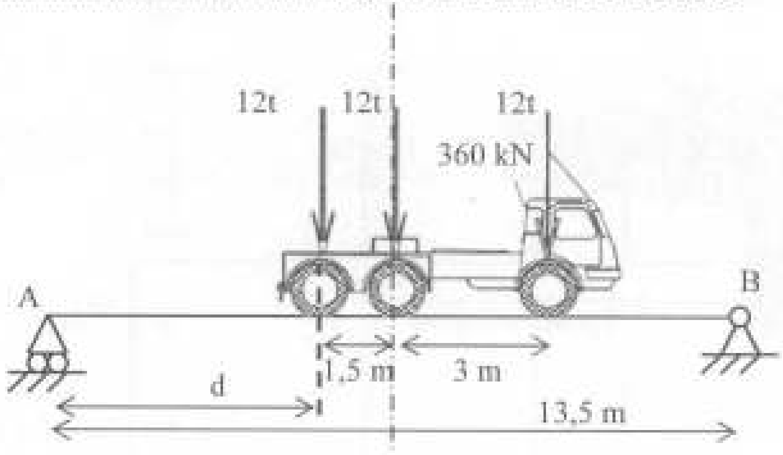
Sous le premier essieu : $-240 < V^- < -120$ kN $\quad -120 < V^+ < 0$ kN

Sous le deuxième essieu : $-120 < V^- < 0$ kN $\quad 0 < V^+ < 120$ kN

soit : $V^- < 0 < V^+$

Ce qui prouve le maximum de moment sous le deuxième essieu en application du 2

5. Moment maximum si le deuxième essieu est au milieu de la travée



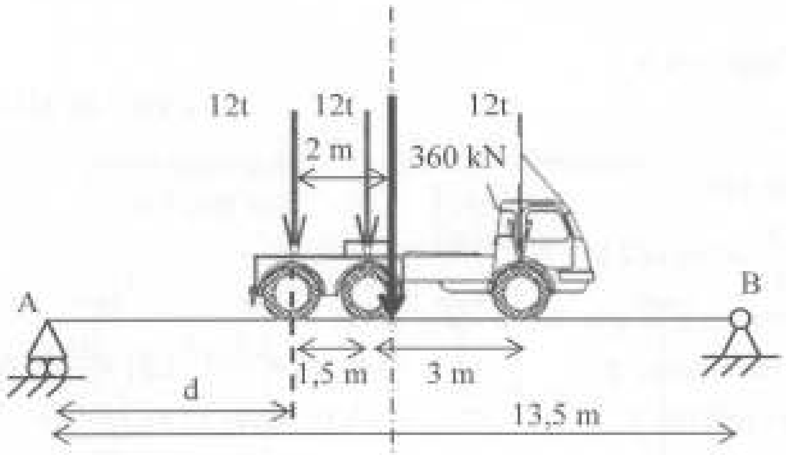
$$d = \frac{13,5}{2} - 1,5 = 5,25\text{ m} \qquad R_A = \frac{500}{3}\,\text{kN} \qquad M_{max} = \frac{500}{3}\frac{13,5}{2} - 120 \times 1,5 = 945\text{ kNm}$$

6. Moment maximum si la résultante de la charge roulante est au milieu de la travée

Résultante : $3 \times 120 = 360$ kN

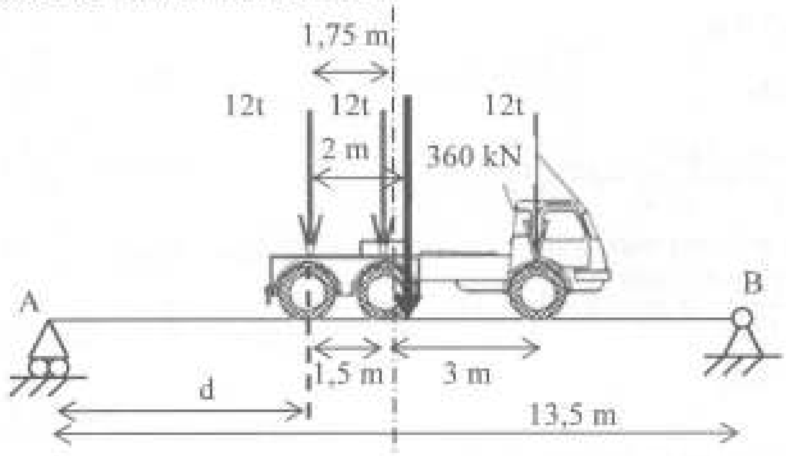
Position x par rapport au premier essieu : 360 kN x m = 120 kN 1,50 m + 120 kN 4,50 m

