

Cours de Méthodes numériques - 2ème partie  
ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Examen complémentaire de janvier 2007  
(durée conseillée 30 min)

SUJET: Analyse d'une poutre en cisaillement par par équations intégrales.

En élasticité infinitésimale, le mouvement transversal  $v(x)$  des points d'une poutre droite soumise à un chargement transversal quelconque  $f$  est régi (hypothèse de cisaillement pur) par l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$GS \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - f = 0 \quad GS = 2 \frac{G(\Delta)}{dx^2} = \frac{4}{3} S(\alpha - \nu)$$

où  $G$  le module de cisaillement et  $S$  l'aire de la section.

On considère le cas particulier d'une poutre console de longueur  $L$  soumise à une force transversale  $F$  exercée en  $x = x_p$  (Fig. 1). On négligera les forces de pesanteur. La poutre est encastree à gauche (point  $O$ ) alors que le mouvement de l'extrémité droite est libre (point  $P$ ).

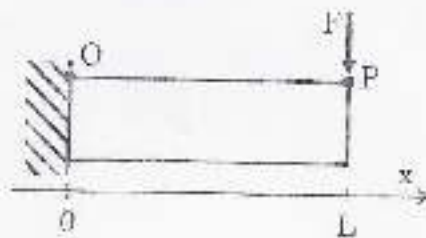


FIG. 1 - Poutre console soumise à une force transversale.

L'objectif de cet exercice est de résoudre ce problème simple par la méthode des équations intégrales présentée en début de cours. Pour ce faire, on adoptera une méthode de résolution *indirecte*. On rappelle que l'effort tranchant  $T(x)$  dans une poutre est lié au déplacement transversal  $v(x)$  par la relation :

$$T(x) = GS \frac{dv(x)}{dx}$$

1. Déterminer la solution élémentaire  $v^*(x)$  du problème posé<sup>1</sup> (on notera  $v(y)$  la force transversale concentrée exercée en un point d'abscisse  $y$ ).
2. Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution élémentaire  $v^*$ , déterminer les valeurs de force concentrée  $v_0$  et  $v_p$  à imposer pour retrouver le problème posé.
3. Écrire la solution  $v(x)$  du problème et commenter. Indiquer comment on pourrait réaliser, grâce à la méthode des équations intégrales, une résolution *directe* du problème.

Question "considérée": comment appelle-t-on un problème en milieu non borné? Quelle démarche permet d'établir l'équation intégrale et la formule de représentation dans un tel cas? Quelles sont les conditions supplémentaires sur les champs de déplacement et de contrainte?

<sup>1</sup> On rappelle que les seules inconnues du problème considéré sont le déplacement transversal  $v(x)$  et l'effort tranchant  $T(x)$ .