Methode d'Alexandrie

$0 \leq \frac{a}{x} \leq \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \leq x$

$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right) \to \sqrt{a}$

Methode de Newton / Secant

On pose $f(x_n) = x_{n+1} = x - \frac{B(x)}{B'(x)}$

Methode de Steffesen

$G(x) = x - \frac{B^2(x)}{B(x+B(x)) - B(x)}$

Les pas de calcul de B'

Methode de Lambert

$L_{as}(x) = \frac{(s+1)ax + (s-1)x^{s+1}}{(s-1)a + (s+1)x^s}$

Definition

(E,d) un esp metrique $D \neq \emptyset$ et $F : D \to E$ une applicat'

- $x^* \in D$ est un pt attractif pr la methode recursive associée à F si $\exists U \subset D$ tq
  - $x^* \in U$
  - $F(U) \subset U$
  - $\forall x_0 \in U$ / $x_n = f(x_{n-1})$ CV vers x^*

Rq. le plus gd des ouverts U est appelé bassin d'attraction noté $B_F(x^*)$

Si $B_F(x^*)$ est un sous espace propre ⇒ CV locale
sinon CV globale

Δ un pt fixe $\neq$ pt attractif

Théorème du Picard

(E,d) esp metrik complet $\neq \emptyset$
$F : E \to E$ contractante rapport K
Soit $x_{n+1} = f(x_n)$
tq suite $x_n \to x^*$
Avec x^* pt fixe de f
(x^* est unique)

$$\boxed{\begin{array}{l} |x_{n+1} - x^*| \leq K|x_n - x^*| \\ |x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_0 - x_1| \end{array}}$$

Rq si f contractante $\neq \emptyset$
⇒ f admet au plus un pt fixe
contractante = lipschitzienne avec $K<1$

Th

Si $\exists$ itéré de f ($f \circ f \circ \ldots$) qui soit f contract' ($K<1$)
Alors $\forall x_0 \in E$ $x_n = f(x_n)$ CV vers x^* = unik pt fixe de f

Th de Picard avec param

(E,d) es metrik complet, Λ es topolog
$f : E \times \Lambda \to E$ continue tq
$\forall \lambda \in \Lambda$, $x \to f(x,\lambda)$ strictmt contractante $K<1$ et K independant de λ
et si $\forall \lambda \in \Lambda$, $x^*(\lambda)$ = unik pt fixe qui verifie $x^*(\lambda) = f(x^*(\lambda), \lambda)$
Alors l'appl' $\lambda \to x^*(\lambda)$ est continue

Théorème d'Ostrowski

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert $\neq \emptyset$
$F : U \to \mathbb{R}$ et x^* un pt fixe
Si f derivable en x^* et $|f'(x^*)| < 1$
Alors
- $\exists r > 0$ et $I =]x^*-r ; x^*+r[\subset U$ stable par F ($F(I) \subset I$)
- la suite $x_0 \in I$ $x_{n+1} = f(x_n)$ CV vers x^*
- x^* est un pt attractif
- On a CV locale

Definition

Pt super attractif si :
$F'(x^*) = 0$

Ordre de CV

(E,d) esp metrik (x_n) suite CV vers $x^* \in E$ et si :
$\exists N \geq 0$ et a, b, et $\tau > 0$ [illegible]
on dit que (x_n) CV d'ordre τ si
$\exists N$, $\forall n \geq N$, $x_n \neq x^*$
$a[d(x_n, x^*)]^\tau \leq d(x_{n+1}, x^*) \leq b[d(x_n, x^*)]^\tau$

Rq - $\tau \in [1, +\infty[$
- Si $\tau = 1$ alors $a < 1$

Formule de Taylor (DL)

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)\, h^k}{k!} + o(x^n)$

DL

$\frac{1}{1-x} = \sum x^k$

$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^k x^k$

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

$\ln(1-x) = \sum -\frac{x^n}{n}$

$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + o(h^2)$

Th ordre de CV

⇒ l'ordre de CV est unique

CNS de l'ordre de CV

(E,d) esp metrique $(x_n) \in E \xrightarrow[\infty]{} x^* \in E$
tq $\exists \tau \geq 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$
$\lim \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{[d(x_n, x^*)]^\tau} = C > 0$
Alors (x_n) d'ordre τ et si :
$\tau = 1$ ⇒ $C \in]0;1[$