$x = 2,00$ m



$d = \frac{13,5}{2} - 2 = 4,75$ m $\qquad R_A = 180$ kN $\qquad M_{max} = 180.6,25 - 120 \times 1,5 = 945$ kNm

7. Position de la charge mobile pour avoir un moment maximum sous le deuxième essieu en application du théorème de BARRE

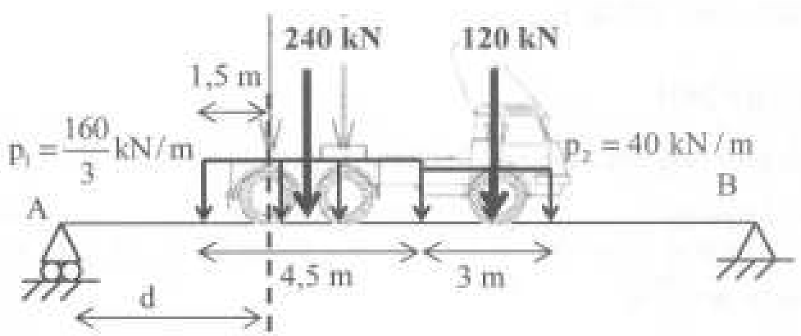


$d = \frac{13,5}{2} - 1,75 = 5,0$ m

8. moment maximum correspondant

$R_A = \frac{520}{3}$ kN $\qquad M_{max} = \frac{520}{3} 6,50 - 120 \times 1,5 = \frac{2840}{3} = 946,67$ kNm

Modélisation par des forces réparties :



9. Cas de charge équivalent :

La force répartie p_1 équivaut aux efforts des deux essieux arrières :
Résultante 240 kN entre les deux essieux
La force répartie p_2 équivaut à l'effort sur le troisième essieu :
Résultante 120 kN sur le troisième essieu

10. Réaction d'appui en A :

$$R_A = 360\frac{11,5-d}{13,5}\text{ kN}$$

$$d = 2,5\text{ m } R_A = 240\text{ kN}$$

$$d = 7,5\text{ m } R_A = \frac{320}{3} = 106,667\text{ kN}$$

11. Pour une position telle que $2,5\text{ m} < d < 7,5\text{ m}$

Au début de la charge répartie p_1 : $-240\text{ kN} < V(d-1,5) < -106,667$

A la fin de la charge répartie p_1 : $0 < V(d+3,0) < 133,333\text{ kN}$

L'effort tranchant s'annule bien sur cet intervalle, le moment y est donc bien maximum

La suite du problème est étudiée pour $2,5\text{ m} < d < 7,5\text{ m}$

12. Expression de l'effort tranchant sous la charge répartie p_1 :

$d-1,5\text{ m} < x < d+3,0\text{ m}$

$$R_A = 360\frac{11,5-d}{13,5}\text{ kN}$$

$$V(x) = -360\frac{11,5-d}{13,5} + \frac{160}{3}(x-d+1,5)$$

13. Position du moment maximum

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow 360\frac{11,5-d}{13,5} = \frac{160}{3}(x-d+1,5)$$

$$11,5-d = 2(x-d+1,5)$$

$$x = 4,25+0,5d$$

14. Moment maximum en fonction de d

$$M_{max} = M(x = 4,25+0,5d) = 360\frac{11,5-d}{13,5}(4,25+0,5d) - \frac{1}{2}(5,75-0,5d)^2\frac{160}{3}$$

$$M_{max} = \frac{80}{3}(11,5-d)(4,25+0,5d) - (5,75-0,5d)^2\frac{80}{3}$$

$$M_{max} = \frac{80}{3}(48,875+1,5d-0,5d^2) - \frac{80}{3}(33,0625-5,75d+0,25d^2)$$

$$M_{max} = \frac{80}{3}(15,8125+7,25d-0,75d^2)$$

$$M_{max} = \frac{5}{3}(-12d^2+116d+253)$$

15. Valeur de d la plus préjudiciable mécaniquement pour la poutre

$$\frac{dM_{max}}{d\,d} = 0 \Leftrightarrow -24d+116 = 0$$

$$\frac{dM_{max}}{d\,d} = 0 \Leftrightarrow d = 4,833\text{ m} = \frac{29}{6}\text{ m}$$

