# Département Génie Civil et Bâtiment

**Voie d'approfondissement Génie Civil**
**Cours de Méthodes Numériques**
**Examen Final – Lundi 20 Novembre 2006**
**Troisième partie : Éléments Distincts**
**Durée conseillée : 1/2 heure**

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

Sujet

Partie 2 (10 pts)

On s'intéresse à une rhéologie élémentaire susceptible d'être intégrée à un modèle à éléments distincts (MED). On considère le modèle de Prandtl décrit par la figure (1). $k$, $k_0$ désignent les raideurs des ressorts, $m$ la masse, $\alpha$ le seuil du patin, $F$ la force extérieure appliquée sur $m$. $x$ est le déplacement de la masse dont on n'étudie que le mouvement de translation horizontale. On note $v$ le déplacement du patin (la variation de longueur entre les points A et B de la figure) et $u$ celui du ressort de raideur $k$, de sorte que $x = u + v$. On appelle $y$ la vitesse : $y = \dot{x} = dx/dt$.

1) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, écrire un système de 2 équations différentielles ordinaires d'ordre 1 sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \text{fonction de } (x, y, v, k, k_0, F, m).$$

2) On rappelle la loi de comportement du patin : si $f$ désigne la force exercée par $A$ sur $B$, elle s'écrit

$$f \in -\alpha\sigma(\dot{v}),$$

où $\sigma$ désigne le graphe de la fonction signe. Exprimer $f$ en fonction de $u$, puis $v$ en fonction de $x$ et $u$. Écrire l'inclusion différentielle correspondante. Si $\beta$

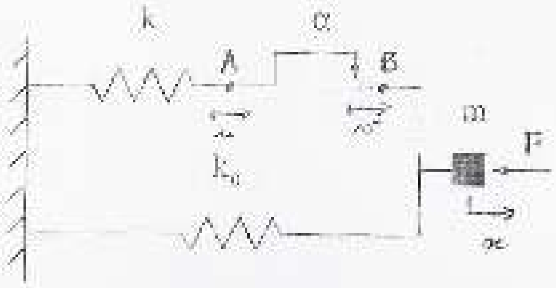


Figure 1: Modèle de Prandtl.

désigne le graphe inverse de $\sigma$, écrire un système différentiel d'ordre 1 sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m}\left(F - [illegible]\right) \\ \dot{z} \in [illegible]\, y \end{cases}$$

2) Proposer un schéma numérique implicite sur le modèle de celui introduit en cours pour le frottement.