$KU = F$

$U = K^{-1} F$

Département Génie Civil et Bâtiment

Voie d'approfondissement Génie Civil
Cours de Méthodes Numériques
Examen Final – Lundi 23 Novembre 2009
Première partie : Éléments finis
Durée conseillée : 1 heure

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

Soit le problème différentiel :

$u' = w$

$$(P) \begin{cases} (1+x)u''(x) + u'(x) = 1 & x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \quad \text{connu} \end{cases}$$

$u''(1+x) = -u'$

$u'' = \frac{-u'}{1+x} \Rightarrow \frac{u''}{u'} = \frac{-1}{1+x}$

$\ln u' = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$u' = \frac{1}{1+x}$

Question 1 Donner la formulation faible (P_v) de (P).

homogène $\boxed{u_H = K \ln(1+x)}$

Question 2 Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0,1]$ à l'aide de 4 éléments finis linéaires d'égale longueur $\frac{1}{4}$.

matrice 3×3

$u_P = x + 1$

$u = K \ln(1+x) + x + 1$

Question 3 Comparer les valeurs nodales $u_h(\frac{1}{4})$, $u_h(\frac{1}{2})$ et $u_h(\frac{3}{4})$ de la solution approchée u_h obtenue à la question 2 aux valeurs $u(\frac{1}{4})$, $u(\frac{1}{2})$ et $u(\frac{3}{4})$ de la solution analytique u de (P).

on compare ce qu'on a trouvé dans les matrices avec les $u(\frac{1}{4})$ etc

$\sum U_i \varphi_i$

$U = K^{-1} F$

SH $= (1+x)u''(x) + u'(x) = 0$

$\int_0^{1/4} 16\left(\frac{1}{4} - x\right)^2$

$\int_0^{1/4} 16\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2\right)dx$

$16\left(\frac{1}{16}\frac{1}{4} - \frac{1/4^2}{4} + \frac{1/4^3}{3}\right)$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

$\frac{1}{32} - \frac{1}{256}$

$\frac{3}{256}$

10/20

LAURAND Stéphane

le 23/11/09

3A GC

Méthodes Numériques

Première Partie : Elements finis P. Rogier

① Donnons la formulation faible P_0 de P.

soit $v \in V$

$$V = \begin{cases} v : [0,1] \to \mathbb{R}, \int_0^1 v^2 dx < +\infty, \int_0^1 v'^2 dx < +\infty \\ v(1) = v(0) = 0 \end{cases}$$

?

alors
$$\int_0^1 (1+x)u''(x)v(x) + u'(x)v(x)\, dx = \int_0^1 v(x)\, dx$$

or si $w(x) = (1+x)v(x)$
$w'(x) = (1+x)v'(x) + v(x)$

On a
$$\int_0^1 (1+x)v(x)\, u''(x)\, dx = \Big[u'(x)(1+x)v(x) \Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\big[(1+x)v'(x) + v(x)\big]dx$$

Soit $\cancel{-\int_0^1 u'(x)v(x)}$

$$+\int_0^1 (1+x)\, v'(x)u'(x) + \cancel{u'(x)\, v(x)}\, dx = \cancel{2u'(1)v(1)} + \int_0^1 v(x)\,dx.$$

$+0$

On peut écrire

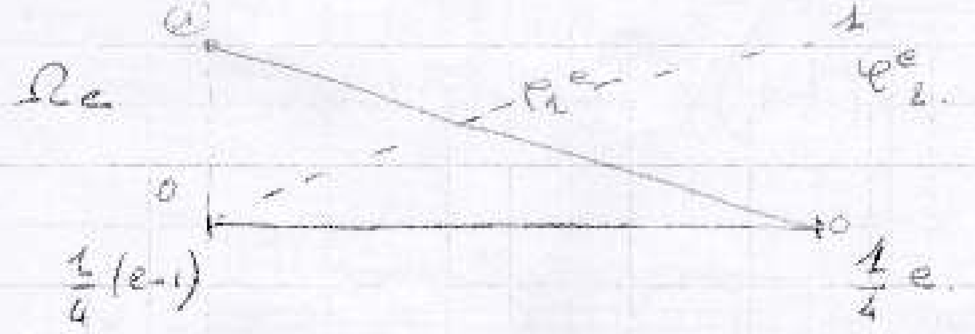
$$(P_1) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \int_0^1 (1+x)v'(x)\,u'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \\ \text{et ce } \forall v \in V. \end{cases}$$

