ENTPE, Département Génie Civil et Bâtiment

Cours de Méthodes numériques - 2ème partie

ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Examen final du 19 novembre 2007

(durée conseillée 30 mn)

SUJET : Analyse d'une poutre en torsion par équations intégrales.

En élasticité unidimensionnelle, la rotation $\theta(x)$, autour de l'axe x, des points d'une poutre soumise à un chargement de torsion m_t autour de l'axe x est régie par l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$GJ\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m_t = 0$$

$\Rightarrow \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \mu_0\,\delta(x - y)$

où G est le module de cisaillement et J l'inertie de torsion.

On considère le cas particulier d'une poutre console de longueur L soumise à un moment de torsion m_t exercé en $x = x_0 = L$ (Fig. 1). On néglige les forces de pesanteur. La poutre est encastrée à gauche (point O) alors que le mouvement de l'extrémité droite est libre (point P).

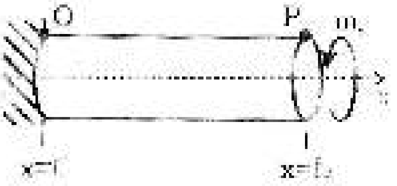

Figure 1. Poutre console soumise à un moment de torsion à son extrémité.

L'objectif de cet exercice est de résoudre ce problème simple par la méthode des équations intégrales présentée en début de cours. Pour ce faire, on suivra une méthode d'intégration [illegible]. On rappelle que le moment de torsion $M_t(x)$ dans une poutre est lié à la rotation $\theta(x)$ par la relation :

$$M_t(x) = GJ\frac{d\theta(x)}{dx}$$

1. En notant $\mu_t(y)$ le *moment de torsion concentré* exercé en un point d'abscisse y, déterminer la *solution élémentaire* $\{\theta_t^*(x,y); M_t^*(x,y)\}$ du problème posé[1].

2. Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution élémentaire et déterminer les valeurs de moment de torsion concentré $\mu_t(0)$ et $\mu_t(L)$ à imposer pour retrouver le problème posé.

3. En déduire la solution $\theta(x)$ du problème et commenter.

Question "subsidiaire" : dans le cours, qu'appelle-t-on un problème extérieur ? Quelle démarche permet d'établir l'équation intégrale et la formule de représentation dans un tel cas ? Pour quels types d'application cela est-il utile et quel avantage cela procure-t-il par rapport à d'autres méthodes numériques ? Cela permet de prendre en compte les conditions à l'∞ de manière exacte. Il n'est pas ainsi nécessaire de simuler les conditions de radiation × frontières absorbantes cf en éléments finis ou différences finies. Ceci est particulièrement important en dynamique stationnaire

pr des domaines non bornés

[1] On rappelle que, contrairement au cas étudié en cours, les deux inconnues du problème considéré ici sont la rotation $\theta(x)$ et le moment de torsion $M_t(x)$. La solution élémentaire $\{\theta_t^*, M_t^*\}$ est donc à rechercher quelle que soit le problème.

Document 2 : diapo 46