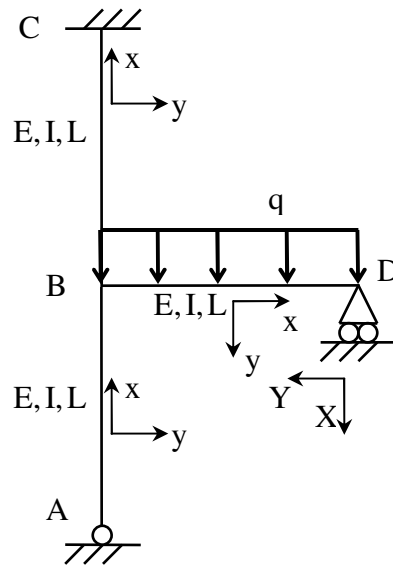


Exercice 1



Méthode des forces

Système hyperstatique de degré 3

Les 3 inconnues sont de type statique (actions de liaison en A et D par exemple)

Les équations à mettre en place sont de type cinématique (les déplacements en A et vertical en D sont nuls)

Méthode des rotations

Les déformations d'effort normal et effort tranchant sont négligeables par rapport à celles du moment fléchissant.

Les 4 inconnues sont de type cinématique (rotations en A, B et D et rotation d'ensemble de la barre A-B)

Les équations à mettre en place sont de type statique (équations d'équilibre ou PTV)

Remarque : en exprimant $M_{AB} = 0$ et $M_{DB} = 0$ on substitue les inconnues ω_A et ω_D on se ramène à un système linéaire à 2 inconnues.

Résolution par la méthode des rotations

$$M_{BA} = 3 \frac{EI}{L} \omega_B - 3 \frac{EI}{L} \omega$$

$$M_{BD} = 3 \frac{EI}{L} \omega_B - \frac{1}{8} qL^2$$

$$M_{BC} = 4 \frac{EI}{L} \omega_B + 6 \frac{EI}{L} \omega$$

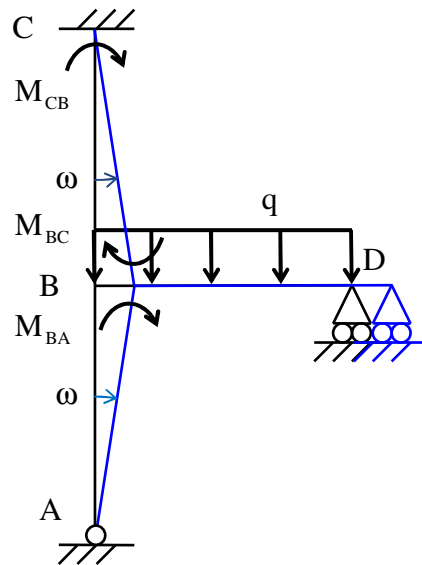
$$M_{CB} = 2 \frac{EI}{L} \omega_B + 6 \frac{EI}{L} \omega$$

Equation en ω_B :

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

$$10 \frac{EI}{L} \omega_B + 3 \frac{EI}{L} \omega - \frac{1}{8} qL^2 = 0$$

Equation en ω :



$$-M_{BA} + M_{BC} + M_{CB} = 0$$

$$3 \frac{EI}{L} \omega_B + 15 \frac{EI}{L} \omega = 0$$

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_B \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} qL^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

