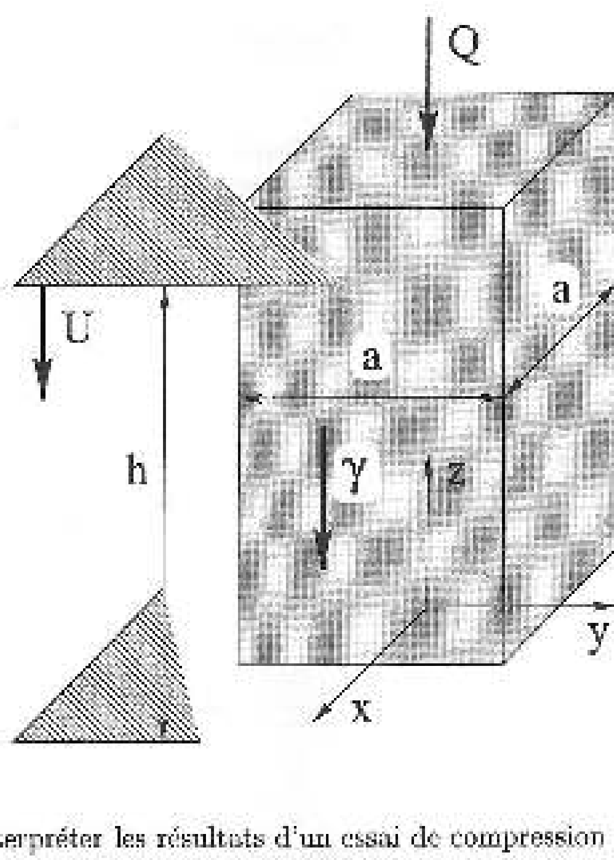
Analyse Limite et Calcul à la Rupture
ENTPE
2006-07

le 25/11/2006

CONTROLE DES CONNAISSANCES

Tous documents autorisés. Durée 3 heures.

Problème



On se propose d'interpréter les résultats d'un essai de compression simple d'une éprouvette cylindrique de hauteur h et dont la section est un carré de côté a, *lorsque le matériau homogène est supposé pesant* (poids volumique γ). L'éprouvette est en contact avec deux plateaux rigides horizontaux : le plateau inférieur est immobile, tandis que le plateau supérieur est animé d'une vitesse verticale $\underline{U} = -U\underline{e}_z$ ($U > 0$). Le contact plateau/éprouvette est lisse ; la surface latérale de l'éprouvette est libre de contrainte.

1. Ecrire les conditions pour qu'un champ de vitesse virtuel $\underline{v}$ soit cinématiquement admissible avec les données en vitesse du problème. Donner l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs à l'éprouvette dans un tel champ de vitesse et mettre en évidence que les paramètres de chargement du problème sont γ et Q, résultante comptée positivement vers le bas, des efforts appliqués par le plateau supérieur sur l'éprouvette.

2. Le matériau constitutif est supposé homogène obéissant à un critère de résistance de Tresca, de cohésion C. La valeur de γ étant fixée, on désigne par $Q^+(\gamma)$ la valeur extrême de Q.

2.1. Approche statique. On considère dans l'éprouvette un champ de contrainte uniaxial de la forme :

$$\sigma_{zz} = \gamma z + K \qquad \text{(K=constante)} \qquad ; \qquad \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

2.1.1. Montrer qu'un tel champ est statiquement admissible avec γ et $Q = -(\gamma h + K)a^2$.

2.1.2. A quelle condition portant sur Q le critère de résistance du matériau est-il vérifié en tout point de l'éprouvette ? En déduire un *minorant de* $Q^+(\gamma)$ fonction de C, h, a et γ.

2.2. Approche cinématique. On considère un champ de vitesse virtuel de la forme :

$$V_x = \alpha x \;,\; V_y = \alpha y \;,\; V_z = \beta z$$

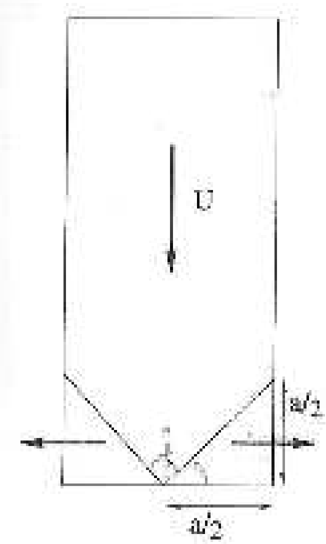
où α et β sont des paramètres constants.

