

# APPROCHE CINÉMATIQUE

**2013-2014**

Denis Garnier \* Anne-Sophie Colas \*\* , Jean-Claude Morel \*\*\*

\* Laboratoire Navier, ENPC.      email : [denis.garnier@enpc.fr](mailto:denis.garnier@enpc.fr)

\*\* IFSTTAR.                      email : [Anne-Sophie.Colas@ifsttar.fr](mailto:Anne-Sophie.Colas@ifsttar.fr)

\*\*\* DGCB, ENTPE.              email : [jeanclaude.morel@entpe.fr](mailto:jeanclaude.morel@entpe.fr)

# Plan du cours

**20/09 Introduction au raisonnement du calcul à la rupture et analyse**

**limite** : Charge extrême et charge limite d'une structure réticulée

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

**27/09 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur.**

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

**04/10 Travaux dirigés : approche statique**

PC : 3h

**11/10 Approche cinématique du calcul à la rupture. Fonctions " $\pi$ ".**

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

**18/10 Travaux dirigés : approche cinématique**

PC : 3h

**25/10 Poutres en flexion**

Amphi : 1h30 ; PC : 1h30

**8/11 Modélisation mixte (1h) ; TP TALREN (2h)**

**15/11 Travaux dirigés : poutres en flexion**

PC : 3h

**22/12 Contrôle des connaissances**

# CALCUL À LA RUPTURE

$$\mathcal{K} = \{\text{chargements potentiellement supportables}\} \subset \mathcal{R}^n$$

# CALCUL À LA RUPTURE

$$\mathcal{K} = \{\text{chargements potentiellement supportables}\} \subset \mathcal{R}^n$$

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$

# CALCUL À LA RUPTURE

$\mathcal{K} = \{\text{chargements potentiellement supportables}\} \subset \mathcal{R}^n$

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$\exists \underline{\sigma}$  S.A. avec  $\underline{Q}$

(a)

t.q.

$\forall \underline{x} \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x})$

(b)

# CALCUL À LA RUPTURE

$\mathcal{K} = \{\text{chargements potentiellement supportables}\} \subset \mathcal{R}^n$

$$\boxed{\underline{Q} \in \mathcal{K}} \iff \boxed{\begin{array}{l} \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ \text{t.q.} \\ \forall \underline{x} \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x}) \end{array}} \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array}$$

(a) ÉQUILIBRE  $\longrightarrow$  structure

(b) RÉSISTANCE  $\longrightarrow$  matériau

# APPROCHE CINÉMATIQUE

- Objectif :

Mettre en œuvre une méthode d'approche par l'extérieur  
du domaine  $\mathcal{K}$

# APPROCHE CINÉMATIQUE

- Objectif :

Mettre en œuvre une méthode d'approche par l'extérieur  
du domaine  $\mathcal{K}$

- Moyen :

Principe des puissances virtuelles ( P.P.V. )

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \quad (1)$$



# APPROCHE CINÉMATIQUE

- Objectif :

Mettre en œuvre une méthode d'approche par l'extérieur du domaine  $\mathcal{K}$

- Moyen :

Principe des puissances virtuelles ( P.P.V. )

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \quad (1)$$



$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket dS \quad (2)$$

$\forall \underline{v} \text{ C.A.}$

# APPROCHE CINÉMATIQUE

- Objectif :

Mettre en œuvre une méthode d'approche par l'extérieur  
du domaine  $\mathcal{K}$

- Moyen :

Principe des puissances virtuelles ( P.P.V. )

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \quad (1)$$



$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket dS \quad (2)$$

$\forall \underline{v} \text{ C.A.}$

$$\text{ÉQUILIBRE} = \left[ \begin{array}{l} \text{Ecriture (1)} \\ \text{ou bien} \\ \text{Ecriture (2)} \end{array} \right.$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$$\forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \, dS \quad (1)$$

$$\forall \underline{x} \in V \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (2)$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$$\forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \, dS \quad (1)$$

$$\forall \underline{x} \in V \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (2)$$

## Définitions

- $\forall \underline{x} \in V \setminus \Sigma$   
 $\pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})} \{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}) \}$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$$\forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \, dS \quad (1)$$

$$\forall \underline{x} \in V \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (2)$$

## Définitions

- $\forall \underline{x} \in V \setminus \Sigma$

$$\pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})} \{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}) \}$$

