Vocabulaire

Ω : esp des possibles / réalisat°
évent $\subset \Omega$
$A \Delta B$: ou exclusif
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Syst complet d'évent

→ suite (A_n) avec 2 à 2 évent incompatible ie
$A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\cup A_n = \Omega$

Tribu

- $\emptyset \in T$, $\Omega \in T$
- $A \in T \Rightarrow \bar{A} \in T$
- $\forall (A_n) \subset T \Rightarrow \cup A_n \in T$

ex : tribu borélienne = $\cup$ évent fermé

Rq : (Ω, T) = esp probabilisable

Probabilité

$p : T \to [0,1]$
$p(\emptyset) = 0$ / $p(\Omega) = 1$
$\forall (A_n)$ avec évent 2 à 2 incompatible
$p(\cup A_n) = \sum p(A_n)$

Propriétés :

$P(\bar{A}) = 1 - p(A)$
$A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$(A_n) \nearrow$ $P(\cup A_n) = \lim P(A_n)$

Système presque complet d'évent

(A_n) évent 2 à 2 incompatible
$P(\cup A_n) = \sum P(A_n) = 1$

Propriétés

$P(B) = \sum P(A_n \cap B)$

Probabilité uniforme

$p_k = 1/n$

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}}$$

$n!$ = nb de permutat° sur $[1,n]$

Modèle d'urne

- tire n boule
- r couleur $\neq$
- N boule au total
- N_i = nb boule de la couleur i

$p_i = N_i / N$ = proport° $(\sum p_i = 1)$
$\alpha = (n_1 \dots n_r)$ tq $\sum_1^r n_i = 1$
↳ tirage de n_i boule de couleur i

Tirage avec remise

(distrib° multinomiale - binomiale)

$$\boxed{p_\alpha = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \left(p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}\right)}$$

$$p_\alpha = \frac{N_1^{n_1} \dots N_r^{n_r}}{N^n} \cdot \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$$

Tirage sans remise

(distrib° hypergéométrik)

$$\boxed{p_\alpha = \frac{\binom{N_1}{n_1} \dots \binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}}$$

Lois usuelles

Uniforme $p_k = 1/k$
Binomiale $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
↳ loi nb succès avec n essai identik et indépendant lorsque chaque essai à une proba p

- Hypergéométrik $p = m/N$

$p_k = \binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k} / \binom{N}{n}$
↳ loi nb de succès = nb boule 1ère catégorie après n tirage séparé
m = nb total boule de catégorie
N = nb total de boule

- Loi de poisson

$p_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$

- Loi géométrique $G(p)$

$p_n = p(1-p)^{n-1}$
↳ loi attente du 1er succès si proba d'avoir 1 succès = p
= aussi nb d'échec précédant le premier succès lorsque proba d'un succès est p

Cardinal

2 ensemble ont $\neq$ card si $\exists$ biject°
$\text{card}(\prod A_k) = \prod \text{card}(A_k)$
$\text{card}\{f : A \to B\} = B^A$

Arrangement

suite ordonnée sans répétit°

$$\boxed{A_n^p = n! / (n-p)!}$$ avec ordre

A_n^n = nb de permutat° = $n!$

Combinaison

$$\boxed{\binom{n}{p} = n! / p!(n-p)!}$$

↳ pas d'ordre

Propriétés

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$
$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$

Arrangement avec répétit°

$p! / r_1! \dots r_n!$
= nb de p tirage avec remise ds boîte n pr lequel $k^{ème}$ individu apparaît r_k fois avec ordre d'apparit° compté
ex : anagramme
$= \dfrac{(\text{nb lettre total})!}{(\text{nb lettre } a)! \dots (\text{nb lettre } z)!}$

Combinaison avec répétition

$$\boxed{K_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{n-1}}$$

= nb total de combinaison avec rep de p objet parmi k
= nb de p tirage avec remise ds pop taille n où seul compte le nb d'apparit° de chaque individu
↳ répartir 10 … entre 3 nb … …