2.2.1. Déterminer β en fonction de U et h pour que ce champ de vitesse soit cinématiquement admissible.

2.2.2. Calculer la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ cinématiquement admissible.

2.2.3. Déterminer la valeur de α pour laquelle la puissance résistante maximale demeure finie et calculer cette puissance. En déduire un majorant de $Q^+(\gamma)$.

2.3. Montrer que le mécanisme représenté sur la figure ci-contre permet d'améliorer la majoration précédente dès que $a < 2h$.
Donner le majorant correspondant.



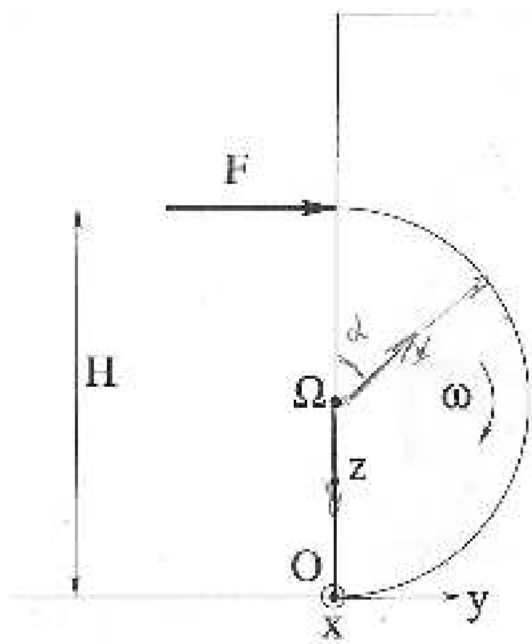
$\sigma_{zz} = \gamma z + K$

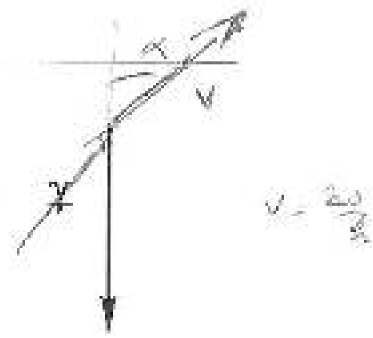
$Q = -(\gamma h + K)a^2$

3. Déduire des résultats précédents un encadrement de l'erreur relative commise lorsque l'on adopte le rapport $C^1 = Q^+(\gamma)/(2a^2)$ comme évaluation expérimentale de C. Cette erreur est définie par $(C^1 - C)/C$.
Application numérique : $\gamma = 20kN/m^3$; $C = 100kPa$; $h = 0,2m$; $a = 0,1m$

Exercice n°1

On considère une excavation effectuée dans un matériau de Tresca de cohésion C, de poids volumique γ. Un dispositif de soutènement consiste à appliquer une force F (au moyen d'un buton ou d'un tirant) sur le plan vertical y=0. On désigne par H la cote du point d'application de cette charge au dessus du pied de l'excavation. Déterminer, par une approche cinématique basée sur le mécanisme de rotation autour du point Ω de cote z=H/2 représenté sur la figure, un majorant de F^-. (Le problème sera traité comme un problème plan de calcul à la rupture dans les axes Oyz).