- $\forall \underline{x} \in \Sigma$

$$\pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})} \{ \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \}$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

(1) et (2)  $\implies$

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \, dS \leq \int_V \pi(\underline{\underline{d}}) \, dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket) \, dS$$

$\forall \underline{v} \text{ C.A.}$

## Définitions

- $\forall \underline{x} \in V \setminus \Sigma$   
$$\pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})} \{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}) \}$$
- $\forall \underline{x} \in \Sigma$   
$$\pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})} \{ \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \}$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq \int_V \pi(\underline{\underline{d}}) dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket) dS = P_{rm}(\underline{v})$$

$P_{rm}(\underline{v})$  : Puissance résistante maximale



# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq \int_V \pi(\underline{\underline{d}}) dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket) dS = P_{rm}(\underline{v})$$

$P_{rm}(\underline{v})$  : Puissance résistante maximale

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\underline{v})$$

# PRINCIPE DE L'APPROCHE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K}$$



$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq \int_V \pi(\underline{\underline{d}}) dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket) dS = P_{rm}(\underline{v})$$

$P_{rm}(\underline{v})$  : Puissance résistante maximale

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\underline{v})$$

Théorème cinématique :

$$\begin{aligned} \text{si } \exists \underline{v} \text{ C.A. t.q. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} > P_{rm}(\underline{v}) \\ \implies \underline{Q} \notin \mathcal{K} \end{aligned}$$

# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

1) Calcul de  $P_{rm}(\underline{v})$

# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

1) Calcul de  $P_{rm}(\underline{v})$

2) Exprimer  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$

# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

1) Calcul de  $P_{rm}(\underline{v})$

$$\mathcal{K} \subset \{ \underline{Q} \text{ t.q. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} - P_{rm}(\underline{v}) \leq 0 \}$$

2) Exprimer  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$

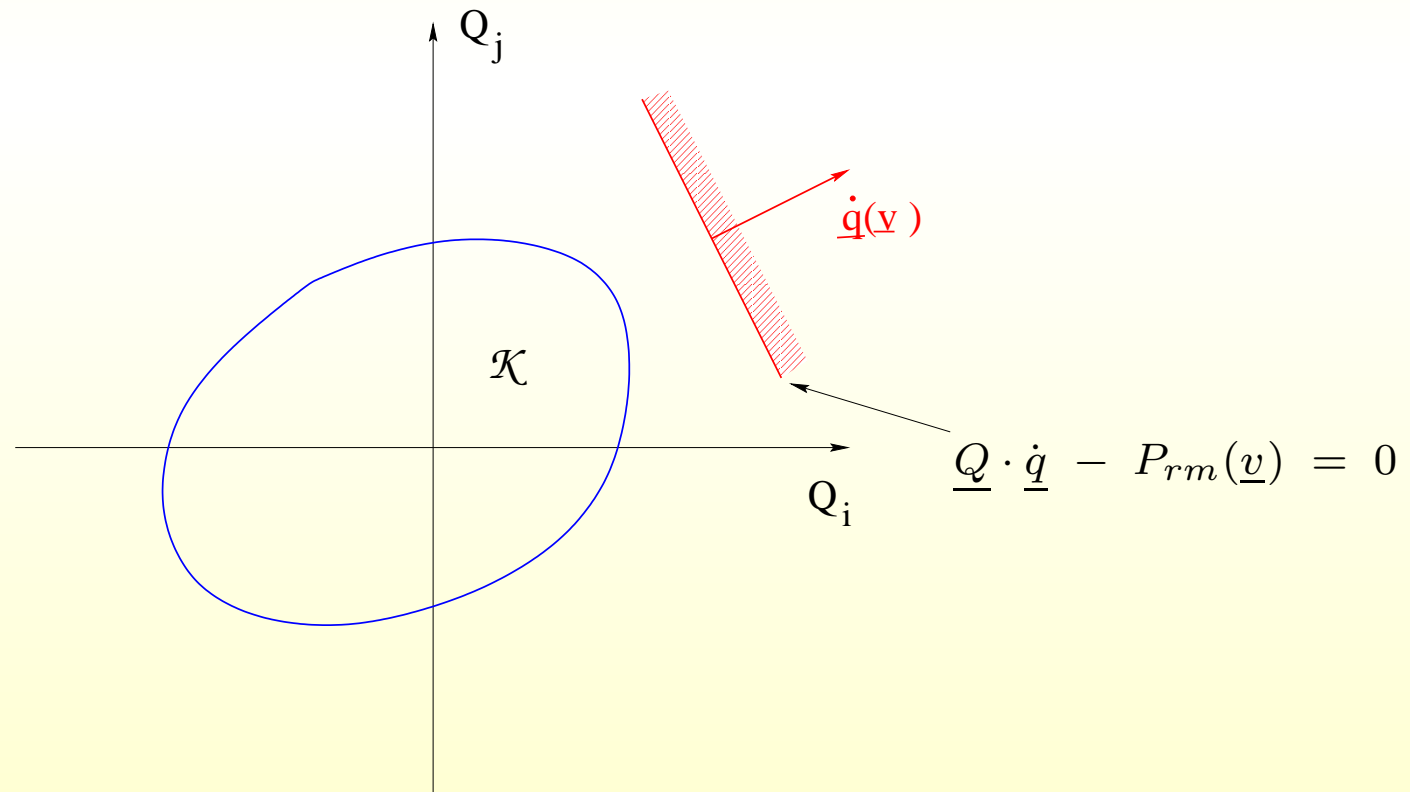
# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

