ENTPE, Département Génie Civil et Bâtiment.

Cours de Méthodes numériques - 2ème partie

ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Examen final du 20 novembre 2006

(durée conseillée 30 mn)

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

SUJET : Analyse d'une poutre en traction par équations intégrales.

En élasticité infinitésimale, le mouvement axial $u(x)$ des points d'une poutre droite soumise à un chargement axial quelconque f est régi par l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f = 0$$

On considère le cas particulier d'une poutre console de longueur L soumise à une force axiale F exercée en $x = x_P$ (Fig. 1). On négligera les forces de pesanteur. La poutre est encastrée à gauche (point O) alors que le mouvement de l'extrémité droite est libre (point P).

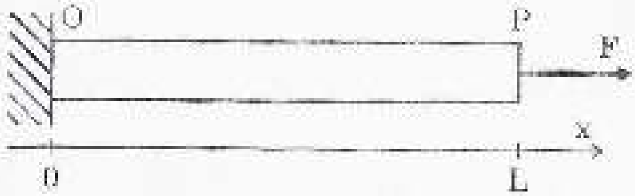


FIG. 1 – *Poutre console soumise à une traction axiale.*

L'objectif de cet exercice est de résoudre ce problème simple par la méthode des équations intégrales présentée en début de cours. Pour ce faire, on adoptera une *méthode de résolution indirecte*. En notant E le module d'Young et S l'aire de la section, on rappelle que l'effort normal $N(x)$ dans une poutre est lié au déplacement axial $u(x)$ par la relation :

$$\boxed{N(x) = ES\frac{du(x)}{dx}}$$

1. Déterminer la *solution élémentaire* $u^*(x)$ du problème axial posé (on notera φ la *force axiale concentrée* exercée en $x = y$). Contrairement au cas du cours, on remarquera qu'ici le déplacement axial $u(x)$ et l'effort normal $N(x)$ caractérisent entièrement le problème.
2. Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution élémentaire et déterminer les valeurs de force concentrée φ_O et φ_P à imposer pour retrouver le problème posé.
3. Écrire la solution $u(x)$ du problème et commenter. Indiquer comment on pourrait réaliser, grâce à la méthode des équations intégrales, une *résolution directe* du problème.

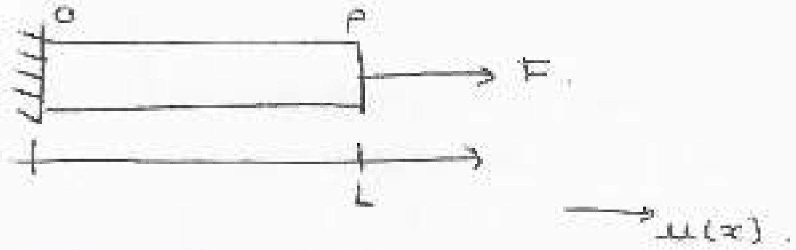
Question "subsidiaire" : en élastodynamique stationnaire, que traduisent les conditions de Sommerfeld? Quel avantage procurent-elles à la méthode des éléments de frontière par rapport à la méthode des éléments finis?

Annale 2006

mvt axial $u(x)$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f = 0$$

F: force axiale



effort normal lié au deplacement axial $u(x)$

$$N(x) = ES\,\frac{d\,u(x)}{dx}$$

① $$\frac{d^2 u^*(x)}{dx^2} = -\varphi\,\delta(x-y)$$

$$\frac{d\,u^*(x)}{dx} = -\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y)$$

$$\boxed{u^*(x) = -\frac{\varphi}{2}\,|x-y|.}$$ et $$\boxed{N(x) = -ES\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y)}$$

② condi° aux limite

$N(L) = F$

$u^*(0) = 0$

• $u^*(x) = u^*_{\varphi_0} + u^*_{\varphi_P} = -\frac{\varphi_0}{2}|x| - \frac{\varphi_P}{2}|x-L|$

en $x=0$ $\quad u^*(0) = -\frac{\varphi_P}{2}|-L| = 0$ $\quad$ soit $\underline{\varphi_P = 0}$

• $N(x) = -ES\frac{\varphi_0}{2}\,\mathrm{sgn}(x) - ES\frac{\varphi_P}{2}\,\mathrm{sgn}(x-L) =$

en $x = L$ $\quad -ES\frac{\varphi_0}{2}\,\mathrm{sgn}(L) - ES\frac{\varphi_P}{2}\,\mathrm{sgn}(L-L) = F$

$$-ES\frac{\varphi_0}{2} - ES\frac{\varphi_P}{2} = F \qquad \varphi_P = 0$$

soit $\boxed{\varphi_0 = -\frac{2F}{ES}}$

③ Solu° $u(x)$

$$u^*(x) = -\frac{\left(\frac{-2F}{ES}\right)}{2}\,|x| \quad - \quad \boxed{u^*(x) = \frac{F}{ES}\,|x|.}$$