16. Moment maximum correspondant

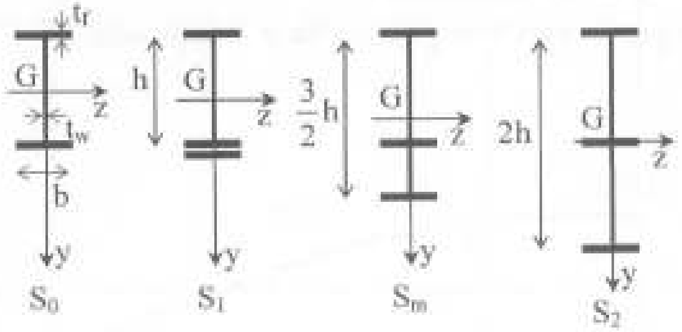
$$M_{max} = 888,89\text{ kN.m}$$

Partie II :

Inerties Profils minces

Ames identiques : Epaisseur t_w

Semelles identiques : Largeur b, Epaisseur t_f



En fonction de b, h, t_w et t_f :

1. $I_z(S_0)=\frac{t_w h^3}{12}+\frac{1}{2}bt_f h^2$ $\qquad I_y(S_0)=2\frac{t_f b^3}{12}$

2. $I_z(S_2)=8\frac{t_w h^3}{12}+2bt_f h^2$ $\qquad I_y(S_2)=3\frac{t_f b^3}{12}$

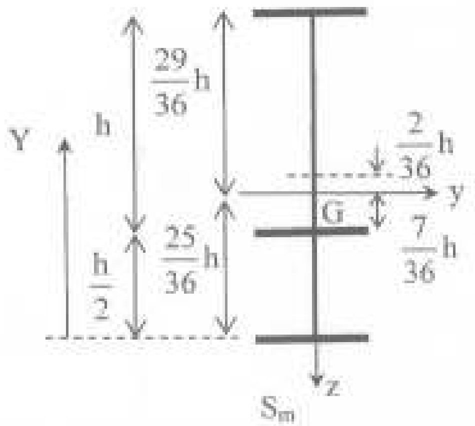
3. $I_z(S_2)>4\frac{t_w h^3}{12}+2bt_f h^2=4.I_z(S_0)$

Pour la suite, on prendra $b=\frac{h}{2}$ $t_f=2e$ et $t_w=e$

En fonction de h et e :

4. position du CdG de la section S_m

$$Y_G=\frac{eh\frac{h}{2}+eh\frac{3}{2}h+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}h\right)^2 e}{\frac{3}{2}eh+3eh}=\frac{25}{36}h$$



5. Calcul $I_z(S_m)$

$$I_z(S_m)=\frac{e\left(\frac{3}{2}h\right)^3}{12}+\frac{3}{2}eh\left(\frac{2}{36}h\right)^2+eh\left(\frac{7}{36}h\right)^2+eh\left(\frac{29}{36}h\right)^2+eh\left(\frac{25}{36}h\right)^2$$

$$I_z(S_m)=\frac{419}{288}eh^3$$

On donne : $I_z(S_1)=\frac{37}{48}eh^3$

6. I_z n'est pas linéaire :

$$I_z(S_2) = \frac{8}{12}eh^3 + 2eh^3 = \frac{8}{3}eh^3$$

$$\frac{1}{2}\left(I_z(S_1) + I_z(S_2)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{37}{48}eh^3 + \frac{8}{3}eh^3\right) = \frac{55}{32}eh^3 = 1{,}719eh^3$$

$$I_z(S_m) = 1{,}455eh^3$$

7. l'aire et l'inertie I_z varient linéairement

Cas de la section rectangulaire avec la largeur qui varie linéairement

Document Réponse :