1) Calcul de  $P_{rm}(\underline{v})$

$$\mathcal{K} \subset \{ \underline{Q} \text{ t.q. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} - P_{rm}(\underline{v}) \leq 0 \}$$

2) Exprimer  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$



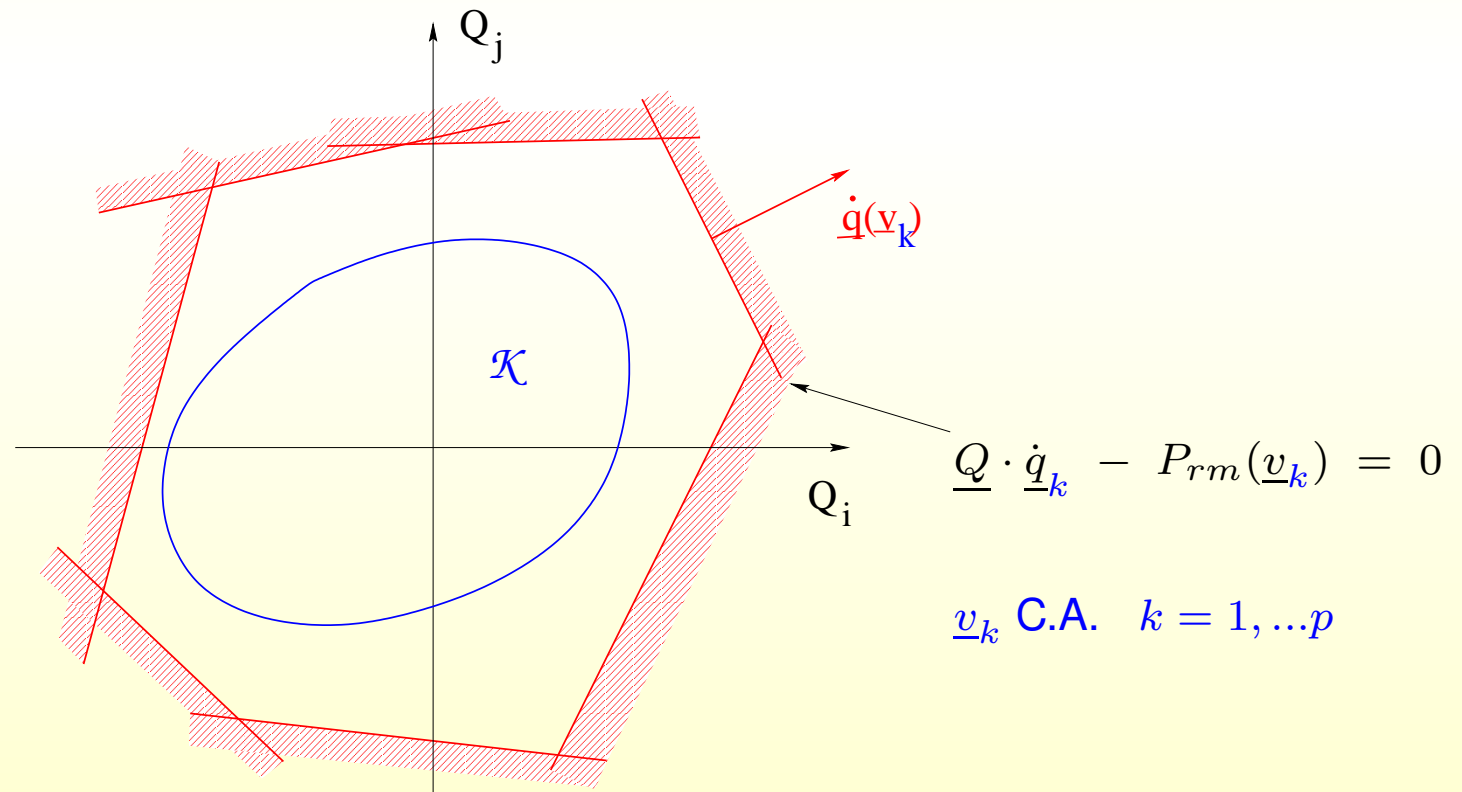
# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

