

ANALYSE LIMITE ET CALCUL À LA RUPTURE

2013-2014

Denis Garnier * , Anne-Sophie Colas** , Jean-Claude Morel ***

* Laboratoire Navier, ENPC. email : denis.garnier@enpc.fr

** IFSTTAR. email : Anne-Sophie.Colas@ifsttar.fr

*** DGCB, ENTPE. email : jeanclaude.morel@entpe.fr

Plan du cours

20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse

limite : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

Plan du cours

20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse

limite : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

Plan du cours

20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse

limite : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

04/10 Travaux dirigés : approche statique

PC : 3h

Plan du cours

20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse

limite : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

04/10 Travaux dirigés : approche statique

PC : 3h

11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

Plan du cours

- 20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 04/10 Travaux dirigés : approche statique**
PC : 3h
- 11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**
PC : 3h

Plan du cours

- 20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 04/10 Travaux dirigés : approche statique**
PC : 3h
- 11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**
PC : 3h
- 25/10 Poutres en flexion**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

Plan du cours

- 20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 04/10 Travaux dirigés : approche statique**
PC : 3h
- 11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**
PC : 3h
- 25/10 Poutres en flexion**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 8/11 Modélisation mixte (1h) ; TP TALREN (2h)**

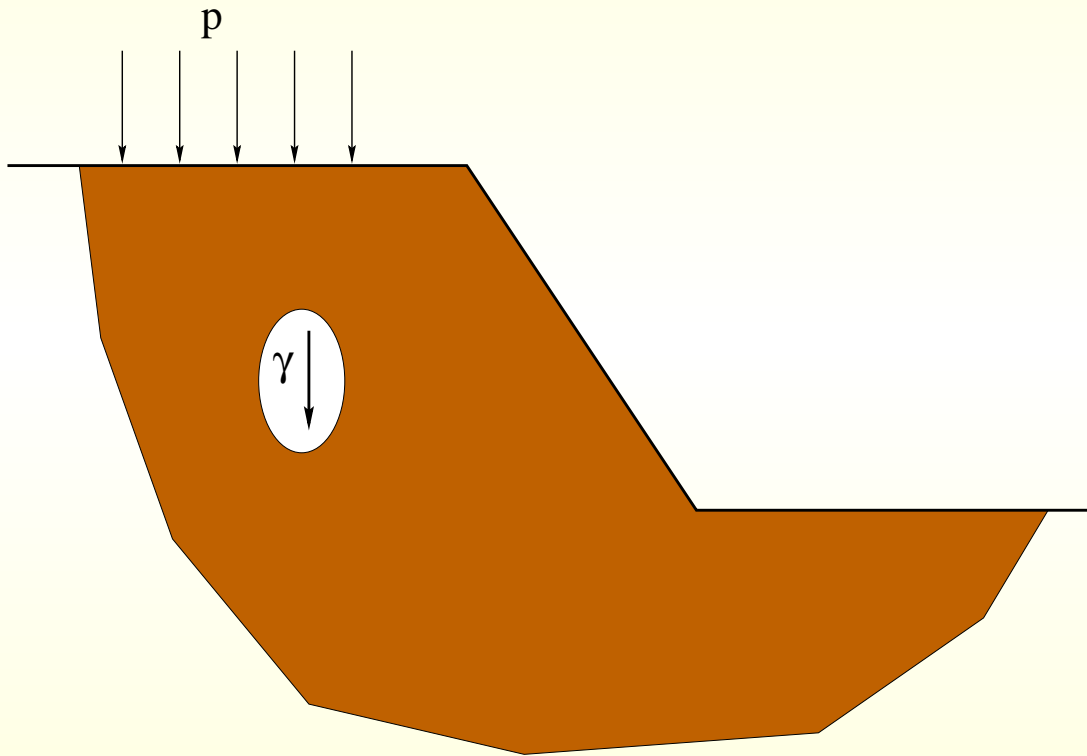
Plan du cours

- 20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 04/10 Travaux dirigés : approche statique**
PC : 3h
- 11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**
PC : 3h
- 25/10 Poutres en flexion**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 8/11 Modélisation mixte (1h) ; TP TALREN (2h)**
- 15/11 Travaux dirigés : poutres en flexion**
PC : 3h

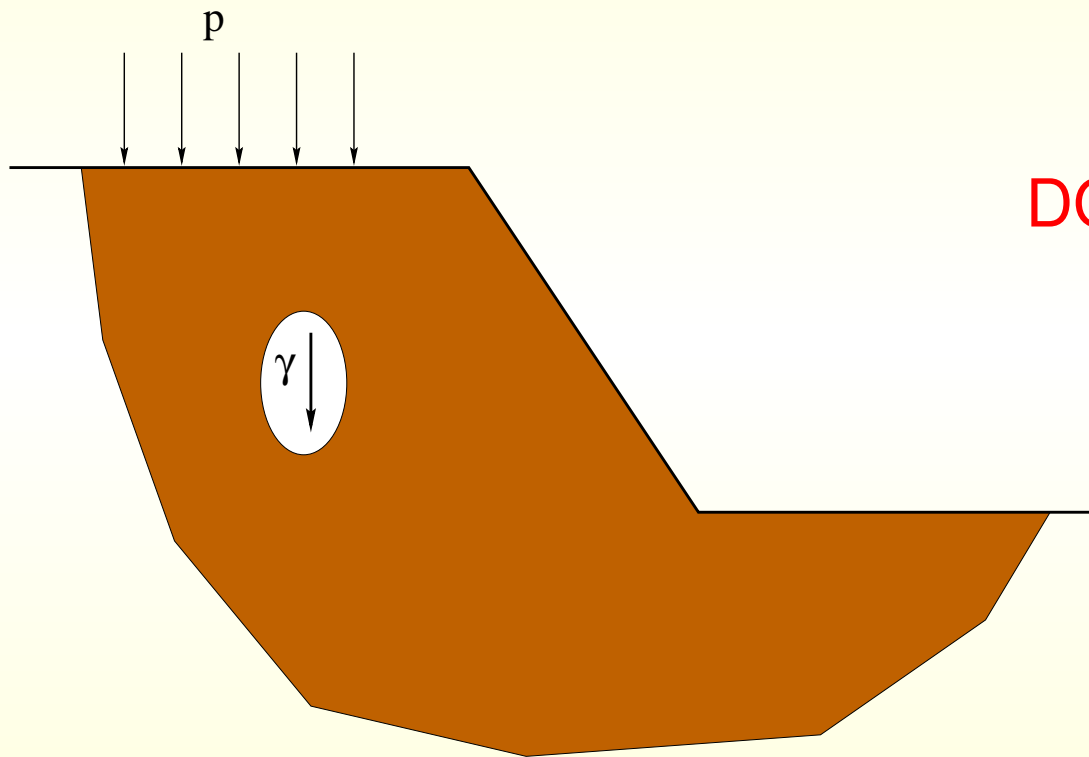
Plan du cours

- 20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 04/10 Travaux dirigés : approche statique**
PC : 3h
- 11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions “ π ”.**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**
PC : 3h
- 25/10 Poutres en flexion**
Amphi : 1h30 ; PC : 1h30
- 8/11 Modélisation mixte (1h) ; TP TALREN (2h)**
- 15/11 Travaux dirigés : poutres en flexion**
PC : 3h
- 22/12 Contrôle des connaissances**

Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite

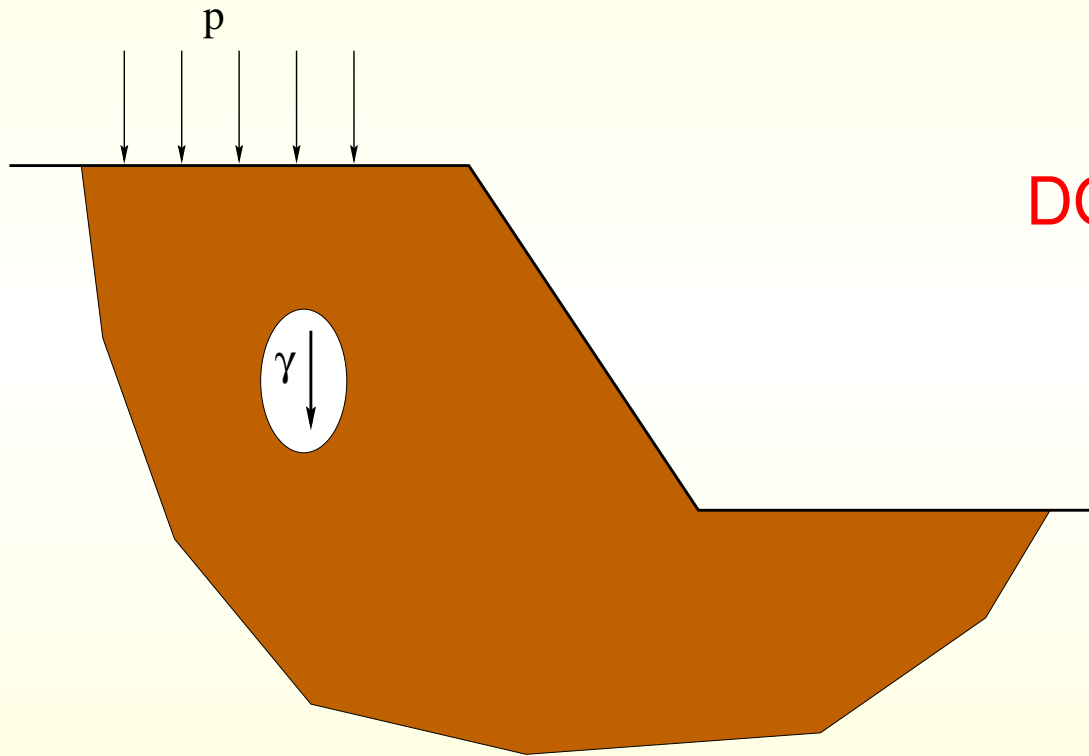


Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite



DONNÉES :

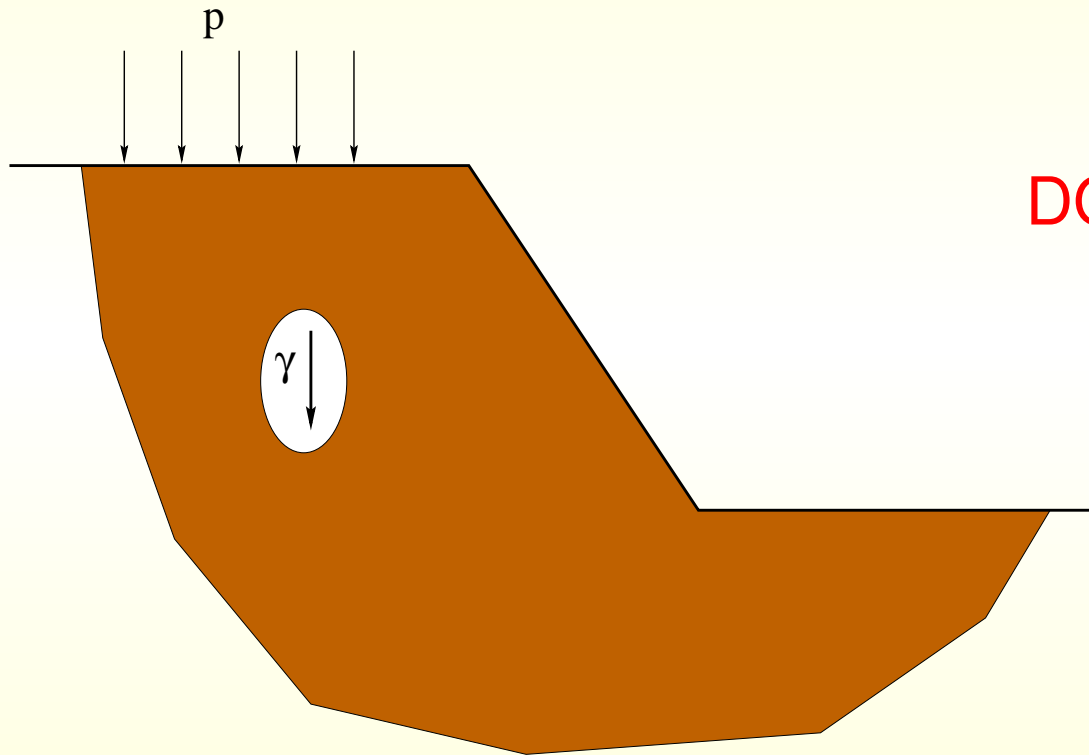
Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite



DONNÉES :