6

Question 2

Il s'agit ici d'exprimer le problème sous la

- forme $KU = F$
- Soit l'élément $e = 1 - 4$ construisons sur celui-ci les fonctions φ_e^1 et φ_e^2. On travaille directement sur les éléments, au vu de leur simplicité, plutôt que de passer par l'élément de Lagrange de référence $\varphi^1 = \frac{1}{2}(1+\xi)$ $\varphi^2 = \frac{1}{2}(1-\xi)$



$e=1 : \; 4\left(\frac{1}{4} - x\right) = 1 - 4x$

$$\varphi_1^e(x) = 4\left(\frac{1}{4}e - x\right) = (e - 4x)$$

$e=1$

$$\varphi_2^e(x) = 4\left[x - \frac{1}{4}(e-1)\right] = (4x - (e-1))$$

$4x$

On sait que

$$K^e_{ij} = \int_{\Omega_e} (1+x)\, \varphi_i'(x)\, \varphi_j'(x)\, dx$$

$$= \int_{\Omega_e} (1+x)\, \varphi_i'(x)\, \varphi_j'(x)\, dx$$

constructio des φ_i φ_j

Calcul des K^e_{ij}

K'_{22}

$$K'_{11} = \int_0^{1/4} (1+x)\, 4 \left[\left(\frac{1}{4} - x\right)'\right]^2 dx = \int_0^{1/4} 4(1+x)\left[(x)'\right]^2 dx$$

$$= 4 \int_0^{1/4} (1+x)\, dx$$

$$= 4\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/4} = \frac{9}{8} = K'_{11} = K'_{22}$$

Max

$$k^1_{12} = \int_0^{1/4} (1+x)\, 4 \times (-1) \times (+1)\, dx$$

$$= -4 \times \int_0^{1/4} (1+x)\, dx = -\frac{9}{8} = k^1_{12}$$

$$K^1 = \frac{9}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^2_{11} = k^2_{22} = \int_{1/4}^{1/2} 4(1+x)\, dx = 4\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{11}{8}$$

$$k^2_{12} = -\frac{11}{8}$$

$$\Rightarrow \quad K^2 = \frac{11}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^3_{11} = k^3_{22} = -k^3_{12} = \int_{1/2}^{3/4} 4(1+x)\, dx = 4\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{3/4}$$

$$= \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad K^3 = \frac{13}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^4 = \frac{15}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul des F_i^e et F_j^e

On a
$$F_1^1 = \int_0^{1/4} \varphi_1(x)\,dx = \int_0^{1/4} 4\times\left(\frac{1}{4} - x\right)dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{4}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/4} = 1/8.$$

$$F_2^1 = \int_0^{1/4} 4\times\left(x - \frac{0}{4}\right)dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{1}{4}x}\right]_0^{1/4} = +1/8.$$

$$\Rightarrow \boxed{F^1 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$$

$$F_1^2 = \int_{1/4}^{1/2} 4\left(\frac{1}{2} - x\right)dx$$

$$2\left[x - x^2\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{7}{8}$$

$$F_2^2 = \int_{1/4}^{1/2} 4\left(x - \frac{1}{4}\right)dx = 4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right]_{1/4}^{1/2} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow F^2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$$

On retrouve ce résultat comme étant l'aire du triangle "sous" φ.

On en déduit $F^1 = F^2 = F^3 = F^4 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

On peut passer à l'assemblage.

$$K = \begin{bmatrix} K^1_{22} + K^2_{11} & K^2_{12} & \\ K^2_{12} & K^2_{22} + K^3_{11} & K^3_{12} \\ & K^3_{12} & K^4_{11} + K^3_{22} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F^1_2 + F_{11} \\ F^2_2 + F^3_1 \\ F^3_2 + F^4_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 20/8 & -11/8 & 0 \\ -11/8 & 25/8 & -13/8 \\ 0 & -13/8 & 28/8 \end{bmatrix}$$

2

On doit resoudre

$$\begin{bmatrix} 20 & -11 & 0 \\ -11 & 25 & -13 \\ 0 & -13 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1/4) \\ u(1/2) \\ u(3/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Soit =

$u\left(\frac{1}{4}\right) = 0,27$ $-0,07$

$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0,31$ $-0,08$

$u\left(\frac{3}{4}\right) = 0,21$ $-0,057$

Question 3

Recherche d'une solution analytique

Soit : $\boxed{(1+x)\,u'' + u' = 0}$

$$\frac{u''}{u'} = (1+x)^{-1}$$

$$\ln(u') = \ln(1+x) + k.$$

$$u'(x) = A\,(1+x)$$

$$u(x) = Ax + \frac{A}{2}x^2 + B.$$

en $x = 0$ $u = 0$

$\Rightarrow B = 0$

en $x = 1$ $u(1) = 0$ $\Rightarrow$