v C.A. quelconque

1) Calcul de  $P_{rm}(\underline{v})$

$$\mathcal{K} \subset \{ \underline{Q} \text{ t.q. } \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} - P_{rm}(\underline{v}) \leq 0 \}$$

2) Exprimer  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$



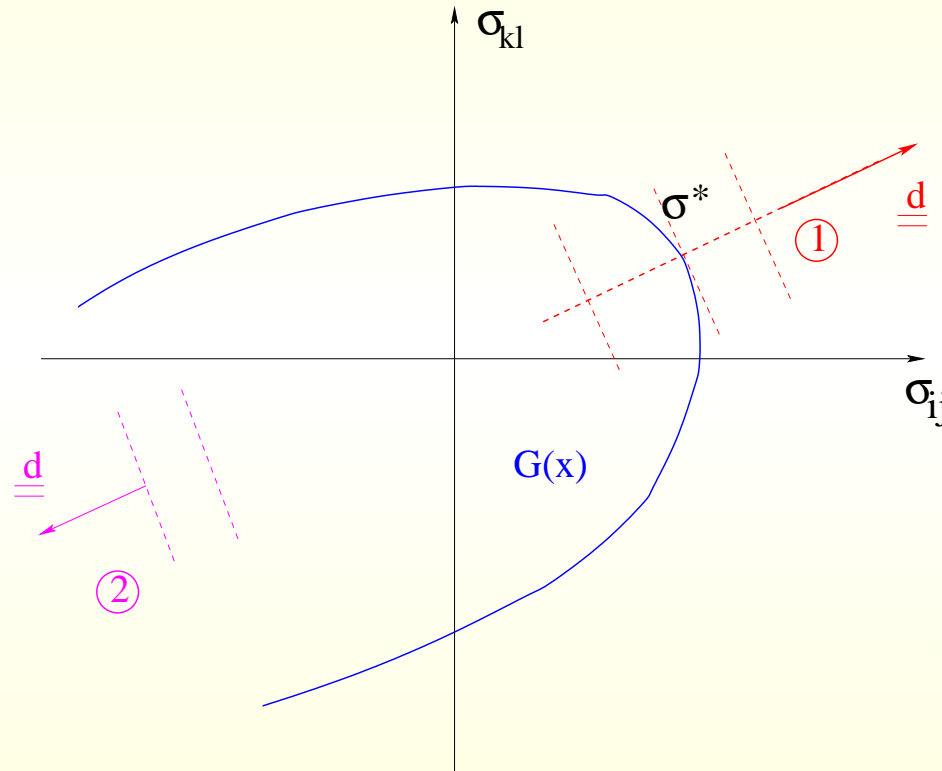


## Fonctions “ $\pi$ ”

- Fonctions  $\pi(\underline{d})$   $\forall \underline{d} \quad \pi(\underline{d}) = \sup_{\underline{\sigma} \in G(\underline{x})} \{\underline{\sigma} : \underline{d}\}$