- géométrie

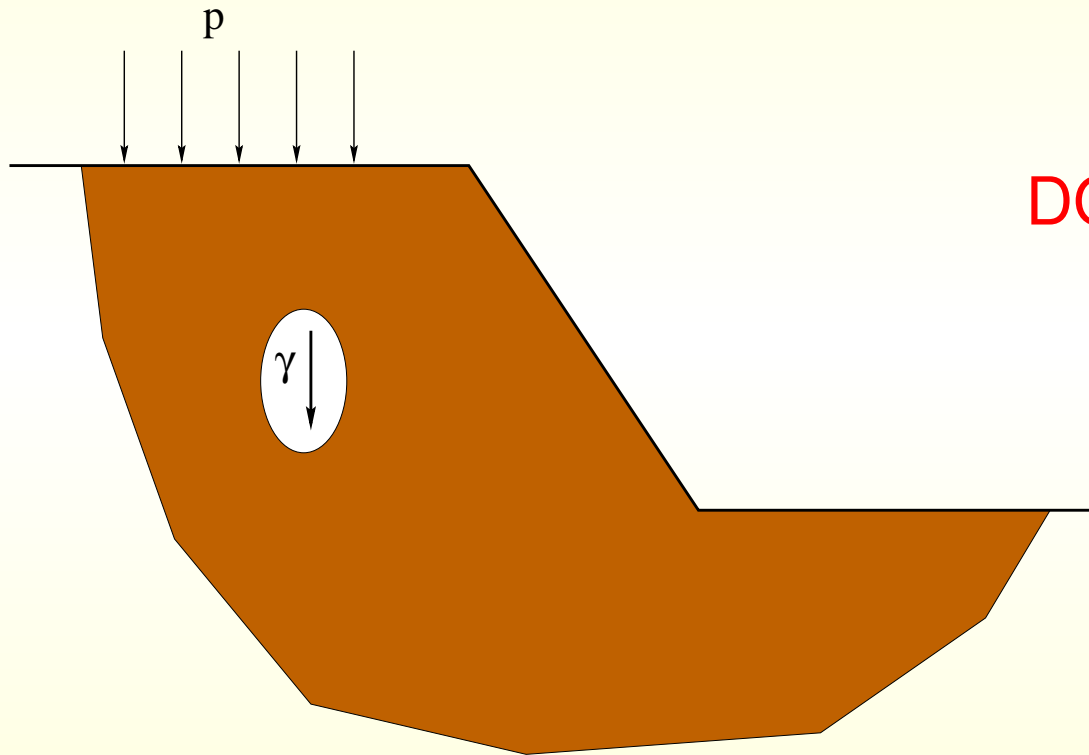
Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite



DONNÉES :

- géométrie
- chargement

Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite

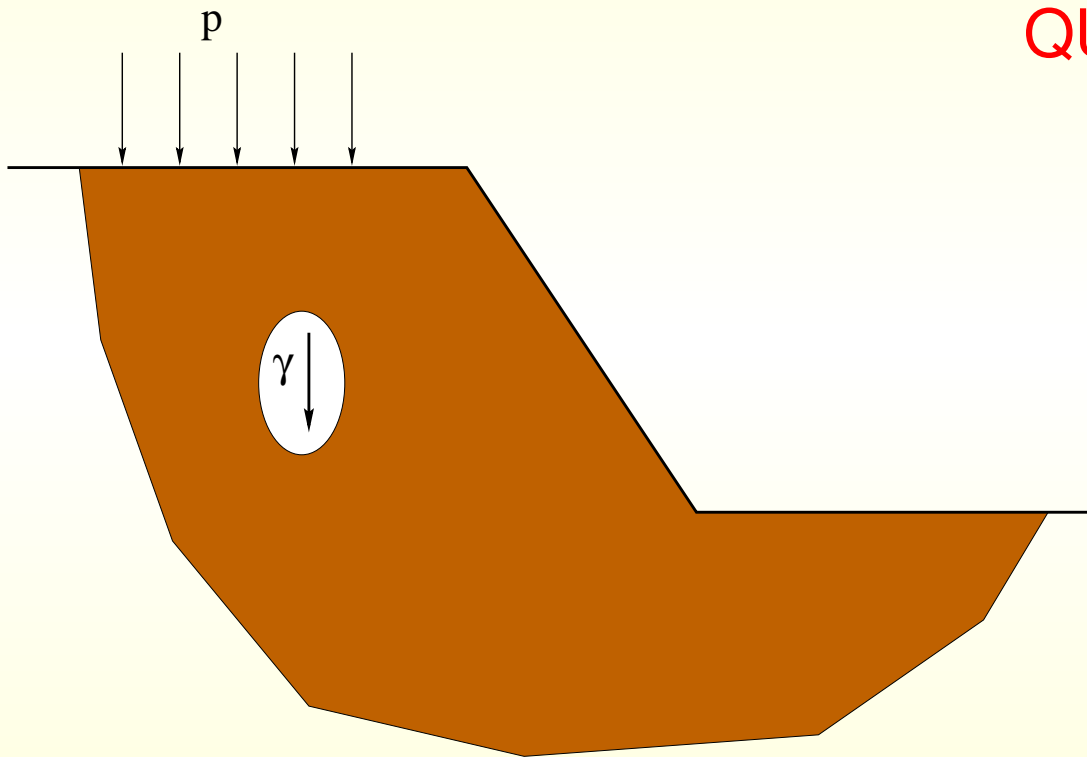


DONNÉES :

- **géométrie**
- **chargement**
- **résistance**

Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite

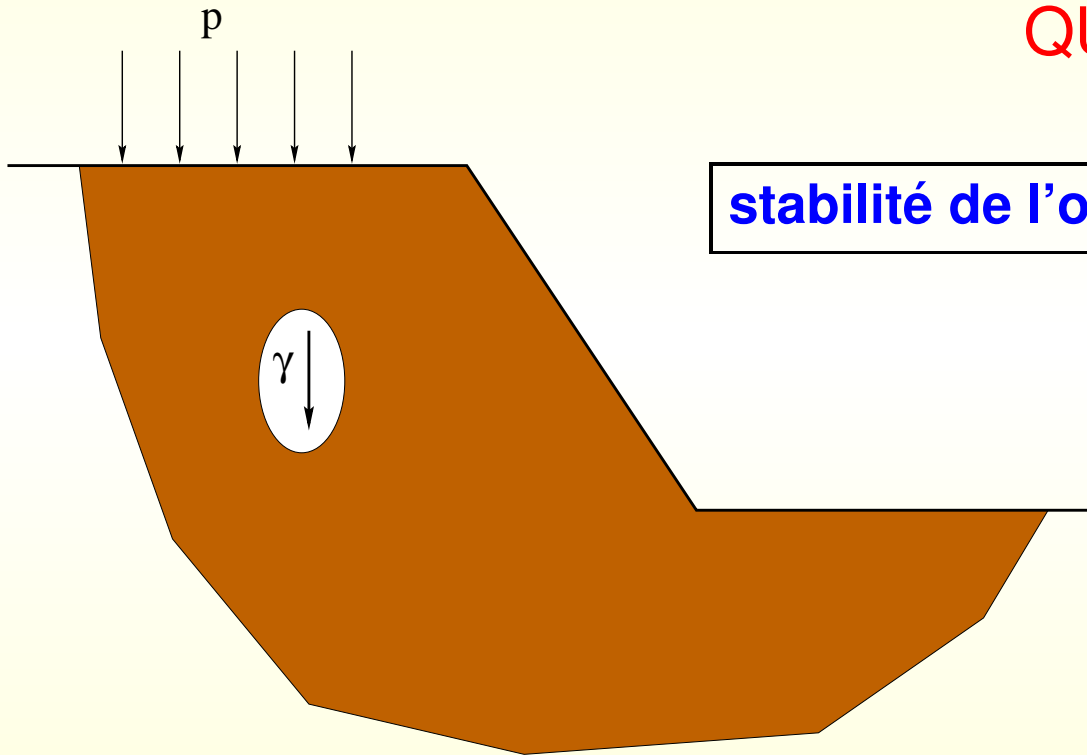
QUESTION :



Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite

QUESTION :