Ordre de CV sur methode iterative

(E,d) esp metrik, $U \subset E$ ouvert $\neq \emptyset$
$f : U \to E$ appl', x^* pt attractif de f
La methode iterative $x_{n+1} = F(x_n)$ est d'ordre τ si :
- $\exists V \subset U$ ouvert tq $x^* \in V$ et $F(V) \subset V$ (stable)
- $\forall x_0 \in V$, la suite de V construite des itérés de x_0 par F est d'ordre τ

Th

$U \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$ / $f : U \to \mathbb{R}$
- Si F admet x^* pt ! d'un DL $p \geq 1$
$f(x^*+h) = f(x^*) + A h^p + o(h^p)$
Avec $A \neq 0$ $|A| < 1$ si $p = 1$
- Alors
  - x^* pt fixe
  - $\exists r > 0$ et $I =]x^*-r, x^*+r[$ tq F stable sur I
  - $x_{n+1} = F(x_n) \to x^*$
  - Si $p = 1$ x^* est attractif
    $p \geq 2$ x^* est super attractif

Resolut' d'eq dans $\mathbb{R}^n$

Norme
$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Norme sous multiplicative
$N(AB) \leq N(A)\, N(B)$ sur M_n

Norme compatible
$\|Ax\| \leq N(A) \|x\|$ $\quad x \in K^n$

Norme induite
$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Rayon spectral
$\rho(A) = \max(|\lambda|)$ λ valeur propre

Théorème

- Si $\|\ \|$ est une norme multiplicative
$\rho(A) \leq \|A\|$
- Si $A \in M_n$ une CNS pr K
$\lim_{\infty} A^n = 0$ est $\rho(A) < 1$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ norme $\|\ \|$ tq
$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Convergence des methodes iteratives

Th d'Ostrowski
$f : U \to \mathbb{R}^n$, x^* pt fixe
Si F differenciable en x^* et si
$\rho(d F_{x^*}) < 1$
Alors $\exists r > 0$ tq $B(x^*, r)$ stable / F
$\forall x_0 \in B(x^*, r)$ la suite $x_{n+1} = f(x_n) \to x^*$
x^* est pt attractif de la methode iterative

Resolution d'equa diff

Redut' en edo d'ordre 1 si lineaire $Y' = FY$

Pb de Cauchy
$\begin{cases} y' = f(y, t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec f : ouvert $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
Si f continue sur U et localement lipschitz alors existence + unicite de la sol'

Schéma d'Euler explicite

Condit' du pb de Cauchy + subdivision interval
$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(u, y(u))\, du$

Rq : méthode à un pas si calcul de y_{i+1} en fct de y_i et t_i seulement

Consistance

Equa diff est dit consistante si
$\sum_{j=0}^{n-1} |y(t_{j+1}) - y(t_j) - h_j \Phi(t_j, y(t_j), h_j)|$
$= \sum_{j=0}^{n-1} e_j \to 0$
Lo = erreur d'approximat' Σ = ch pas

Stabilite

Methode stable si $\exists M \in \mathbb{R}$ ind de h
tq $\forall (z_i, y_i, \varepsilon_i)$ tq
$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y(t_i), h_i)$
et $z_{i+1} = z_i + h_i \Phi(t_i, y(t_i), h_i)$
⇒ $|z_i - y_i| \leq M\{|z_0 - y_0| + \sum_{i \leq n} |\varepsilon_i|\}$

Convergence

si $|y_j(t_j) - y_j| \to 0$
ordre
$\left|\frac{1}{h}[y(t_{j+1}) - y(t_j)] - \Phi(t_j, y(t_j), h_j)\right| \leq K h^p$

Théorème de CV

Stabilité consistance $\Rightarrow$ CV

CNS de consistance :
$\forall t \in [t_0, t_0+T]\ \forall y \in \mathbb{R}\ /\ \Phi(t,y,0) = f(t,y)$

CS de stabilité : $\exists C, \forall t \in [t_0, t_0+T]$
$\forall y, z\ \forall h \in [0, h^*[\ /$
$|\Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h)| \leq C|y-z|$

Euler implicite

$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ résolu que
$S = r + hf(x+h, S)$, inconnue S
$g(S) = r + hf(x+h, S)$ admet pt fixe y

$\Rightarrow$ Th Picard : pt fixe unique si contractante $\Rightarrow hL < 1$ (f L-lipschitz)
g est $(1/1+hL)$ lipschitzienne

$\Rightarrow$ On montre $y_{i+1} = g(x_i, y_i, h_i)$
car $\Phi(x_i, y_i, h_i) = f(x+h, G(x_i, y_i, h))$

$\Rightarrow$ CV de la méthode
$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)| \leq \frac{L}{1+hL}|y-z|$