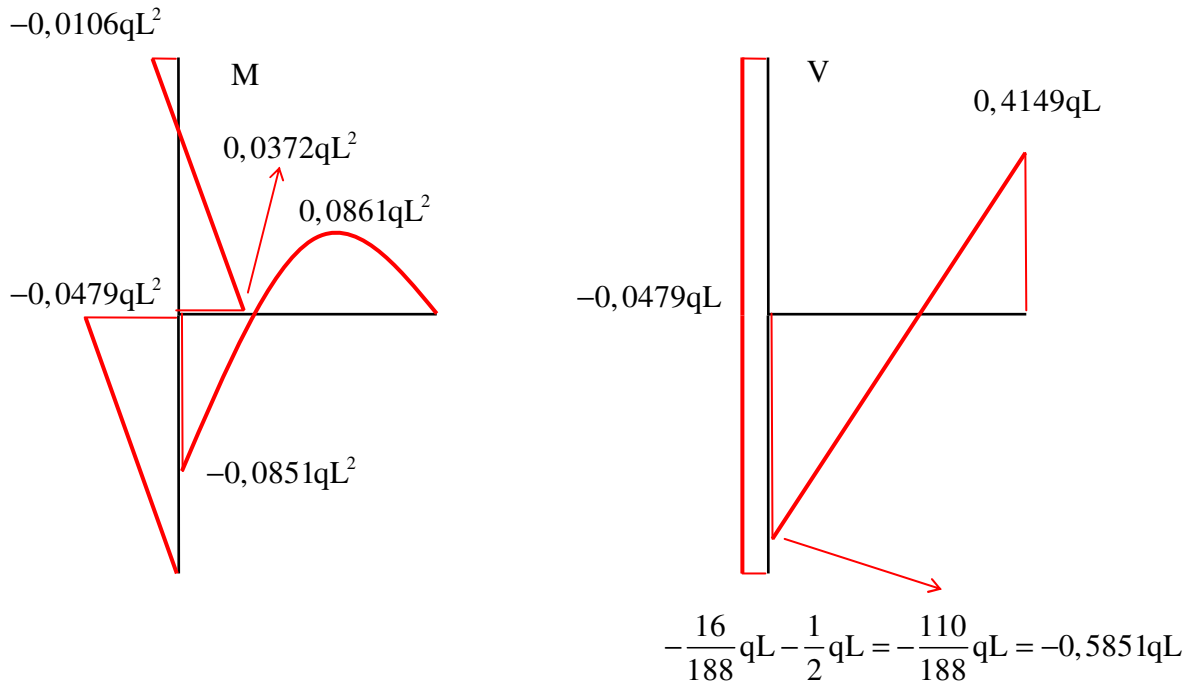
$$\frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \omega_B \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} qL^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{qL^2}{376} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BA} = \frac{9}{188} qL^2 = 0,0479 qL^2$$

$$M_{BD} = -\frac{16}{188} qL^2 = -0,0851 qL^2$$

$$M_{BC} = \frac{7}{188} qL^2 = 0,0372 qL^2$$

$$M_{CB} = \frac{2}{188} qL^2 = 0,0106 qL^2$$



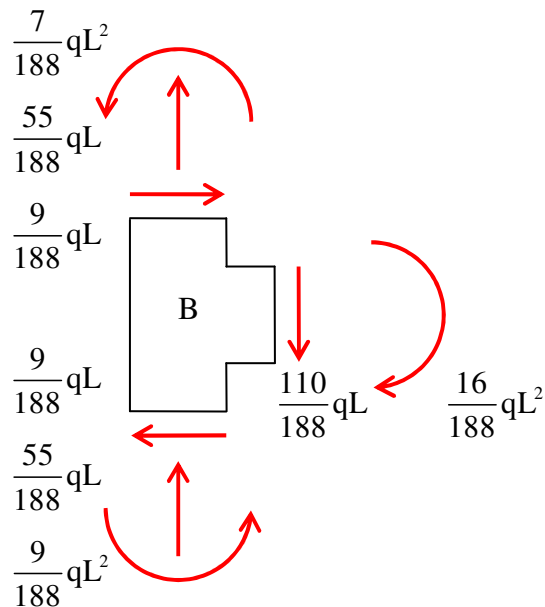
Calcul de M_{\max} sur la barre BD :

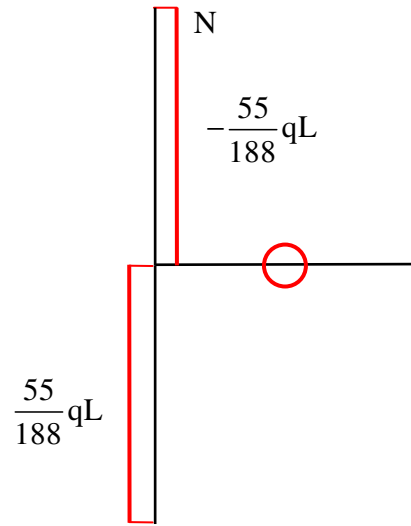
$$M_{\max} = -\frac{16}{188}qL^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{110}{188}L\right)^2 = 0,0861qL^2$$