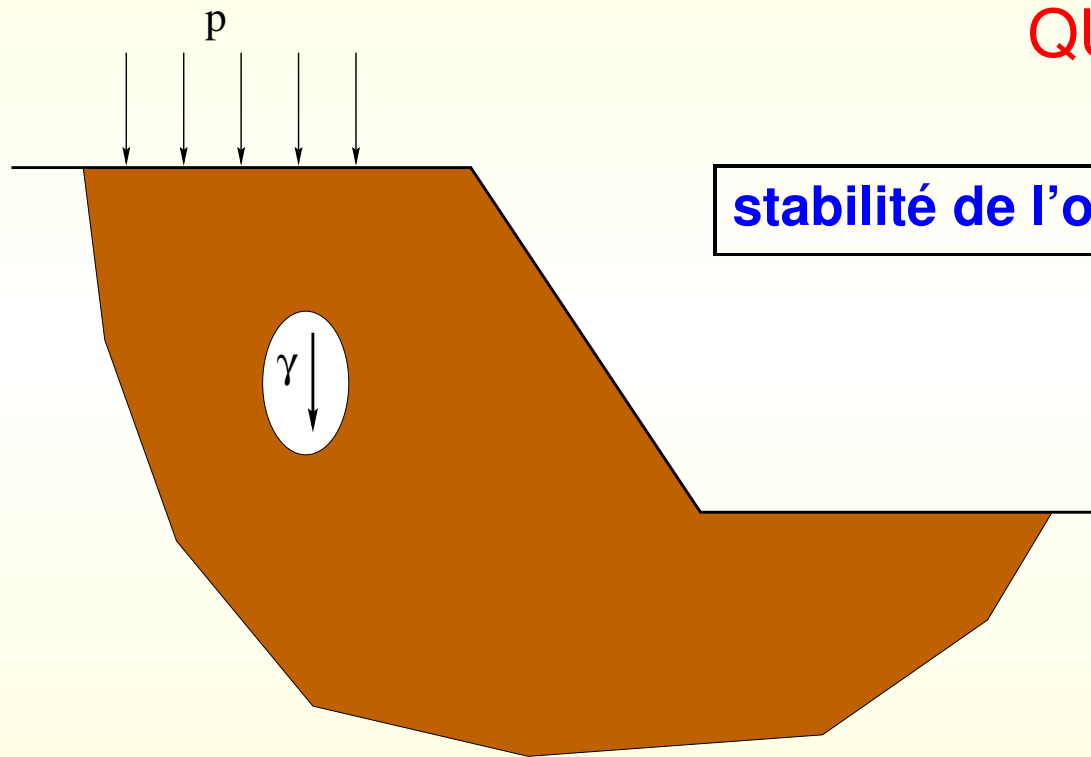
stabilité de l'ouvrage sous son chargement ?



Problématique du Calcul à la Rupture et de l'Analyse Limite

QUESTION :

stabilité de l'ouvrage sous son chargement ?



⇒ 2 démarches possibles

Première démarche : Analyse Limite

≡ Schéma usuel d'un problème de mécanique en HPP

Première démarche : Analyse Limite

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Système matériel soumis à une sollicitation } \underline{Q} \\ \implies \text{Réponse de } \Omega : (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u}) \end{array} \right.$

Première démarche : Analyse Limite

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Système matériel soumis à une sollicitation } \underline{Q} \\ \implies \text{Réponse de } \Omega : (\underline{\sigma}, \underline{u}) \end{array} \right.$

Problème (P) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Equilibre , C.L. , Etat initial} \\ + \\ \text{Loi de Comportement} \end{array} \right.$

Première démarche : Analyse Limite

{ **Système matériel soumis à une sollicitation \underline{Q}**
⇒ Réponse de Ω : $(\underline{\sigma}, \underline{u})$

Problème (P) : { Equilibre , C.L. , Etat initial
+
Loi de Comportement

(P) admet une solution $(\underline{\sigma}, \underline{u})$



\underline{Q} est supportable

Le point de vue du Calcul à la Rupture

→ Une autre voie = Le calcul de stabilité

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Question : $\left[\begin{array}{l} \text{Stabilité de } \Omega \text{ sous } \underline{Q} ? \\ \text{Sollicitations } \underline{Q} \text{ supportables ?} \end{array} \right.$

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Question : $\left[\begin{array}{l} \text{Stabilité de } \Omega \text{ sous } \underline{Q} ? \\ \text{Sollicitations } \underline{Q} \text{ supportables ?} \end{array} \right.$

Pertinence de la démarche

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Question : $\left[\begin{array}{l} \text{Stabilité de } \Omega \text{ sous } \underline{Q} ? \\ \text{Sollicitations } \underline{Q} \text{ supportables ?} \end{array} \right.$

Pertinence de la démarche

→ Chronologie ; coût de calcul

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Question : $\left[\begin{array}{l} \text{Stabilité de } \Omega \text{ sous } \underline{Q} ? \\ \text{Sollicitations } \underline{Q} \text{ supportables ?} \end{array} \right.$

Pertinence de la démarche

- Chronologie ; coût de calcul
- Difficulté d'accès à la L.D.C.

Le point de vue du Calcul à la Rupture

LOI DE COMPORTEMENT INCONNUE

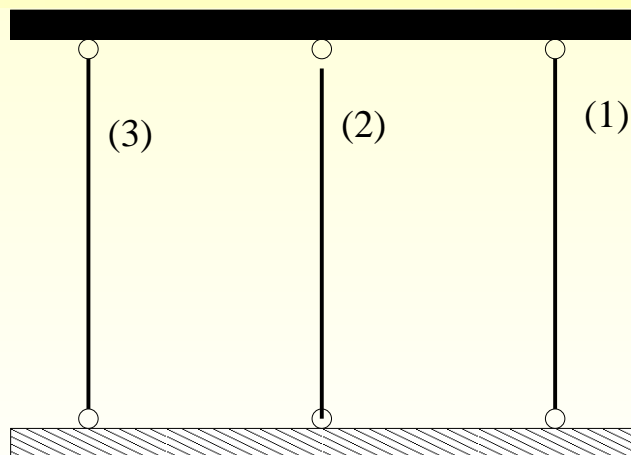
Donnée = domaine de résistance = $\{ \underline{\sigma} \text{ admissibles} \}$

Question : $\left[\begin{array}{l} \text{Stabilité de } \Omega \text{ sous } \underline{Q} ? \\ \text{Sollicitations } \underline{Q} \text{ supportables ?} \end{array} \right.$

