_0, 0, 37

DEUXIEME TEST D'ANALYSE NUMERIQUE

19 JUIN 2002

EXERCICE 1 (barème : 1+2.5+1.5+4+1)

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

1) Pour quelles valeurs de a le système admet-il une solution unique? Quelle est alors cette solution?

2) Pour quelles valeurs de a peut on appliquer la méthode de plus profonde descente pour résoudre numériquement ce système?

3) Dans la suite de l'exercice on prendra $a = 1$. En partant de $X_0 = (1, 0, 0)$, calculer X_1 par la méthode de plus profonde descente.

4) Calculer X_5 avec la même méthode. On détaillera et on présentera soigneusement les différents calculs intermédiaires nécessaires. Les résultats numériques seront donnés en écriture avec 6 décimales.

5) Comparer le résultat obtenu en 4) avec la solution exacte et conclure.

EXERCICE 2 (barème : 3+2+3+2)

Dans toute la suite, on considère la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant une condition de Lipschitz par rapport à la variable y. On suppose disposer d'un schéma S_1 convergent d'ordre 2 de la forme

$$y_{k+1} = y_k + h \;\; \Psi(t_k, y_k, h)$$

avec Ψ continue et Lipschitzienne de constante K_1 par rapport à la seconde variable. On considère alors le schéma S_2

$$y_{k+1} = y_k + h \;\; \Phi(t_k, y_k, h)$$

SOULA
Julien
1AG2

13/20

2002

Test n° 2 d'Analyse Numérique

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad AX = b$$

① Pour que la solution soit unique, il faut $\det A \neq 0$

or $\det A = a$ dans ce cas, il faut donc $a \neq 0$

On résoud le système $AX = b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z + az = 1 + a \end{cases} \Rightarrow az = \cancel{1} + a - \cancel{1} \qquad z = 1$$

ou plus simple $X = A^{-1} b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{a}+1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}-1 \\ -\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+1 \end{pmatrix}$$

d'où $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $a \neq 0$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 2y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

0,5

$2y - y = 0$ $\quad y = 0$

$x = -1$

② Il faut A symétrique, définie positive

A symétrique : ${}^tA = A$: évident.

A déf positive : polynôme caractéristique.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 1 & 2 & 2+a-x \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\left[a - (2+3a)x + (5+a)x^2 - x^3\right] = 0$$

$=$

~~Rapt~~ 1

$$A \text{ sym déf po} \iff \begin{cases} {}^tXAX = 0 \iff X = 0 \\ {}^tXAX > 0 \end{cases}$$

$${}^tXAX = \Big[\big(z(2+a) + 2y + x\big)z + \big(2z + 2y + x\big)y + \big(x + y + z\big)x\Big]$$

$$= \underbrace{x^2}_{>0} + 2x(z+y) + \underbrace{2y^2}_{>0} + 4zy + \underbrace{(2+a)z^2}_{>0}$$

il ne faut trouver que des carrés. (forme quadratique)

$= \cancel{\ldots}$

$$= (x+y+z)^2 + (y+z)^2 + az^2$$

${}^tXAX = 0 \iff$ $\forall a$, il faut

~~③ a = 1~~ $\quad A = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+a \end{pmatrix}}$

~~$X_0 = (1, 0, 0)$~~

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ a z^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall a).$$

et $^tXAX > 0$ pour $\boxed{a > 0}$ $\qquad$ 2,5 /

A est sym, déf pos avec $a > 0$.

④ $a = 1$ $\qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

algorithme :

$$\begin{cases} x_0 \\ d_k = -g(x_k) \\ \alpha_k = -\dfrac{^td_k\, g(x_k)}{^td_k A d_k} \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \end{cases}$$

$$d_0 = -g(x_0) = -[AX_0 - b] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = -\frac{^td_0 \cdot g(x_0)}{^td_0 A d_0} = \frac{2}{2} = 1. \qquad g(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X_1 = X_0 + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

1,5 /

Etape 2

x_1

$g(x_1) = Ax_1 - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 0,214286$

$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$x_2 = \begin{pmatrix} -0,214286 \\ -0,214286 \\ 0,785714 \end{pmatrix}$ /

$d_2 = -g(x_2) = -(Ax_2 - b) = \begin{pmatrix} -0,357142 \\ 0,071429 \\ 0,285716 \end{pmatrix}$ /

$\alpha_2 = 1,024377$

$x_3 = x_2 + \alpha_2 d_2 = \cancel{1,0243\ldots}$

$x_3 = \begin{pmatrix} -0,580136 \\ -0,141115 \\ 1,078395 \end{pmatrix}$ /.

$d_3 = \begin{pmatrix} -0,357146 \\ -0,294426 \\ -0,372821 \end{pmatrix}$ /

$\alpha_3 = 0,216232$

$x_4 = \begin{pmatrix} -0,657360(5) \\ -0,204779 \\ 0,997779 \end{pmatrix}$ /

$d_4 = \begin{pmatrix} -0,135639(5) \\ 0,071360(4) \\ 0,023581 \end{pmatrix}$

$\alpha_4 = 1,090374$

SOULA

$$\boxed{X_5 = \begin{pmatrix} -0{,}605\,258 \\ -0{,}126\,969 \\ 1{,}078\,010 \end{pmatrix}}$$

63

11

1

4

⑤ Solution exacte : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On voit que le résultat approche, mais la convergence ne donne pas encore vraiment les bonnes valeurs.
il faut continuer les itérations un peu plus loin.
(5 itération : on est à environ 0,2 de l'exacte !)

0,5

Exercice 2

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad f \in C^0(a,b) \quad f \text{ lip en } y.$$

S_1 ordre $p=2$ $\quad y_{l+1} = y_l + h\,\Psi(t_l, y_l, h)$

Ψ C^0, lip par rapport à

S_2 : $\quad y_{l+1} = y_l + h\,\phi(t_l, y_l, h)$.