Proba conditionnelle

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$ sachant A

Rq : $P(\cup B_n | A) = \sum P(B_n | A)$
$P(A|A) = 1$

Proba composée

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Probabilité totale

(A_n) un SPCE

$$\boxed{P(B) = \sum P(B|A_n) P(A_n)}$$

Formule de Bayes

(A_n) un SPCE et $p(A_k) \neq 0$

$$\boxed{p(A_k|B) = \frac{p(B|A_k)\, p(A_k)}{\sum_n P(B|A_n) P(A_n)}}$$

Indépendance

(A,B) ind $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
$\neq$ incompatible $P(A \cap B) = \emptyset$
indépendant de tt événement
→ évent presque impossible $p(A) = 0$
→ évent presque certain $p(A) = 1$

ind $\Rightarrow$ ind 2 à 2 (pas $\Leftarrow$)

Bernoulli

n essai identik indépendant
succès $= p$ échec $= 1-p$
nb succès : $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Variable aléatoire discrète

va = appl mesurable tq X $\Omega \to \mathbb{R}$
$X^{-1}(B) \in T$ … B borel
Si $T = P(\Omega)$ (cas Ω fini dénombrable) tt appl : $\Omega \to \mathbb{R}$ est une va

va discrète si $X(\Omega)$ fini dénombrable

Loi d'une va $p_s = P(X = s)$
va discrète déterminée si on connaît la proba de chaque valeur prise par X

Fonct° de répartition F_X $\mathbb{R} \to [0,1]$
$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{s \leq x} p_s$
F_X $\nearrow$ continue à droite
$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
$P\{X = x\} = F_X(x) - F_X(x^-)$
$G = 1 - F_X = P\{X > x\}$
↳ fct° escalier

Moyenne espérance = moment ordre 1

$m = EX = \sum_{s \in S} s p_s$

Th de transfert

X $\Omega \to \mathbb{R}$ va discrète $S = X(\Omega)$
h $S \to \mathbb{C}$
si $\sum |h(s)| p_s$ CV
$E h(X) = \sum_{s \in S} h(s) p_s$

VA d'ordre k si $\sum |s|^k p_s$ CV

moment d'ordre k
$m_k = \sum s^k p_s$
moment centré d'ordre k
$\mu_k = E(X - m_1)^k = \sum (s - m)^k p_s$

Variance - Écart type

X VA d'ordre 2 - m = moyenne
Variance : $V = \sigma^2 = E(X - m)^2$
↳ écart type

VA ordre 2 centrée réduite si $EZ = 0$ $VZ = 1$

Fonction caractéristik

$\varphi_X(t) = E e^{itX} = \sum e^{its} p_s$

Fonction génératrice

$g_X(t) = E(t^X) = \sum t^n p_n$

Égalité en loi pr X et Y

- $X(\Omega) = Y(\Omega)$
- $\forall s$ $P(X = s) = P(Y = s) = p_s$

↳ alors $\forall$ fct° h
$E h(X) = E h(Y)$

Propriété moyenne

$a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(X) \leq b$
$|E(X)| \leq E(|X|)$
linéarité, croissance $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
Si $|Z| \leq |X|$ $\Rightarrow Z$ va d'ordre 1
$L^1(\Omega)$ ensemble va d'ordre 1 … ev

$$\boxed{V X = E X^2 - (EX)^2}$$

Variable centrée réduite
$Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$

Inégalité Markov

Z va positive $a > 0$

$$\boxed{P\{Z \geq a\} \leq EZ/a}$$

Inég Bienaymé - Tchebychev

écart type $\geq$ la moyenne
X va, moyenne m, σ écart type
$\forall \varepsilon > 0$ $\boxed{P\{|X - m| \geq \varepsilon\} \leq \sigma^2 / \varepsilon^2}$