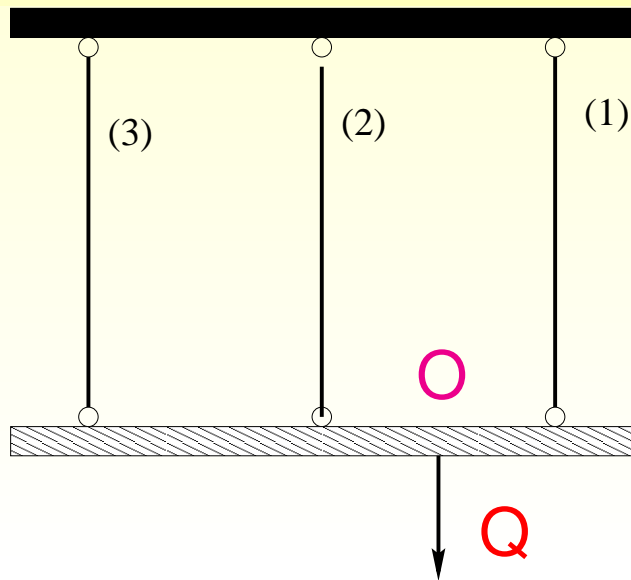
Pertinence de la démarche

- Chronologie ; coût de calcul
- Difficulté d'accès à la L.D.C.
- Difficulté d'accès à l'état de contraintes initial

EXEMPLE

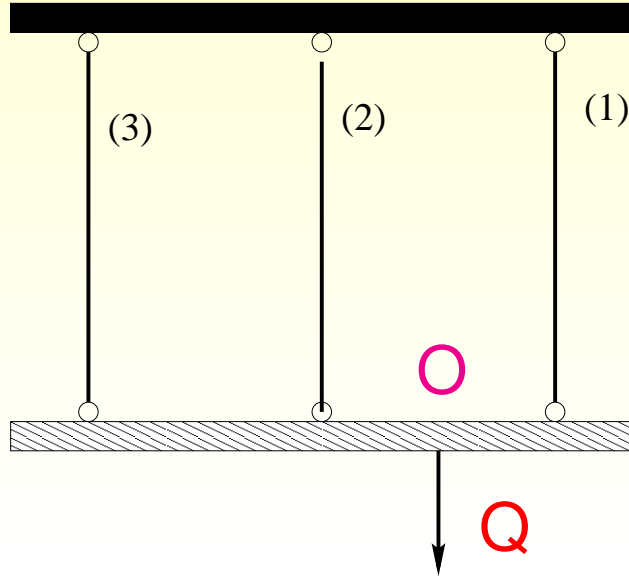


EXEMPLE



Q : Paramètre de chargement

EXEMPLE

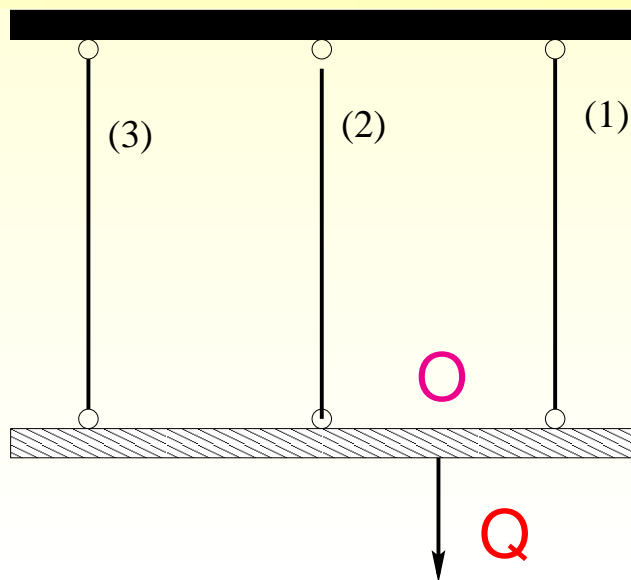


Q : Paramètre de chargement

Donnée (E) :

Résistance ou L.D.C. du matériau
constituant les barres

EXEMPLE



Q : Paramètre de chargement

Donnée (E) : Résistance ou L.D.C. du matériau
constituant les barres

Q étant prescrit, le système est-il stable
compte tenu de la donnée (E) ?

DÉMARCHE CARUP

Donnée (E) = condition de résistance $\longrightarrow |N_i| \leq L$

DÉMARCHE CARUP

Donnée (E) = condition de résistance $\longrightarrow |N_i| \leq L$

Structure stable sous Q $\implies \exists N_i$ tels que :

$$\underline{\text{équilibre :}} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{array} \right.$$

DÉMARCHE CARUP

Donnée (E) = condition de résistance $\longrightarrow |N_i| \leq L$

Structure stable sous Q $\implies \exists N_i$ tels que :

$$\text{équilibre : } \left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{résistance : } \left\{ \begin{array}{l} -L \leq N_1 \leq L \\ -L \leq N_2 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

DÉMARCHE CARUP

Donnée (E) = condition de résistance $\longrightarrow |N_i| \leq L$

Structure stable sous Q $\implies \exists N_i$ tels que :

$$\text{équilibre :} \left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{résistance :} \left\{ \begin{array}{l} -L \leq N_1 \leq L \\ -L \leq N_2 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

$$\text{Equilibre} \iff N_2 = Q/2 - 2 N_3 \quad \& \quad N_1 = Q/2 + N_3$$

DÉMARCHE CARUP

Structure stable sous $Q \implies \exists N_3$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -L \leq Q/2 + N_3 \leq L \\ -L \leq Q/2 - 2N_3 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

DÉMARCHE CARUP

Structure stable sous $Q \implies \exists N_3$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -L \leq Q/2 + N_3 \leq L \\ -L \leq Q/2 - 2N_3 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

$$\text{Stabilité sous } Q \implies Q \in K = [0, 2L]$$

DÉMARCHE CARUP

Structure stable sous $Q \implies \exists N_3$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -L \leq Q/2 + N_3 \leq L \\ -L \leq Q/2 - 2N_3 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

$$\text{Stabilité sous } Q \implies Q \in K = [0, 2L]$$

$Q^+ = 2L$: charge extrême

DÉMARCHE CARUP

Structure stable sous $Q \implies \exists N_3$ tel que :