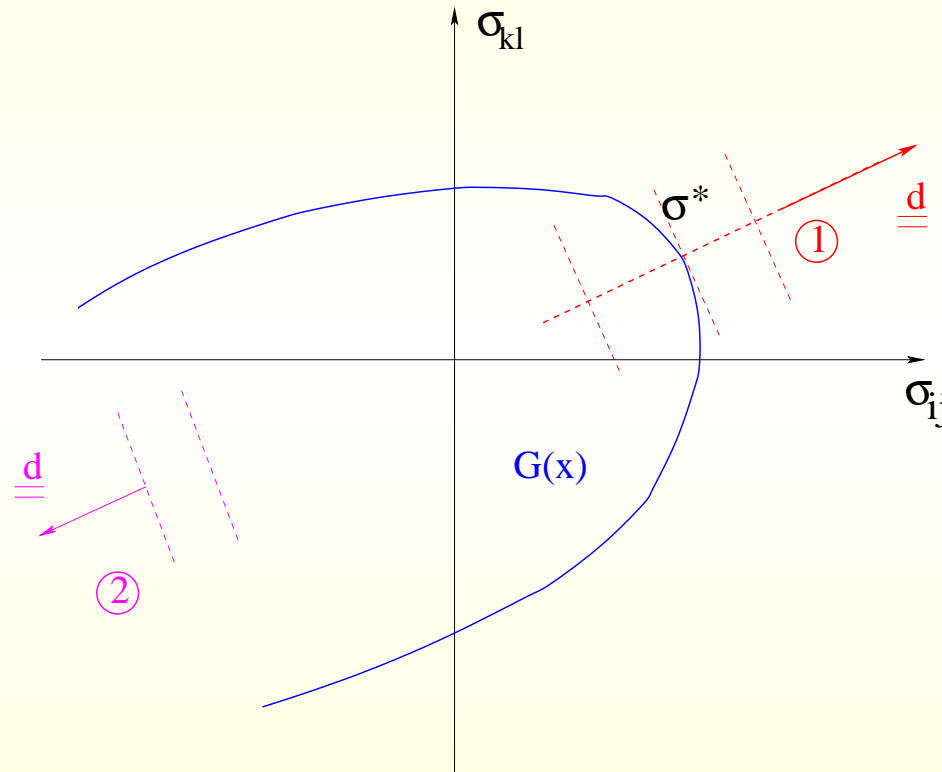
# Fonctions “ $\pi$ ”

- Fonctions  $\pi(\underline{d})$   $\forall \underline{d} \quad \pi(\underline{d}) = \sup_{\underline{\sigma} \in G(\underline{x})} \{ \underline{\sigma} : \underline{d} \}$



# Fonctions “ $\pi$ ”

• Fonctions  $\pi(\underline{\underline{d}})$        $\forall \underline{\underline{d}} \quad \pi(\underline{\underline{d}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{\underline{x}})} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \}$



Cas 1 :  $\pi(\underline{\underline{d}}) = \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}$

$\underline{\underline{d}}$  : normale extérieure en  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  à  $\partial G(\underline{\underline{x}})$

Cas 2 :  $\pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty$

## Fonctions “ $\pi$ ”

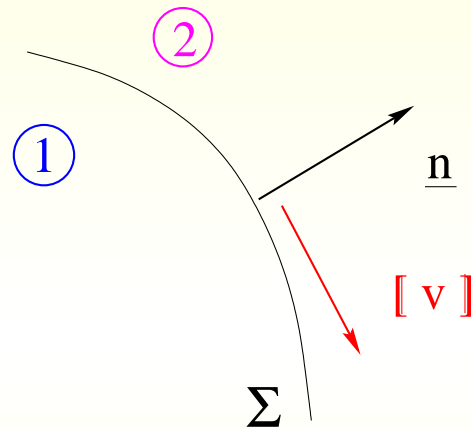
- Tresca ou von Misès

$$\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \iff \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{v} \rrbracket \text{ tangentiel à } \Sigma$$

## Fonctions “ $\pi$ ”

- Tresca ou von Misès

$$\pi(\underline{n}, [[\underline{v}]]) < +\infty \iff [[\underline{v}]] \cdot \underline{n} = 0 \quad [[\underline{v}]] \text{ tangentiel à } \Sigma$$

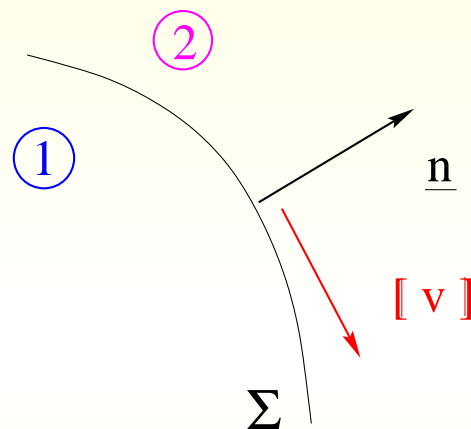


$$[[\underline{v}]] = \underline{v}^{(2)} - \underline{v}^{(1)}$$

## Fonctions “ $\pi$ ”

- Tresca ou von Misès

$$\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \iff \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{v} \rrbracket \text{ tangentiel à } \Sigma$$



$$\llbracket \underline{v} \rrbracket = \underline{v}^{(2)} - \underline{v}^{(1)}$$

