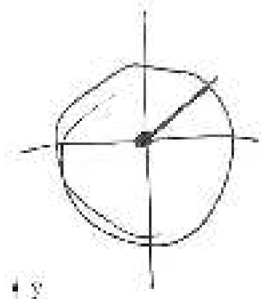
Analyse Limite et Calcul à la Rupture
ENTPE
2007-08

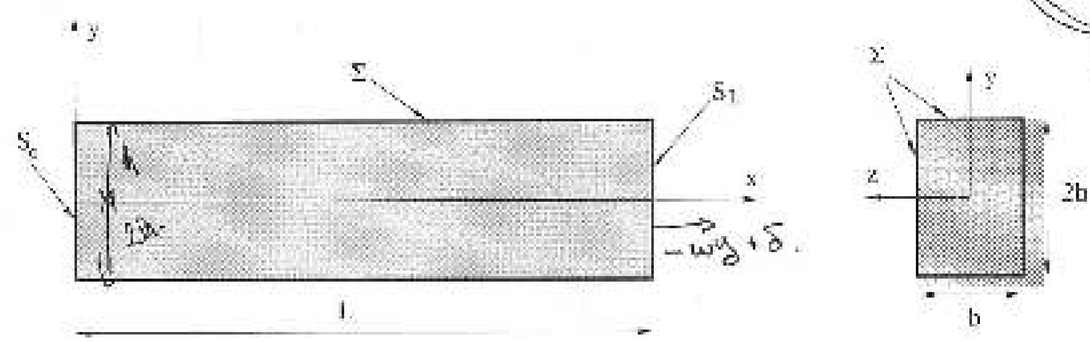
le 13/12/2007

CONTROLE DES CONNAISSANCES

Tous documents autorisés. Durée 3 heures.



Problème n°1



Une poutre ayant la forme d'un cylindre de longueur L et de section rectangulaire (largeur b, hauteur 2h) est soumise à un chargement défini comme suit :

- Pas de forces de volume ;
- Section S_0 : $U_x = 0$, $T_y = T_z = 0$;
- Section S_L : $U_x = -\omega y + \delta$, $T_y = T_z = 0$;
- Surface latérale Σ libre de contrainte.

1. Définir l'espace des champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissibles, ainsi que celui des champs de vitesse virtuel $\underline{U}$ cinématiquement admissibles. En déduire, en écrivant l'expression de la puissance des efforts extérieurs à la poutre, dans de tels champs de vitesse que la poutre est soumise à un mode de chargement dépendant de deux paramètres N et M que l'on interprétera.

2. Le matériau constitutif est supposé homogène obéissant à un critère de résistance de Coulomb, de cohésion C et d'angle de frottement φ. On se propose de mettre en œuvre une approche statique, afin d'obtenir une estimation du domaine (N,M) des chargements potentiellement supportables. Pour cela on considère le champ de contrainte suivant :

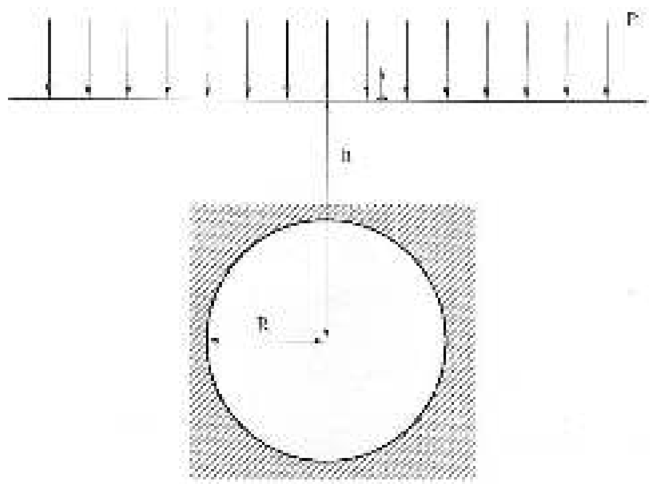
+ $\sigma_{xx} = \sigma_1$ pour $-h \le y \le \alpha h$
+ $\sigma_{xx} = \sigma_2$ pour $\alpha h \le y \le h$ avec $\alpha \in [-1, 1]$
où σ_1 et σ_2 sont des constantes.