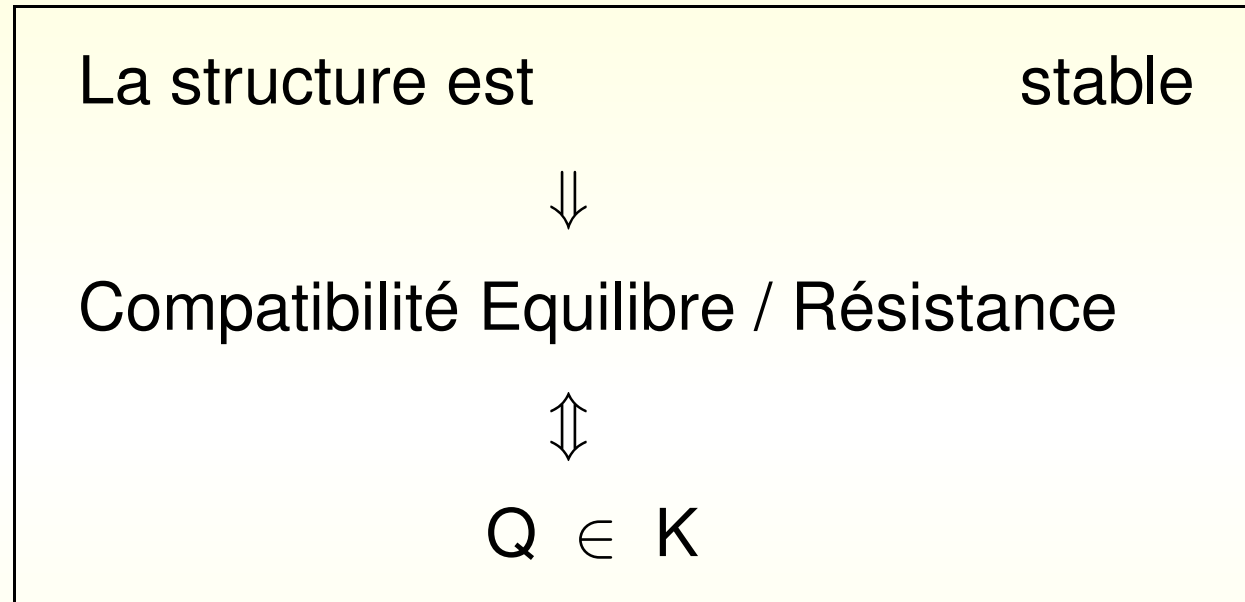
$$\left\{ \begin{array}{l} -L \leq Q/2 + N_3 \leq L \\ -L \leq Q/2 - 2N_3 \leq L \\ -L \leq N_3 \leq L \end{array} \right.$$

Stabilité sous $Q \implies Q \in K = [0, 2L]$

$Q^+ = 2L$: charge extrême

$Q \notin K \implies$ Instabilité certaine sous Q

DÉMARCHE CARUP



La structure est **potentiellement** stable



Compatibilité Equilibre / Résistance



$Q \in K$

K : Domaine des chargements potentiellement supportables

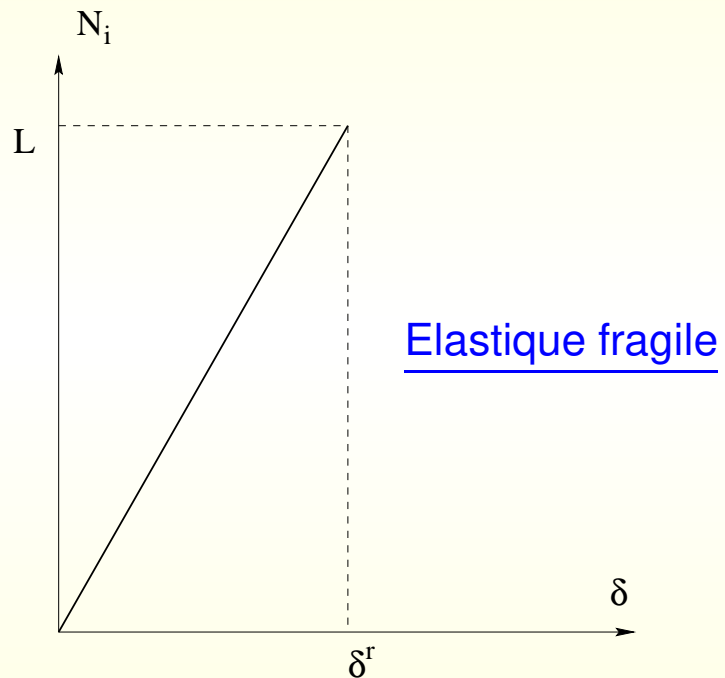
DÉMARCHE ANALYSE LIMITE

→ L.D.C. connue

DÉMARCHE ANALYSE LIMITE

→ L.D.C. connue

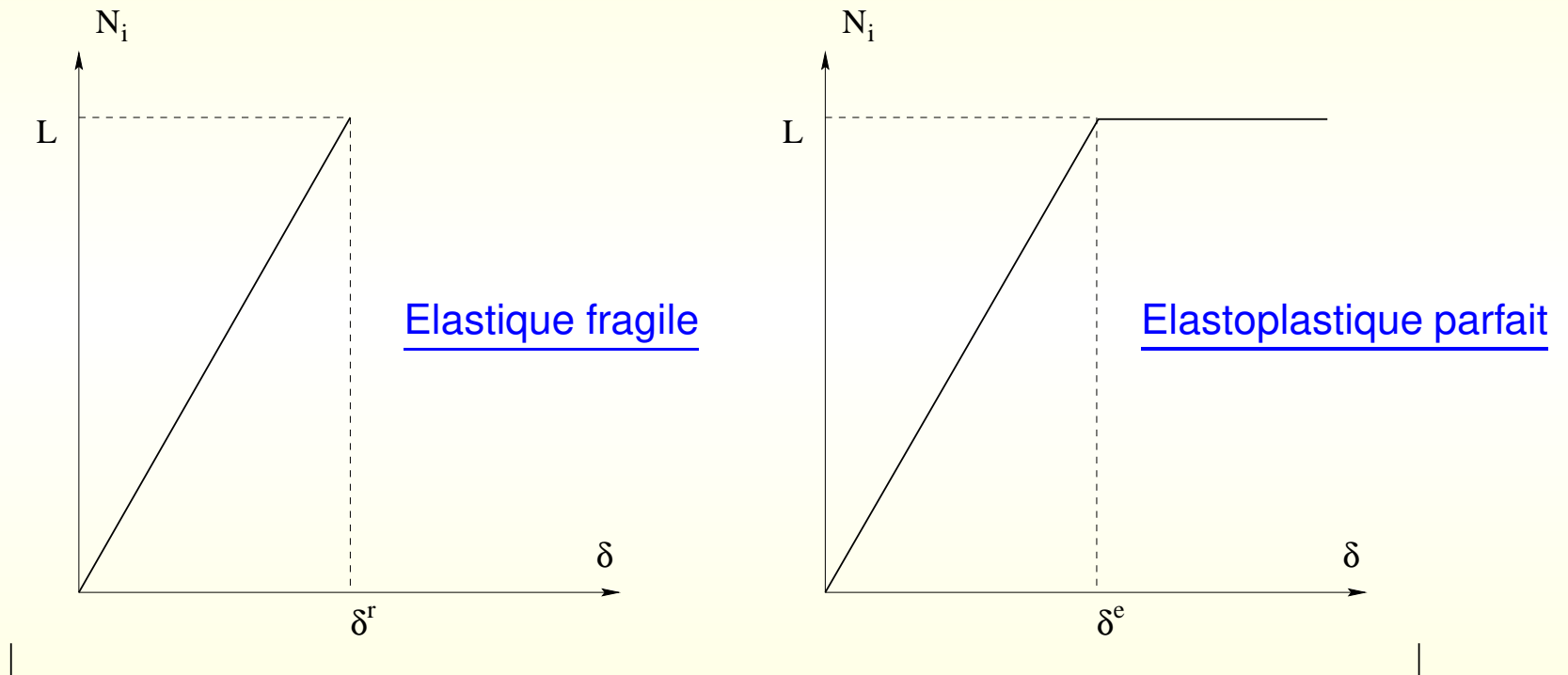
Deux types de L.D.C.