- Coulomb

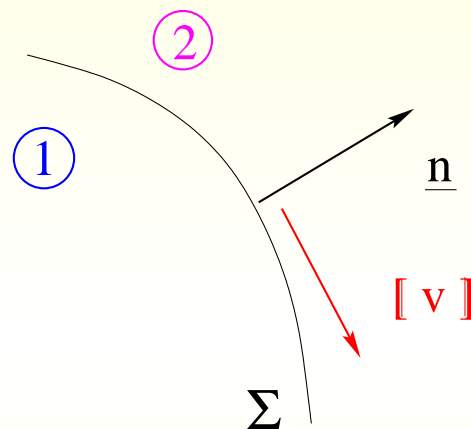
$$\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \iff \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq |\llbracket \underline{v} \rrbracket| \sin \varphi$$

$\llbracket \underline{v} \rrbracket$  décollement à  $\varphi$

# Fonctions “ $\pi$ ”

- Tresca ou von Misès

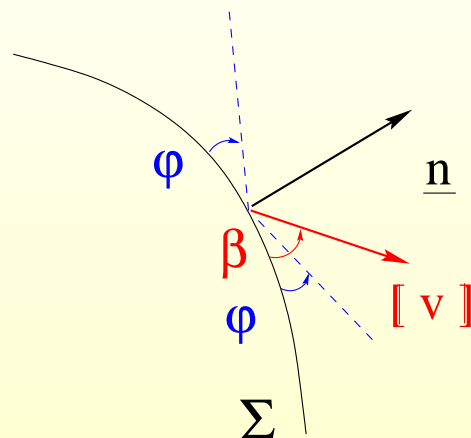
$$\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \iff \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \llbracket \underline{v} \rrbracket \text{ tangentiel à } \Sigma$$



$$\llbracket \underline{v} \rrbracket = \underline{v}^{(2)} - \underline{v}^{(1)}$$

- Coulomb

$$\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \iff \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq |\llbracket \underline{v} \rrbracket| \sin \varphi$$



$\llbracket \underline{v} \rrbracket$  décollement à  $\varphi$

$$\varphi \leq \beta \leq \pi - \varphi$$

# PROPRIÉTÉS

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{l} \pi(\underline{d}) \geq 0 \quad \forall \underline{d} \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) \geq 0 \quad \forall \underline{v} \end{array} \right.$$

$$\implies \boxed{P_{rm}(\underline{v}) \geq 0}$$



# PROPRIÉTÉS

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{l} \pi(\underline{d}) \geq 0 \quad \forall \underline{d} \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) \geq 0 \quad \forall \underline{v} \end{array} \right.$$

$$\implies \boxed{P_{rm}(\underline{v}) \geq 0}$$

$$\text{b) } \left[ \begin{array}{l} \pi(\alpha \underline{d}) = \alpha \pi(\underline{d}) \quad \alpha \geq 0 \quad \forall \underline{d} \\ \pi(\underline{n}, \alpha \llbracket \underline{v} \rrbracket) = \alpha \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) \end{array} \right.$$

Positivement homogène de degré 1

# PROPRIÉTÉS

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{l} \pi(\underline{d}) \geq 0 \quad \forall \underline{d} \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) \geq 0 \quad \forall \underline{v} \end{array} \right.$$

$$\implies \boxed{P_{rm}(\underline{v}) \geq 0}$$

$$\text{b) } \left[ \begin{array}{l} \pi(\alpha \underline{d}) = \alpha \pi(\underline{d}) \quad \alpha \geq 0 \quad \forall \underline{d} \\ \pi(\underline{n}, \alpha \llbracket \underline{v} \rrbracket) = \alpha \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) \end{array} \right.$$

