Département Génie Civil et Bâtiment

Voie d'approfondissement Génie Civil
Cours de Méthodes Numériques
Examen Final – Lundi 19 Novembre 2007
Première partie : Éléments finis
Durée conseillée : 1 heure

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

Une poutre horizontale de longueur l et de section rectangulaire d'inertie I, reposant à ses extrémités $x = 0$ et $x = l$ sur deux appuis simples, est soumise, dans sa section médiane $x = \frac{l}{2}$, à une force verticale P. Le matériau constituant cette poutre est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope et non pesant, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. Le déplacement vertical $u(x)$, $x \in [0, \frac{l}{2}]$, de la fibre moyenne est alors solution du problème aux limites à deux points

$$(P)\begin{cases} \text{Trouver } u : [0, \frac{l}{2}] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que} \\ EIu''(x) + \frac{P}{2}x = 0 \quad \forall x \in]0, \frac{l}{2}[\\ u(0) = 0 \quad u'(\frac{l}{2}) = 0 \end{cases}$$

1. Donner, en fonction de E, I, l, P et x, la solution analytique de (P).
2. Ecrire la formulation faible (P_v) de (P).
3. Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0, \frac{l}{2}]$ à l'aide de 3 éléments finis linéaires de Lagrange d'égale longueur $\frac{l}{6}$. On donnera l'expression des valeurs nodales $u_h(\frac{l}{6})$, $u_h(\frac{l}{3})$ et $u_h(\frac{l}{2})$ du déplacement en fonction de E, I, l et P.
4. Comparer les valeurs approchées $u_h(x)$, $x \in [0, \frac{l}{2}]$, du déplacement obtenues à la question 3 avec la solution analytique $u(x)$ de la question 1. Conclusion ?
5. Qu'aurait-on obtenu en effectuant la résolution approchée de (P_v) à l'aide d'un unique élément fini cubique de Lagrange ?

$u''(x) = \frac{-P}{2EI} x$

$u'(\frac{l}{2}) = \frac{-P}{2EI} \frac{l}{8} + a = 0$

$\Rightarrow a = \frac{P}{16EI}$

$u'(x) = \frac{-P}{2EI} \frac{x^2}{2} + a$

$u(x) = \frac{-P}{2EI} \frac{x^3}{6} + ax + b$

$u(0) = b = 0$

$= \frac{-P}{\ldots} x^3 + \frac{P}{16EI} x$