Les autres σ_{ij} sont nulles.

2.1. Montrer que de tels champs sont statiquement admissibles et établir l'expression des paramètres de chargement N et M en fonction de σ_1, σ_2, α, h et b.

2.2. En attribuant respectivement aux constantes σ_1 et σ_2 les valeurs respectives des résistances du matériau, en traction simple ($\sigma_1 = 2C\dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \geq 0$) et en compression simple ($\sigma_2 = -2C\dfrac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} \leq 0$), déduire une approche par l'intérieur, en faisant varier α, du domaine des chargements potentiellement supportables dans un diagramme (N,M), que l'on tracera. Compléter cette approche en inversant les rôles de σ_1 et σ_2. Examiner le cas particulier d'une poutre constituée d'un matériau de Tresca.

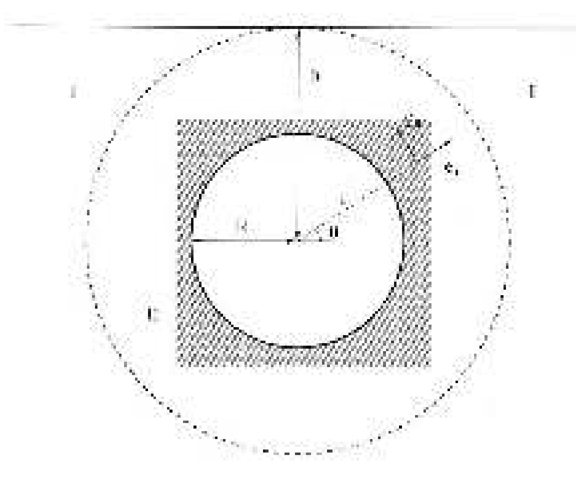
Problème n°2



Un tunnel circulaire de rayon R est creusé à la profondeur h dans un sol homogène non pesant, obéissant à un critère de Tresca de cohésion C. La paroi interne du tunnel est supposée libre d'efforts, tandis que le massif de sol est soumis en surface à l'action d'une charge uniformément répartie d'intensité p. Le tunnel est de longueur suffisante pour que l'on puisse traiter ce problème comme un problème plan.

1. On cherche à construire un champ de contrainte σ, statiquement admissible avec les données du problème, tel que :

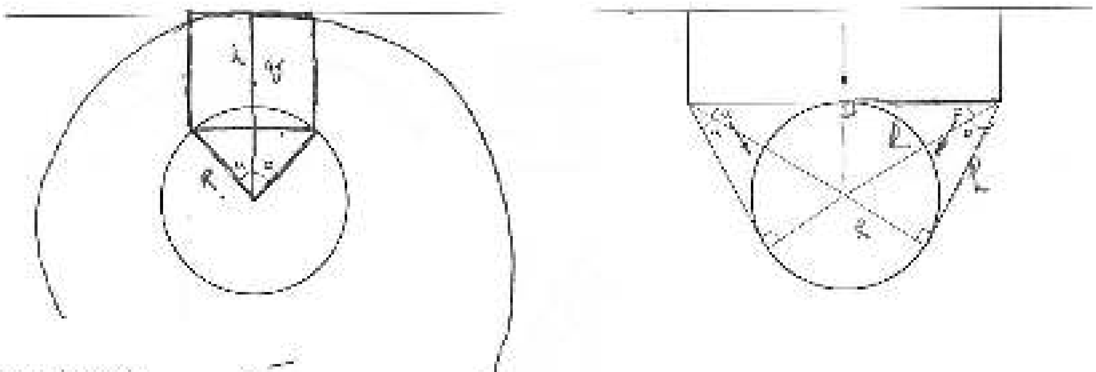
- dans la zone I (r ≥ h) : σ est isotrope (de la forme $\alpha\underline{1}$)
- dans la zone II (R ≤ r < h) : σ est indépendant de θ et vérifie : $\sigma_{r\theta} = 0$ et $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \lambda$ constante.



a) Donner, en fonction de p, l'expression de σ en tout point du massif.

b) En écrivant que $\underline{\underline{\sigma}}$ respecte en tout point le critère de résistance du matériau, déterminer un minorant de la charge extrême p .