Loi conjointe = loi du couple (X,Y)
Loi marginale : $p_s = P\{X = s\} = \sum_t p_{st}$
Couple : fct° caractéristik
$E e^{i(\alpha X + \beta Y)} = \varphi(\alpha, \beta)$

Loi conjointe - conditionnel
$p_{t|s} = P\{Y = t | X = s\} = \dfrac{p_{st}}{p_s}$
↳ sachant s

Th transfert conditionnel
$\sum |h(s,t)| p_{t|s}$ CV
$\Rightarrow E[h(X,Y) | X = s] = \sum h(s,t) p_{t|s}$

Moyenne conditionnel

$E(h(X,Y)|X) = \varphi(X)$
$E h(X,Y) = E[E[h(X,Y)|X]]$

Cauchy - Schwartz

X et Y ordre 2 $\Rightarrow XY$ ordre 1 et

$$\boxed{|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq E(|X|^2)^{1/2} \, E(|Y|^2)^{1/2}}$$

Covariance
$\text{cov}(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$
$= EXY - EX\,EY$
↳ bilinéaire sym positive
Cauchy $\Rightarrow |\text{cov}(X,Y)| \leq V(X)^{1/2} V(Y)^{1/2}$
si $\rho(X,Y) = \rho$ = coef corrélat° linéaire
$\rho = \text{cov}(X,Y) / \sigma_X \sigma_Y$ $\left(\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}\right)$
$\rho \in [-1, 1]$

Matrice covariance

$V = \begin{pmatrix} V(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma \dots \\ \rho\sigma \dots & \dots \end{pmatrix}$

Variable aléatoire continue

Fct borel si $\forall$ borel B $f^{-1}(B)$ est borel

Densité de proba : $f : \mathbb{R}^n_{borel} \to \overline{\mathbb{R}}^+$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$

$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$ — f : densité

Fct répartit : $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Moyenne

$m = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$

Th transfert

si $\int_{\mathbb{R}} |h(x)| f(x)dx < +\infty$

$\Rightarrow E\,h(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)dx$

Moment

$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx$

centré $= \int (x-m)^k f(x)dx$

Loi normale

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)}$$

$g(x)$ centrée réduite $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\left(\begin{smallmatrix} E=0 \\ V=1 \end{smallmatrix}\right)$

$$P(X,Y) = \iint f(x,y)dxdy$$

Loi conditionnelle

$f(y|x) = f(x,y) / f_X(x)$ — loi marginale

Variance - Espérance

Uniforme : $\frac{1}{n}$ $E = \frac{n+1}{2}$ $V = \frac{n^2-1}{12}$

Bernoulli $B(p)$ $E = p$ $V = pq$

Binomiale $B(n,p)$ $E = np$ $V = npq$

Hypergéo $H(N,n,p)$ $E = np$ $V = npq\frac{N-n}{N-1}$

Géo $G(p)$ (pq^{k-1}) $E = \frac{1}{p}$ $V = q/p^2$

Géo 2 (pq^k) $E = q/p$ $V = q/p^2$

Poisson $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ $E = \lambda$ $V = \lambda$

Expo $\lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$ $E = 1/\lambda$ $V = 1/\lambda^2$

Loi marginale

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$

Th transfert conditionnel

$E(h(X,Y)|X=s) = \sum h(s,t)\,P(\ldots)$

X VA densité f_X

$T = X^2$ calcul densité de T

$E(h(T)) = E(h(X^2)) = \int h(x^2)f(x)$

$= \int_{\mathbb{R}^-} h(x^2)f(x)dx + \int_{\mathbb{R}^+} h(x^2)f(x)dx$

chgmt variable $t = x^2$

$= \int_{\mathbb{R}^+} h(t) f(-\sqrt{t}) \frac{dt}{2\sqrt{t}} + \int_{\mathbb{R}^+} h(t)f(\sqrt{t})\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$= \int_{\mathbb{R}^+} h(t)\left[f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\right]\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\hookrightarrow$ densité $f_T(t) = \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$