DÉMARCHE ANALYSE LIMITE

→ L.D.C. connue

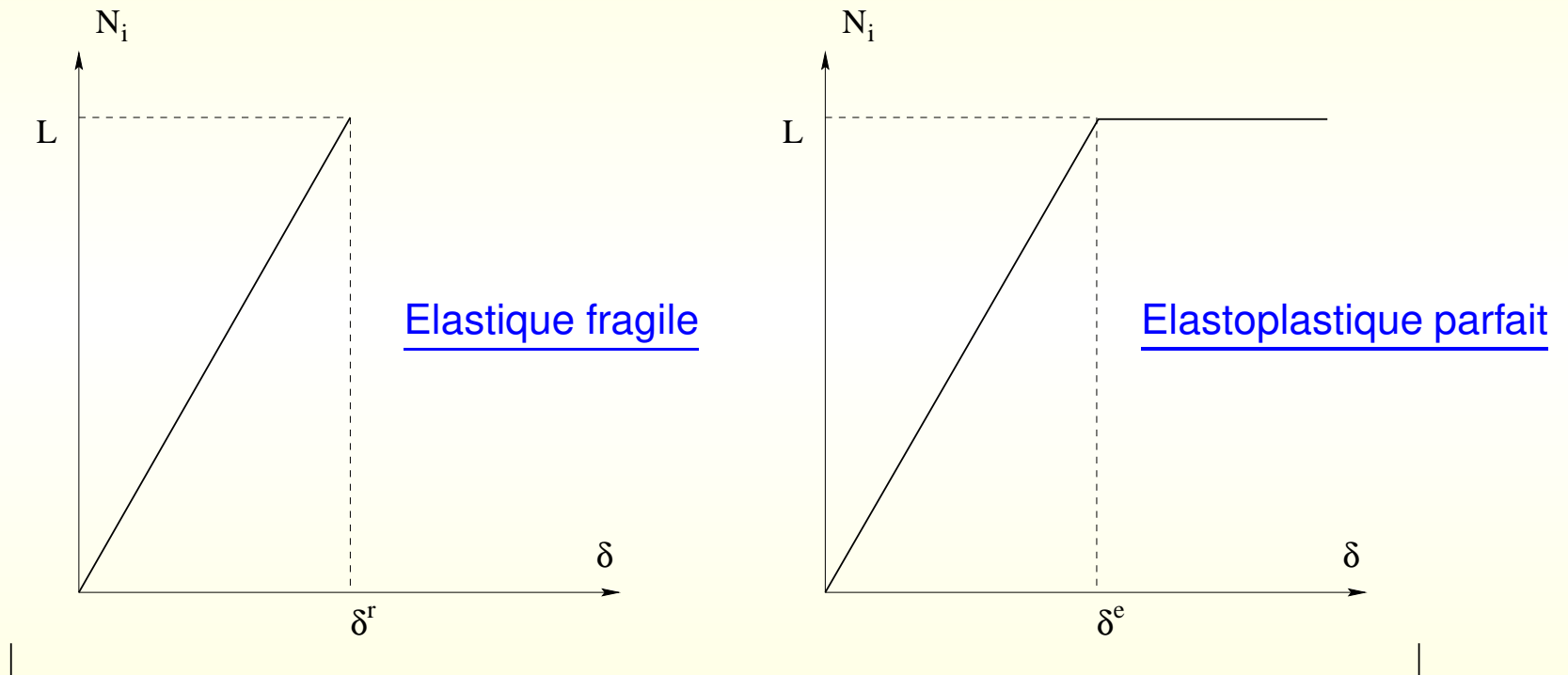
Deux types de L.D.C.



DÉMARCHE ANALYSE LIMITE

→ L.D.C. connue

Deux types de L.D.C.

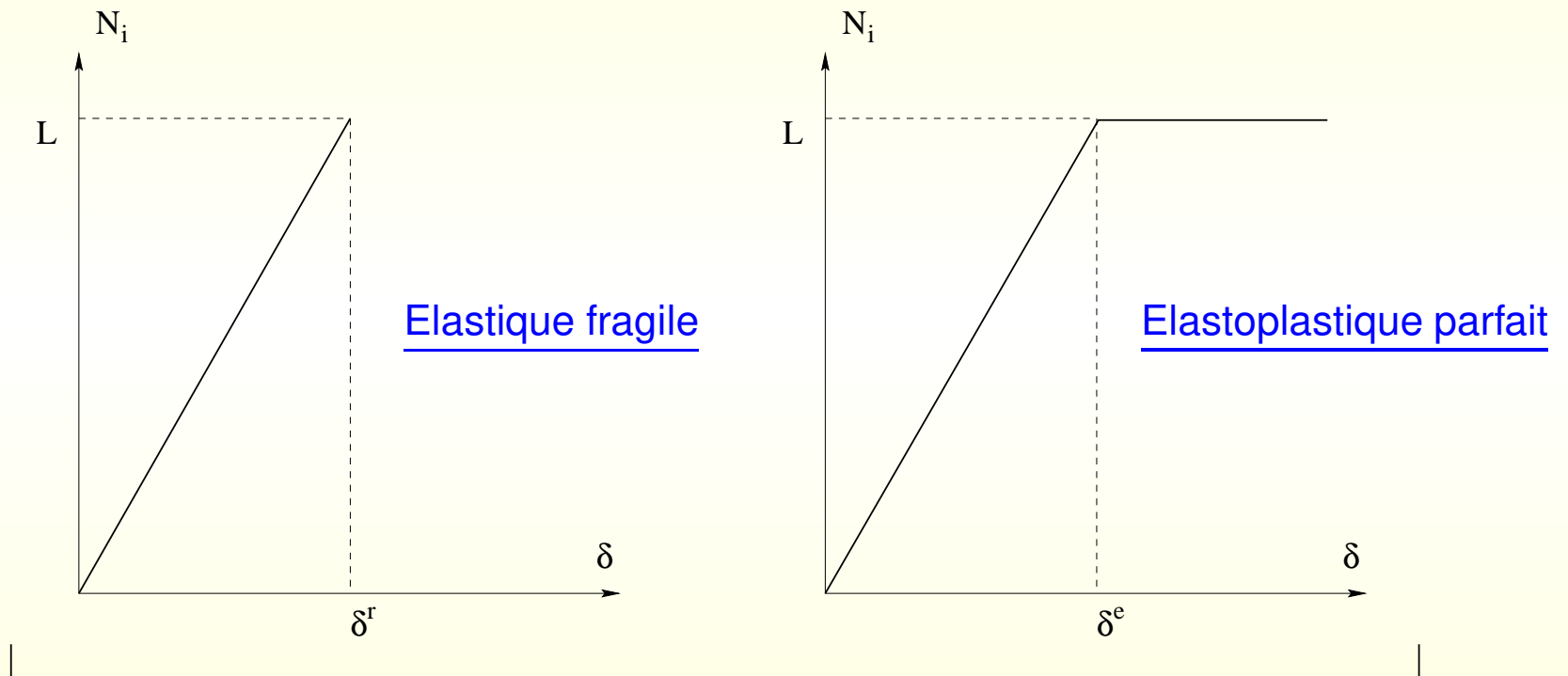


même condition $N_i \leq L$

DÉMARCHE ANALYSE LIMITE

→ L.D.C. connue

Deux types de L.D.C.



même condition $N_i \leq L$

Q^l : charge limite ?