④ Il faut montrer la consistance et la stabilité de S_2.

- Consistance : $\phi(t, y, 0) = \frac{1}{4} f(t,y) + \frac{3}{4} f(t,y)$
$= f(t,y)$ ok.

$\rightarrow \boxed{\text{méthode consistante}}$

1,5

Stabilité : il suffit que ϕ soit lip en y.

$$|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)|$$

$$\cancel{\leq |\phi(t, y_2, h)| + |\phi(t, y_2, h)|}$$

$$= \Big| \tfrac{1}{4} f(t, y_1) + \tfrac{3}{4} f\big(t + \tfrac{2}{3}h, y_1 + \tfrac{2}{3}h\,\Psi(t, y_1, \tfrac{2}{3}h)\big) - \tfrac{1}{4} f(t, y_2) + \tfrac{3}{4} f\big(t + \tfrac{2}{3}h, y_2 + \tfrac{2}{3}h\,\Psi(t, y_2, \tfrac{2}{3}h)\big) \Big|$$

$$= \Big| \tfrac{1}{4}\big[f(t, y_1) - f(t, y_2)\big] + \tfrac{3}{4}\big[f\big(t + \tfrac{2}{3}h, y_1 + \tfrac{2}{3}h\,\Psi(t, y_1, \tfrac{2}{3}h)\big) - f(\text{idem avec } y_2)\big] \Big|.$$

$$\leq \left|\tfrac{1}{4}\right| \underbrace{|f(t, y_1) - f(t, y_2)|}_{\leq K|y_1 - y_2|} + |\alpha|$$

K coeff lip de f.

$$\leq \tfrac{K}{4}|y_1 - y_2| + |\alpha|$$

et $|\alpha| \leq \tfrac{3}{4}K \left| y_1 + \tfrac{2}{3}h\,\Psi(t, y_1, \tfrac{2}{3}h) - \left(y_2 + \tfrac{2}{3}h\,\Psi(t, y_2, \tfrac{2}{3}h)\right) \right|$

$$\leq \tfrac{3}{4}K \left[|y_1 - y_2| + \tfrac{2}{3}h\,|\Psi(t, y_1, \tfrac{2}{3}h) - \Psi(t, y_2, \tfrac{2}{3}h)|\right]$$

D'où finalement, puisque Ψ est K_1 lip.

On a $|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq \tfrac{1}{4}K + \tfrac{3}{4}K + \tfrac{h}{2}K_1 K$

$$\leq K\left(1 + \tfrac{h}{2}K_1\right)|y_1 -$$

or cela doit être vrai $\forall h$ (si h varie)

Donc on prend h_{max}

d'où $\forall h$ $|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq K\left(1 + \frac{h_{max}}{2} K_1\right)|y_1 - y_2|$

D'où ϕ est lip de coeff $\longrightarrow$

D'où méthode stable.

méthode stable + consistante $\Rightarrow$ $\boxed{\phi_{S_2} \text{ converge}}$ 1,5

② $y \in C^3([t_0, t_0 + h])$ on utilise Taylor.

$$y\left(t_0 + \tfrac{2}{3}h\right) = y(t_0) + \tfrac{2}{3}h\, y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(t_0) + O(h^4)$$

On

③ S_2 est d'ordre 3 si elle est d'ordre ≥ 3 mais pas d'ordre ≥ 4.

ordre $\geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^k \phi}{\partial h^k}(t, y, 0) = \dfrac{1}{k+1} f^{(k)}(t, y)$
$\forall k = 0, 1, 2.$

ici $\phi(t, y, h) = \frac{1}{4} f(t, y) + \frac{3}{4} f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}h\,\varphi(t, y, \frac{2}{3}h\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, h) = 0 + \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial h} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial h}\right]$

(On dérive l'expression du (2) par rapport à h ?).

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{2}{3} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{2}{3}\varphi(t, y, \tfrac{2}{3}h)\right]$$

Erreur de consistance :

$e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}$
$= z(t_n + h) - z(t_n) - h\phi(t_n, z(t_n), h)$

$\left(\cancel{z(t_n + h) = z(t_n) + h \dfrac{\partial z(t_n)}{\partial t}}\right.$

$$\int_{t_n}^{t_n+h} z' \overset{\text{question 2}}{=} \frac{h}{4}\left[z'(t_n) + 3z'(t_n + \tfrac{2}{3}h)\right] + O(h^4)$$

d'où $e_n = \dfrac{h}{4}\left(z'(t_n) + 3z'(t_n + \frac{2}{3}h)\right) - h\phi(t_n, z(t_n), h) + O(h^4)$

$z = y$ ici.

④ ~~La méthode avec les 3 coefficients k_1, k_2, k_3 est une méthode de Runge Kutta d'ordre 3.~~

On connaît $y'(t) = f(t, y(t))$

SOULA
Julien
1062

or pour que l'ordre soit $= p$ il faut

$\exists\, c$ tq $|e_n| \leq c\, h^{p+1}$ donc il faut trouver

ici $\leq c\, h^4$

$$|e_n| = |h| \frac{1}{4} \left(f(t_n, y(t_n)) + 3\, f\left(t_n + \tfrac{2}{3}h, y\left(t_n + \tfrac{2}{3}h\right)\right)\right) - \phi(t_n, y(t_n), h) + O(h^4)$$

f lip $\leq |h| \frac{1}{4}$)

etc.

0,5

④ la méthode avec les 3 coefficients k_1, k_2, k_3
est de Runge Kutta d'ordre 3

Pour montrer qu'il est d'ordre 3
il faut ϕ C^3 !

0,5