Couple (X, Y) uniforme sur disque $\{x^2+y^2 \leq 1\} = \mathcal{D}_{(x,y)}$

$f(x,y) = 1/\pi \;\mathbb{1}_{\mathcal{D}(x,y)}$ — 1/aire

$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\;\mathbb{1}_{[-1,1]}$

Paramètre

Fractile ordre α valeur q_α

$F(q_\alpha^-) \leq \alpha \leq F(q_\alpha^+)$

en général q_α solution de $F(q_\alpha) = \alpha$

Coef variat° $c_v = \sigma/m$

écart interquartile : $q_{3/4} - q_{1/4}$

étendue : $u - \ell$ avec

$u = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) = 1\}$

$\ell = \sup\{x \in \mathbb{R} / F(x) = 0\}$

Coef Fisher μ_3/σ^3

Pearson $\beta_1 = \gamma_1^2$

si distrib sym $\gamma_1 = 0$; étalé à gauche $\gamma_1 < 0$

2° Fisher $\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ — aplatissement

Différence lois

Dirac en a : δ_a $X = a$; $m = a$ $\sigma^2 = 0$ $\varphi = e^{ita}$

Uniforme : $\frac{1}{n}\sum \delta_k / \frac{1}{n}$

$m = \frac{n+1}{2}$ $m_2 = (n+1)(2n+1)/6$

$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$ $\varphi = e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{n \sin(t/2)}$

Bernoulli param p / $q = 1-p$

$m = p$ $\sigma^2 = pq$ $\varphi = pe^{it} + q$

Binomiale

$\sum \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $m_1 = np$ $m_2 = np(np+q)$

$\sigma^2 = npq$

$\varphi = (pe^{it} + q)^n$

Hypergéométrique

$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$

$m = np$ $\sigma^2 = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Géométrique

pq^{n-1} $m_1 = 1/p$ $m_2 = \frac{p+q}{p^2}$ (?)

$\sigma^2 = q/p^2$ $\varphi = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

Poisson

$e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ $m_1 = \lambda$ $m_2 = \lambda^2 + \lambda$

$\sigma^2 = \lambda$

Pascal

$\binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$ $m = r/p$ $\sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$

$\varphi = (pe^{it}/1-qe^{it})^r$

Binomiale négative

$\binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n$ $m = rq/p$

$\sigma^2 = rq/p^2$ $\varphi = (p/1-qe^{it})^r$

Expo : $F = 1 - e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$

$m = 1/\lambda$ $m_k = k!/\lambda^k$ $\sigma^2 = 1/\lambda^2$

$\varphi = \lambda/\lambda - it$

Gamma $f = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$

$m = \alpha/\lambda$ $\sigma^2 = \alpha/\lambda^2$

Cauchy : $f = \frac{1}{\pi} \cdot b/(x-a)^2 + b^2$

Khi-2 $\Gamma(n/2, 1/2)$

$m = n$ $\sigma^2 = 2n$ $\varphi = 1/(1-2it)^{n/2}$

Student

Rel $= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n/2)} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$

$\sigma^2 = n/n-2$

Indépendance

$P(X_1 \in B_1 \ldots X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in B_k)$

Caractérisat° ind

$\forall I_k$, $P(X_i \in I_i \ldots) = \prod P(X_i \in I_i)$

- $F(x_1 \ldots x_n) = \prod F_k(x_k)$
- $\varphi(t_i) = \prod \varphi_k(t_k)$
- Cas discret : $P(X_1 = s_1, \ldots) = \prod_1^n P(X_i = s_i)$
- Cas admettant densité $f(x_1 \ldots x_n) = \prod f_k(x_k)$