Positivement homogène de degré 1

$$\text{c) } \left[ \begin{array}{l} \text{Les fonctions } \pi \text{ sont convexes de } \underline{d} \text{ (resp. } \underline{v} \text{)} \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \\ \pi(\alpha_1 \underline{d}_1 + \alpha_2 \underline{d}_2) \leq \alpha_1 \pi(\underline{d}_1) + \alpha_2 \pi(\underline{d}_2) \end{array} \right.$$

# CHARGEMENT À UN PARAMÈTRE

$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\mathcal{K} = [Q^-, Q^+] \subset \{Q / Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})\}$$

# CHARGEMENT À UN PARAMÈTRE

$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\mathcal{K} = [Q^-, Q^+] \subset \{Q \mid Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})\}$$

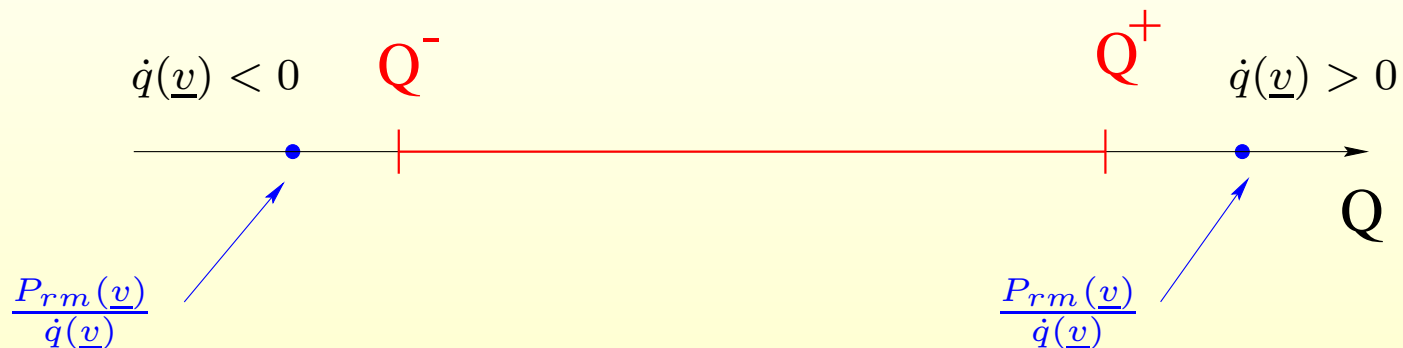
$$\begin{array}{ll} Q^+ \leq \frac{P_{rm}(\underline{v})}{\dot{q}(\underline{v})} & \dot{q}(\underline{v}) > 0 \\ Q^- \geq \frac{P_{rm}(\underline{v})}{\dot{q}(\underline{v})} & \dot{q}(\underline{v}) < 0 \end{array}$$

# CHARGEMENT À UN PARAMÈTRE

$\forall \underline{v}$  C.A.

$$\mathcal{K} = [Q^-, Q^+] \subset \{Q / Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})\}$$

$$\begin{aligned} Q^+ &\leq \frac{P_{rm}(\underline{v})}{\dot{q}(\underline{v})} & \dot{q}(\underline{v}) &> 0 \\ Q^- &\geq \frac{P_{rm}(\underline{v})}{\dot{q}(\underline{v})} & \dot{q}(\underline{v}) &< 0 \end{aligned}$$



## MISE EN ŒUVRE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})$$

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})$$

Approche non triviale si et seulement si :

- 1)  $\underline{\dot{q}}(\underline{v}) \neq 0$
- 2)  $P_{rm}(\underline{v}) < +\infty$

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})$$

Approche non triviale si et seulement si :

- 1)  $\dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0$
- 2)  $P_{rm}(\underline{v}) < +\infty$

Définition :

$$\underline{v} \text{ est pertinent} \iff P_{rm}(\underline{v}) < +\infty$$



## MISE EN ŒUVRE

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \implies \forall \underline{v} \text{ C.A.} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v})$$

Approche non triviale si et seulement si :

- 1)  $\underline{\dot{q}}(\underline{v}) \neq 0$
- 2)  $P_{rm}(\underline{v}) < +\infty$

Définition :

$$\underline{v} \text{ est pertinent} \iff P_{rm}(\underline{v}) < +\infty$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} \pi(\underline{d}) < +\infty \\ \text{et} \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) < +\infty \end{array} \right.$$

- Champs de vitesse utilisés ( mécanisme de rupture )
  - simples
  - s'inspirer de la “réalité”
  - imagination