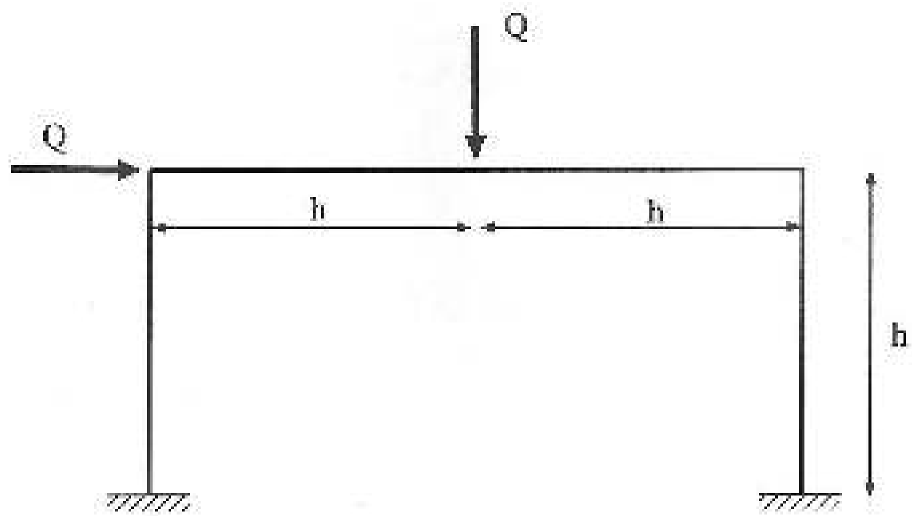
Exercice n°2

On se propose de déterminer la charge de ruine Q^+ du portique ci-dessous, sachant que la valeur absolue du moment fléchissant en tout point est limitée par m.

1. Déterminer les sections potentiellement critiques de ce portique, son degré d'hyperstaticité, et en déduire les mécanismes de ruine indépendants.

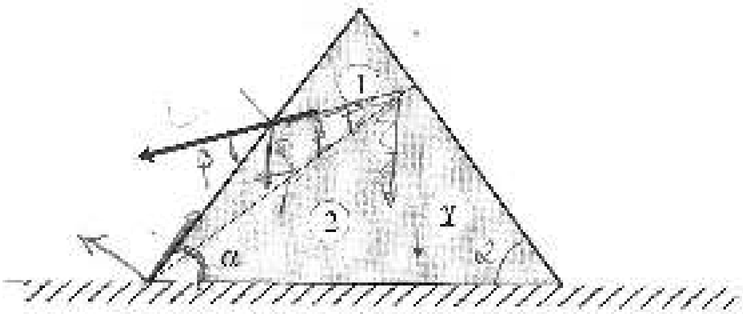
2. Par combinaison linéaire de ces mécanismes, calculer la valeur de Q^- en fonction de m et h. Dessiner l'allure du mécanisme de ruine optimal.

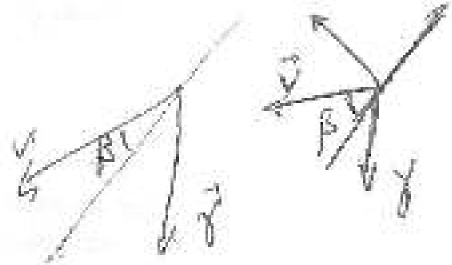
3. Mettre en évidence la distribution de moments fléchissants équilibrant Q^+.



Exercice n°3

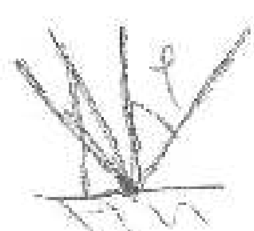
Déterminer un majorant de l'angle d'inclinaison maximal α^+ au-delà duquel un tas de sable conique est certainement instable sous son poids propre γ, en supposant que le matériau constitutif obéit à un critère de résistance de Coulomb sans cohésion ($\varphi \neq 0$, cohésion C=0). On utilisera un mécanisme à deux blocs : l'un en translation, l'autre immobile (figure suivante).





$$P_e = \int \rho \underline{F}\cdot\underline{v}\, dS + \int_{\Omega_2} \underline{T}\cdot\underline{v}\, d\Omega$$

$$= \int_S \underline{T}\cdot\underline{v}\, dS +$$



$$= \gamma\cdot e_z (v_x e_x + v_y e_y)$$

$$=$$

$$\int_{V_1} \underline{\sigma}\cdot\underline{v}\, dV + \cancel{\int_{V_2} \underline{\sigma}\cdot\underline{v}\, dV}$$

$\tau = \sigma \tan \varphi$

$\sigma v V_1$