IBD indice de sérialité dynamique qui permet de choisir le n.° de points Gauss

ENTPE, Département Génie Civil et Bâtiment.

Cours de Méthodes numériques - 2ème partie

ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Examen du 30 Novembre 2011

(durée conseillée 30 mn)

QUESTION

Dans le cours, qu'appelle-t-on "ISD" ? A quoi sert ce paramètre et de quelle grandeur physique importante dépend-il ? Pour la méthode des éléments finis, comment appelle-t-on l'erreur numérique "cumulative" qui dépend du rapport entre la taille des éléments et cette même grandeur physique ?

Err cr.

EXERCICE : Analyse d'une poutre en torsion par équations intégrales.

On étudie une poutre cylindrique soumise à un **chargement de torsion** m_t autour de l'axe x. En élasticité infinitésimale, la rotation $\theta(x)$, autour de x, des points de la poutre est régie par l'équation différentielle du **2ème ordre** :

$$GJ\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m_t = 0$$

où G est le module de cisaillement et J l'inertie de torsion.

On considère le cas particulier d'une poutre console de longueur L soumise à un moment de torsion m_t exercé en $x = x_P = L$ (Fig. 1). On négligera les forces de pesanteur. La poutre est encastrée à gauche (point O) alors que le mouvement de l'extrémité droite est libre (point P).

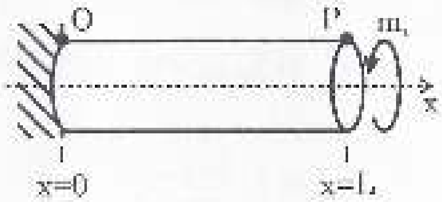


Figure 1: Poutre console soumise à un moment de torsion à son extrémité.

L'objectif de cet exercice est de résoudre ce problème simple par la méthode des équations intégrales présentée en début de cours. Pour ce faire, on adoptera une *méthode de résolution indirecte*. On rappelle que le moment de torsion $M_t(x)$ dans une poutre est lié à la rotation $\theta(x)$ par la relation :

$$M_t(x) = GJ\frac{d\theta(x)}{dx}$$

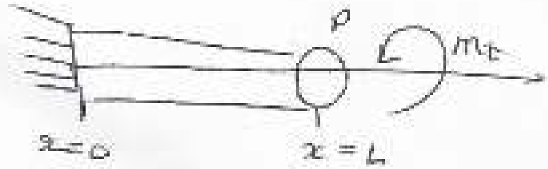
1. En notant $\mu_t(y)$ le *moment de torsion concentré* exercé en un point d'abscisse y, déterminer la *solution élémentaire* $\{\theta^*_\mu(x,y); M^*_\mu(x,y)\}$ du problème posé[1].

2. Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution élémentaire et déterminer les valeurs de moment de torsion concentré $\mu_t(0)$ et $\mu_t(L)$ à imposer pour retrouver le problème posé.

3. En déduire la solution $\theta(x)$ du problème et commenter.

[1] On rappelle que, contrairement au cas étudié en cours, les seules inconnues du problème considéré ici sont la rotation $\theta(x)$ et le moment de torsion $M_t(x)$. La solution élémentaire $\{\theta^*_\mu; M^*_\mu\}$ suffit donc à résoudre entièrement le problème.

$\boxed{\text{Annale 2011}}$



$$GJ\,\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m_t = 0$$

$$M_t(x) = GJ\,\frac{d\theta(x)}{dx}$$

① $$\frac{GJ\,d^2\theta_M(x)}{dx^2} = -M_t(x) = -M_t\,\delta(x-y).$$

$$GJ\,\frac{d\theta_M(x)}{dx} = -\frac{M_t}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y).$$

$$GJ\,\theta_M(x) = -\frac{M_t}{2}\,|x-y|.$$

$$\boxed{\theta_M(x) = -\frac{M_t}{2GJ}\,|x-y|} \quad \text{et} \quad \boxed{M_t(x) = -\frac{M_t}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y)}$$

② Condi° aux limites

$M_t(P) = m_t$ extremité droite est libre

$\theta(0) = 0$ (la poutre est encastré).

* $$\theta_M(x) = \theta_{M_t}(0) + \theta_{M_t}(L) = -\frac{M_t(0)}{2GJ}\,|x| - \frac{M_t(L)}{2GJ}\,|x-L|$$

soit $$\theta_M(0) = 0 = -\cancel{\frac{M_t(0)}{2GJ}\times 0} - \frac{M_t(L)}{2GJ}\,L \Rightarrow \frac{-M_t(L)\times L}{2GJ} = 0$$

$$\boxed{-M_t(L) = 0}$$

* $$M_t(x) = M_t(0) + M_t(L)$$

$$= -\frac{M_t(0)}{2}\,\mathrm{sgn}(x) - \frac{M_t(L)}{2}\,\mathrm{sgn}(x-L).$$

$$M_t(P) = -\frac{M_t(0)}{2}\,\mathrm{sgn}(L) - \frac{M_t(L)}{2}\,\overset{+}{\mathrm{sgn}(L-L)} = m_t$$

$$-\frac{M_t(0)}{2} - \frac{M_t(L)}{2} = m_t \quad \text{or } M_t(L) = 0$$

alor $\boxed{+M_t(0) = -2m_t}$ $\qquad \theta_M(x) = \dfrac{-(-\cancel{2}m_t)}{\cancel{2}GJ}\,|x|$

③ $$\boxed{\theta_M(x) = \frac{+m_t}{\cancel{2}GJ}\,|x|}$$

ne pas faire de la tête