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$Q = 0$, $Q \nearrow$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

$$\bullet \text{ équilibre : } \begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \quad \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

⊕ loi de comportement : $\parallel \quad N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_3)$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

⊕ loi de comportement : $\parallel N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_3)$

Solution :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{7}{12} Q & N_2 = \frac{Q}{3} & N_3 = \frac{Q}{12} \\ \delta_1 = \delta_r \frac{7}{12} \frac{Q}{L} & \delta_2 = \delta_r \frac{Q}{3L} & \delta_3 = \delta_r \frac{Q}{12L} \end{cases}$$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

⊕ loi de comportement : $\parallel N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_3)$

Solution :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{7}{12} Q & N_2 = \frac{Q}{3} & N_3 = \frac{Q}{12} \\ \delta_1 = \delta_r \frac{7}{12} \frac{Q}{L} & \delta_2 = \delta_r \frac{Q}{3L} & \delta_3 = \delta_r \frac{Q}{12L} \end{cases}$$

valable tant que $\forall i \quad N_i \leq L \implies Q \leq \frac{12}{7} L$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

⊕ loi de comportement : $\parallel N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_3)$

Solution :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{7}{12} Q & N_2 = \frac{Q}{3} & N_3 = \frac{Q}{12} \\ \delta_1 = \delta_r \frac{7}{12} \frac{Q}{L} & \delta_2 = \delta_r \frac{Q}{3L} & \delta_3 = \delta_r \frac{Q}{12L} \end{cases}$$

valable tant que $\forall i \quad N_i \leq L \implies Q \leq \frac{12}{7} L$

On ne peut pas poursuivre le chargement au delà de $\frac{12}{7} L \iff Q^l = \frac{12}{7} L$

CAS ÉLASTIQUE FRAGILE

$$Q = 0 \quad , \quad Q \nearrow$$

• équilibre :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3 N_3 + N_2 - N_1 = 0 \end{cases}$$

• compatibilité géométrique : $\parallel \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$

⊕ loi de comportement : $\parallel N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_3)$

Solution :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{7}{12} Q & N_2 = \frac{Q}{3} & N_3 = \frac{Q}{12} \\ \delta_1 = \delta_r \frac{7}{12} \frac{Q}{L} & \delta_2 = \delta_r \frac{Q}{3L} & \delta_3 = \delta_r \frac{Q}{12L} \end{cases}$$

valable tant que $\forall i \quad N_i \leq L \implies Q \leq \frac{12}{7} L$

On ne peut pas poursuivre le chargement au delà de $\frac{12}{7} L \iff Q^l = \frac{12}{7} L$

$$Q^l = \frac{12}{7} L < Q^+ = 2 L$$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

valable tant que : $Q \leq \frac{12}{7} L$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

valable tant que : $Q \leq \frac{12}{7} L$

- Phase élastoplastique :

$Q \nearrow$ au delà de $\frac{12}{7} L$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

valable tant que : $Q \leq \frac{12}{7} L$

- Phase élastoplastique :

$Q \nearrow$ au delà de $\frac{12}{7} L$

La barre (1) est plastifiée $\implies N_1 = L$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

$$\text{valable tant que : } Q \leq \frac{12}{7} L$$

- Phase élastoplastique :

$$Q \nearrow \text{ au delà de } \frac{12}{7} L$$

La barre (1) est plastifiée $\implies N_1 = L$

$$\text{Solution : } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = L \\ N_2 = \frac{3Q}{2} - 2L \\ N_3 = -\frac{Q}{2} + L \end{array} \right.$$

valable tant que $N_2 \leq L$ et $N_3 \leq L$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

$$\text{valable tant que : } Q \leq \frac{12}{7} L$$

- Phase élastoplastique :

$$Q \nearrow \text{ au delà de } \frac{12}{7} L$$

La barre (1) est plastifiée $\implies N_1 = L$

$$\text{Solution : } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = L \\ N_2 = \frac{3Q}{2} - 2L \\ N_3 = -\frac{Q}{2} + L \end{array} \right.$$

valable tant que $N_2 \leq L$ et $N_3 \leq L$

$$\implies Q \leq 2L \quad (N_2 = L)$$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

$$\text{valable tant que : } Q \leq \frac{12}{7} L$$

- Phase élastoplastique :

$$Q \nearrow \text{ au delà de } \frac{12}{7} L$$

La barre (1) est plastifiée $\implies N_1 = L$

$$\text{Solution : } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = L \\ N_2 = \frac{3Q}{2} - 2L \\ N_3 = -\frac{Q}{2} + L \end{array} \right.$$

valable tant que $N_2 \leq L$ et $N_3 \leq L$

$$\implies Q \leq 2L \quad (N_2 = L)$$

Le chargement ne peut être poursuivi au delà de $2L \iff Q^l = 2L$

CAS ÉLASTOPLASTIQUE PARFAIT

- Phase élastique : (toutes les barres restent élastiques)

$$\text{valable tant que : } Q \leq \frac{12}{7} L$$

- Phase élastoplastique :

$$Q \nearrow \text{ au delà de } \frac{12}{7} L$$

La barre (1) est plastifiée $\implies N_1 = L$

$$\text{Solution : } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = L \\ N_2 = \frac{3Q}{2} - 2L \\ N_3 = -\frac{Q}{2} + L \end{array} \right.$$

valable tant que $N_2 \leq L$ et $N_3 \leq L$

$$\implies Q \leq 2L \quad (N_2 = L)$$

Le chargement ne peut être poursuivi au delà de $2L \iff Q^l = 2L$

$$Q^+ = Q^l = 2L$$

RÉCAPITULATIF

RÉCAPITULATIF

- Elastique fragile :

$$Q^l = \frac{12}{7} L < Q^+ = 2 L$$

Q^+ non atteint

RÉCAPITULATIF

- Elastique fragile :

$$Q^l = \frac{12}{7} L < Q^+ = 2 L$$

Q^+ non atteint

- Elastique parfaitement plastique :

$$Q^l = 2 L = Q^+$$

RÉCAPITULATIF

- Elastique fragile :

$$Q^l = \frac{12}{7} L < Q^+ = 2 L$$

Q^+ non atteint

- Elastique parfaitement plastique :

$$Q^l = 2 L = Q^+$$

Pertinence acquise lorsque DUCTILITÉ