ENTPE
2008-09

Tous documents autorisés

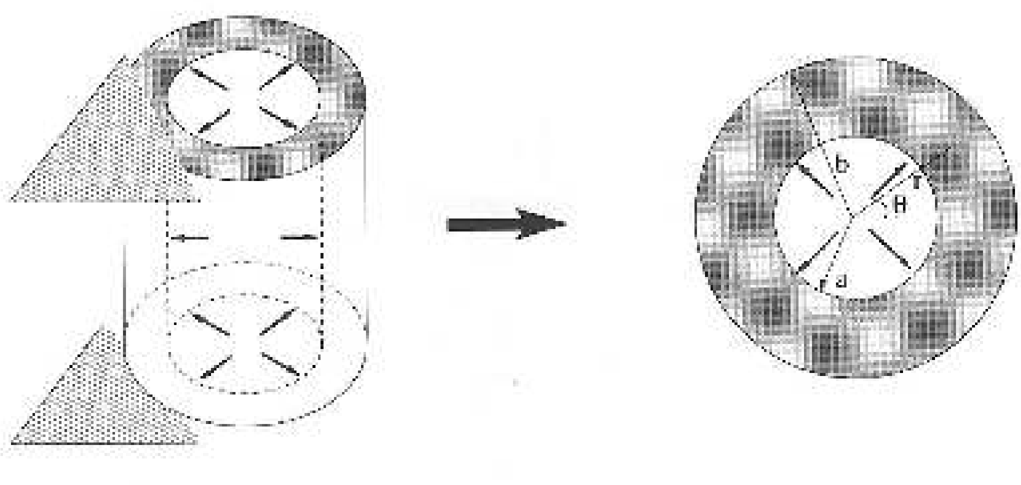
Analyse Limite et Calcul à la Rupture
Contrôle des connaissances.

<u>Problème</u> : Pression limite d'un tube circulaire

Un tube cylindrique circulaire de hauteur , et de rayons intérieur a et extérieur b, est constitué d'un matériau métallique dont la résistance est décrite par un critère de von Mises, de limite en cission simple k :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^2)} - k < 0$$

Les sections extrémités du cylindre sont astreintes à demeurer dans des plans fixes, le contact se faisant sans frottement. La paroi externe du tube ($r = b$) étant libre de tout effort, sa paroi interne ($r = a$) est soumise à une pression uniforme d'intensité p. les forces de volume sont négligées. Dans ces conditions le problème peut être traité en déformations planes, à symétrie de révolution, comme indiqué sur la figure . Un point quelconque du tube est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On se propose de calculer la valeur extrême p^+ de la pression à laquelle est soumis le tube.



1- <u>Position du problème</u> :

Déterminer les ensembles des champs statiquement admissibles et cinématiquement admissibles. Mettre en évidence le mode de chargement.

2- <u>Approche par l'intérieur</u> :

En utilisant le champ de contrainte dont la forme est définie de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr}(r)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\sigma_{rr}(r) + \sigma_{\theta\theta}(r)}{2}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

c'est-à-dire que seules les composantes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sont non nulles et dépendent de r, mener l'approche statique de la théorie du calcul à la rupture en prenant le cas particulier :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) - \sigma_{rr}(r) = 2k$$

En déduire un minorant de la pression maximale p^+.

3) Approche par l'extérieur :

On s'intéresse au champ de vitesse suivant :

$$\underline{U} = f(r)\underline{e}_r$$

a) Après avoir vérifié l'admissibilité cinématique de ce champ, calculer la puissance des efforts extérieurs développée par la pression dans ce champ de vitesse.

b) Montrer que la condition de pertinence (ie. $\pi(\underline{\underline{d}}) < +\infty$) donnée par Von Mises conduit au résultat :

$$f(r) = f(a)\frac{a}{r}$$

c) Après avoir déterminé la puissance résistante maximale pour un tel champ de vitesse, déduire un majorant de la pression maximale p^+.

d) Conclure.