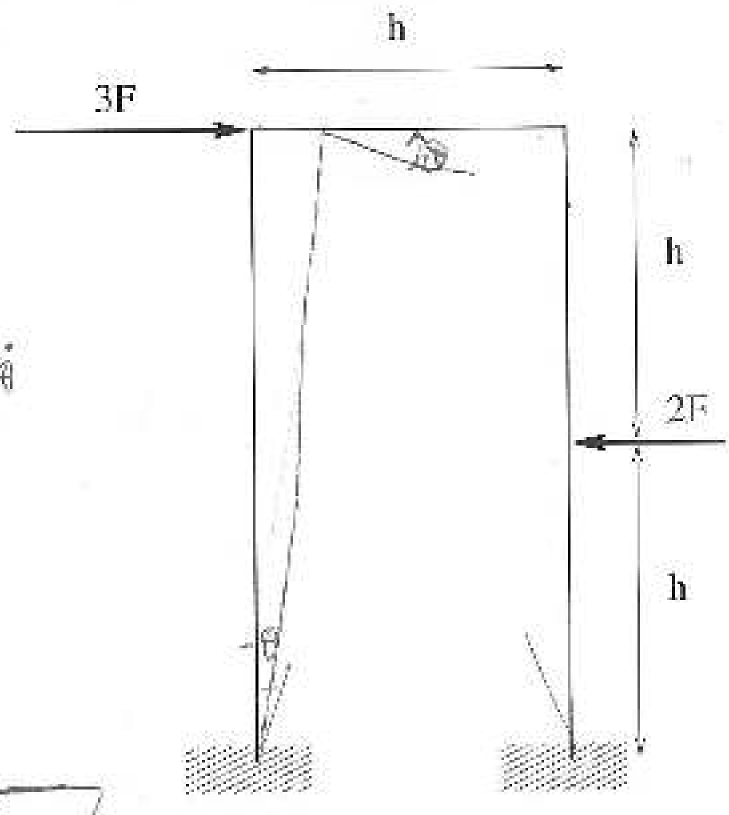
2. Donner des évaluations par excès de la charge extrême p^- qui provoque l'effondrement du tunnel à l'aide des mécanismes de rupture par blocs en translation schématisés ci-après (on optimisera chaque fois par rapport à l'angle α). Discuter suivant la valeur du rapport h/R.

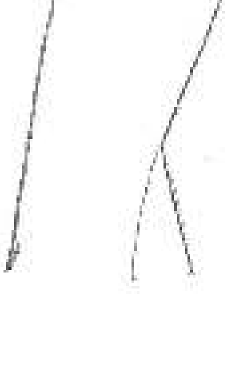


Exercice n°1

On se propose de déterminer la charge de ruine Q^+ du portique ci-dessous, sachant que la valeur absolue du moment fléchissant en tout point est limitée par m.

$P_e = 3F 2 \lambda \dot{\theta}$





1. Déterminer les sections potentiellement critiques de ce portique, son degré d'hyperstaticité, et en déduire les mécanismes de ruine indépendants.

2. Par combinaison linéaire de ces mécanismes, calculer la valeur de Q^+ en fonction de m et h. Dessiner l'allure du mécanisme de ruine optimal.

3. Mettre en évidence la distribution de moments fléchissants équilibrant Q^+.

Exercice n°2 2

Déterminer un majorant de l'angle d'inclinaison maximal α^+ au-delà duquel un tas de sable conique est certainement instable sous son poids propre γ, en supposant que le matériau constitutif obéit à un critère de résistance de Coulomb sans cohésion ($\varphi \neq 0$, cohésion C=0). On utilisera un mécanisme à deux blocs : l'un en translation, l'autre immobile (figure suivante).