Th groupement

(X_n) suite fini ou non et transformat° sur groupe disjoint reste ind

Prop si X ind, Y ind

$EXY = EY \cdot EX$

$cov(X,Y) = 0$

$\triangle$ $cov(X,Y) = 0$ $\cancel{\Rightarrow}$ (X,Y) ind

si $S = X + Y$

$\varphi_S = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ $f_S = f_X * f_Y$

Stabilité par somme ind et lois binomiale, poisson, normale, gamma, khi-deux

Type de CV

CV presque sûrement (ps)

si $X_n \xrightarrow{ps} X \Leftrightarrow \exists A / P(A) = 1$ et $X_n \xrightarrow{CV} A$

CV presque sûre (ps)

$\{X_n \to X\} = \{\omega \in \Omega / \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$

$X_n \xrightarrow{ps} X \Leftrightarrow P(\{X_n \to X\}) = 1$

$\Leftrightarrow P(\{\lim X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$

Convergence en moyenne ordre p

$X_n \xrightarrow{L^p} X$ ou $X_n \xrightarrow{L^p} X$

si $\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0$

p = 1 : CV en moyenne

p = 2 : CV quadratique

CV en proba : $X_n \xrightarrow{P} X$

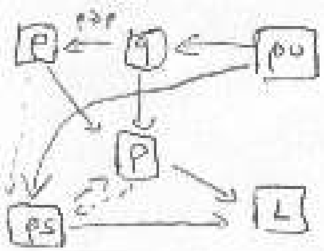
$\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Conv en loi ou en distribut°

F_n fct répartit° de X_n

$X_n \xrightarrow{L} X$ ssi $\forall x$ pt de continuité de F

$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$



Théorème des gd nb

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $\overline{X_n} = S_n/n$

- Si X_n ind 2 à 2 même moyenne, même σ (cas si indé identiquement distribué)

Ordre 2

$\overline{X_n} \xrightarrow{q.p} m$ (loi faible)

$\overline{X_n} \xrightarrow{ps} m$ (loi forte)

Ordre 1

$\overline{X_n} \xrightarrow{ps} m$ loi forte

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$\forall \varepsilon > 0$ $P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Inégalité de Hoeffding

X_n à valeurs ds $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2/(b-a)^2}$

avec $\overline{X_n}$ ...

Théorème central limite

ind + identique distribué + ordre 2

$Z_n = S_n - nm / \sqrt{n}\,\sigma$

$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - m)$

$$\boxed{\text{Alors } Z_n \xrightarrow{L} N(0,1)}$$

Csq $\Phi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-t^2/2)}$

$P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$

$P\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a)$

h C^0, $\exists M > 0$, $\alpha \in [0,2]$

tq $|h| \leq M|x|^\alpha$

$\lim_{n\to\infty} E\,h(Z_n) = \int h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-t^2/2)}$

Approximation loi binomiale

$B(n,p)$ $V = p(1-p)$ $E = p$

$S_n = \sum X_k$ $E = np$ $V = np(1-p)$

- Si $n \geq 30$, $np(1-p) \geq 5$

$B(n,p) \sim N(np, np(1-p))$

$P(|f_n - p| \geq \varepsilon) = 2\left(1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)\right)$

$f_n = \frac{S_n}{n}$

- Si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$, $np \leq 15$: $B(n,p) \sim P(np)$

Loi Hypergéométrique

Si $H(N, n, p_N)$ / $p_N = \frac{A_N}{N}$

$p_N \xrightarrow[\infty]{} p \in [0,1]$

$H \sim B(n,p)$

[Si $N \geq 10n$

Correction continuité loi discrète - continue

$P(X \geq a) \to P(X > a + 0.5)$

$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 < X < b + 0.5)$

Propa conditionnel

$f(y|x) = f(x,y)/f_X(x)$

Fractile

$P(X < q_\alpha) = P$

Loi marginale

$f_X(x) = \int f(x,y)dy$

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$