Exercice n° 1 : *Extrusion d'une pièce métallique.*

Un bloc parallélépipédique ABB'A' constitué d'un matériau purement cohérent (Tresca) de cohésion C, est soumis à l'action d'un piston astreint à se déplacer verticalement avec une vitesse $-U\,e_y$ dans une filière plane de largeur L, la largeur de sortie étant égale à λL (avec $1/2 \leq \lambda \leq 1$). On suppose que le contact du matériau (supposé non pesant : $\gamma = 0$) avec les bords de la filière, ainsi qu'avec le piston, est parfaitement lisse. Le problème est traité comme un problème plan dans les axes Oxy (Fig. 1).

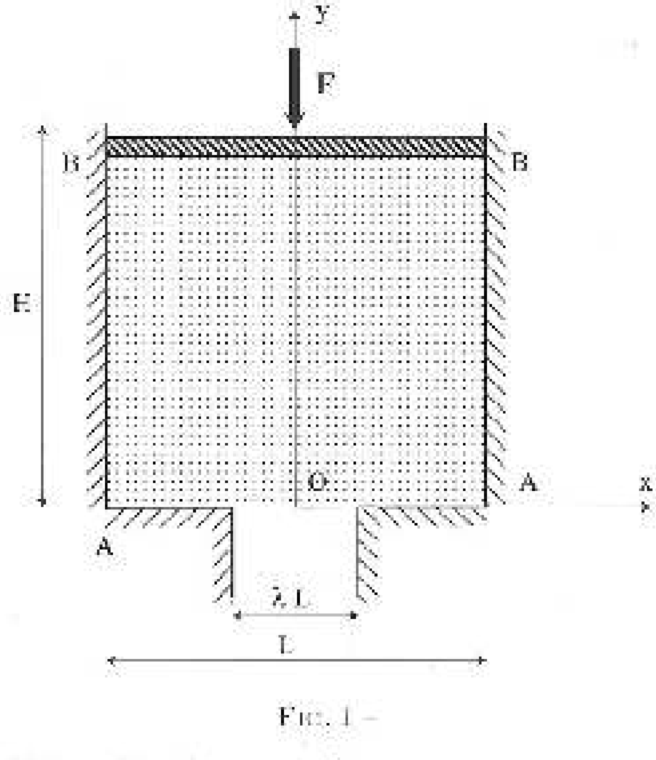


FIG. 1 –

(le bord y=0 , $|x| \leq \lambda L/2$ est libre de contrainte)

I) Ecrire l'ensemble des conditions pour qu'un champ de contrainte dans le plan ABB'A' (composantes σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}) soit statiquement admissible avec les données en efforts du problème. Même question pour qu'un champ de vitesse virtuel $\underline{v}$ soit cinématiquement admissible avec U. En écrivant la puissance des efforts extérieurs, en déduire que le mode de chargement auquel est soumis le système se restreint à une force verticale F comptée positivement vers le bas.

2) Calculer une borne inférieure de la charge extrême F^- (force d'extrusion du matériau à travers la filière) en utilisant un champ de contrainte à trois zones homogène comme indiqué sur la figure 2.

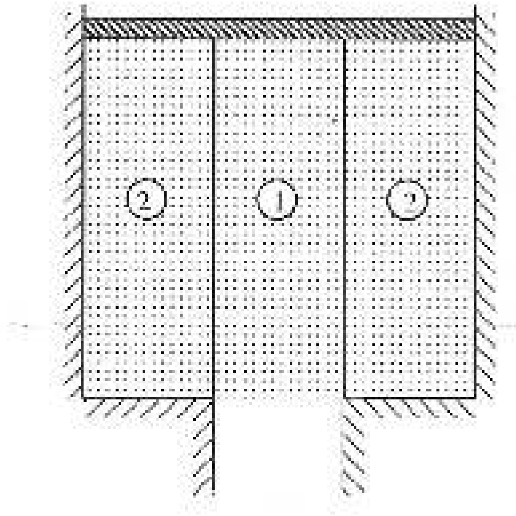


FIG. 2 –

3) On considère le mécanisme de rupture par blocs en translation représenté sur la figure 3.