Calcul de l'effort normal par équilibre du nœud B

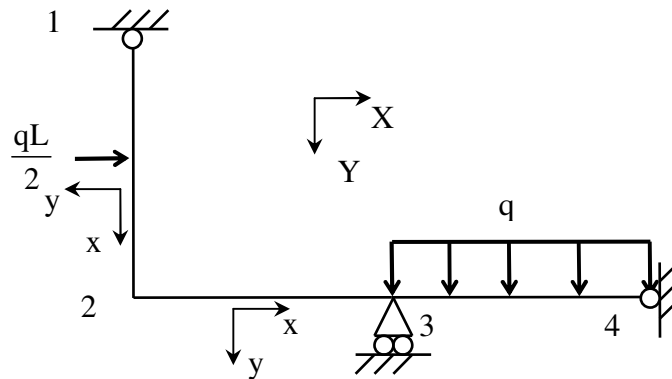
L'allongement de la barre BC est l'opposé du raccourcissement de la barre AB

Les efforts normaux dans ces deux barres sont donc opposés





Exercice 2 :



Matrice de rigidité de la poutre 1-2 dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité des poutres 2-3 et 3-4 dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité assemblée :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{1-2} & K_{12}^{1-2} & 0 & 0 \\ K_{12}^{1-2} & K_{22}^{1-2} + K_{22}^{2-3} & K_{23}^{2-3} & 0 \\ 0 & K_{23}^{2-3} & K_{33}^{2-3} + K_{33}^{3-4} & K_{34}^{3-4} \\ 0 & 0 & K_{34}^{3-4} & K_{44}^{3-4} \end{bmatrix}$$

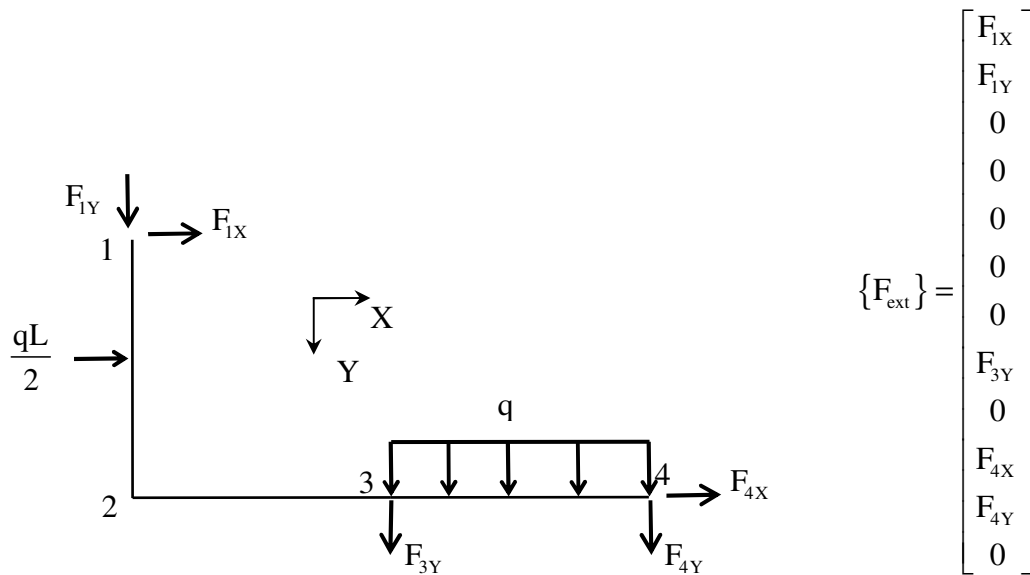
$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} + \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Second membre :

Efforts équivalents sur les noeuds :

$$\{\bar{F}_e\} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{4} \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{32} \\ \frac{qL}{4} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{32} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Efforts directs sur les noeuds :



Second membre : $\{\bar{F}_e\} + \{F_{\text{ext}}\}$

Système final avec les conditions aux limites :

Inconnues cinématiques du problème : $\phi_1, U_2, V_2, \phi_2, U_3, \phi_3, \phi_4$

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{2ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \\ U_3 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^2}{32} \\ \frac{qL}{4} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{32} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$