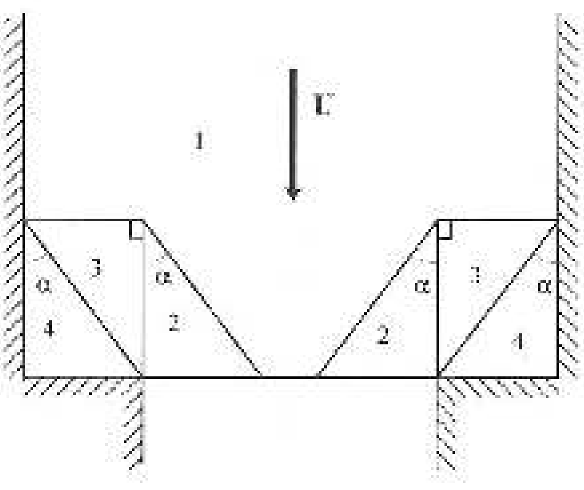


FIG. 3 –

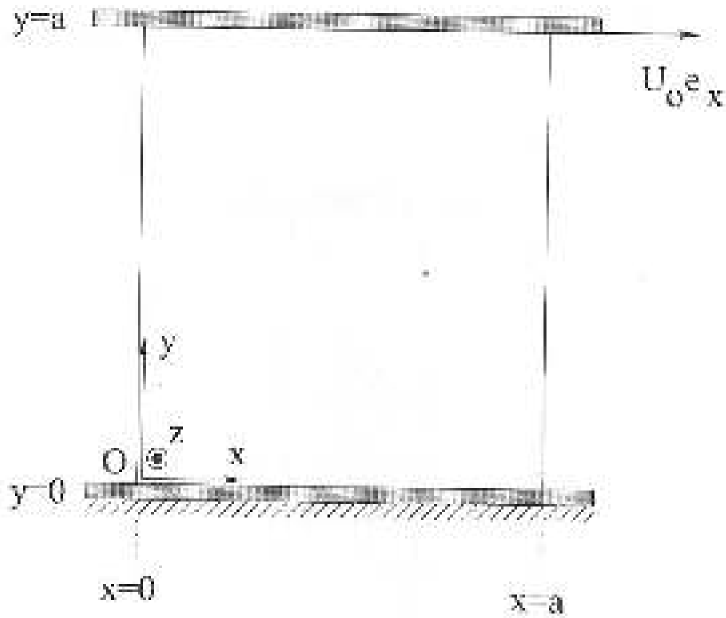
a) Expliquer pourquoi la vitesse des blocs 4 et 4' doit être nulle.

b) En utilisant la remarque de a), tracer l'hodographe des vitesses correspondant et calculer en fonction de U et de α, les normes des discontinuités de vitesse entre les blocs.

c) En déduire, en mettant en œuvre l'approche cinématique du calcul à la rupture, un majorant de F^+. On optimisera par rapport à la valeur de l'angle α.

Exercice n° 2

On considère un bloc homogène de forme cubique, d'arête a, collé sur sa face inférieure (y=0) à un plateau rigide fixe et collé sur sa face supérieure (y=a) à un plateau rigide animé d'un mouvement de translation $U_0 e_x$ (). Les faces latérales (x=0, x=a, z=±a/2) sont libres de contrainte et on néglige les forces de masse. Les capacités de résistance sont décrites par un critère de Tresca de limite en traction simple σ_0.



1) Montrer que la sollicitation décrite ci-dessus correspond à un chargement dépendant d'un paramètre, que l'on notera F et dont on donnera le sens physique.

2) On cherche à déterminer une estimation par excès de F^-.

a) En considérant le mécanisme défini en tout point par :

$$\underline{U}(\underline{x}) = \frac{U_o}{a} y \underline{e}_x \quad \text{glissement simple}$$

déterminer un majorant de F^+.

b) Imaginer un mécanisme à l'aide d'un champ de vitesse purement discontinu qui conduit au même majorant.

<u>Exercice n° 3</u>

Une poutre droite de longueur 3ℓ, encastrée à ses extrémités, est soumise à l'action de deux charges d'intensité Q et $2Q$ (comptées positivement vers le bas) appliquées respectivement aux abscisses $x = \ell$ et $x = 2\ell$ (figure). La poutre est homogène, de même moment limite en flexion positive et négative égal à m.
Indiquer les sections potentiellement critiques de la structure et en déduire le nombre de mécanismes de ruine indépendants. Calculer la charge extrême Q!