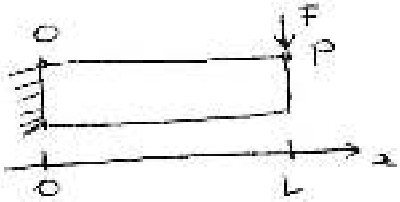
Annale 2009 -

$$\mu S \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - f = 0$$



$T(x) = \mu S \dfrac{d v(x)}{dx}$ $\qquad$ $v(x)$ deplacement transversal

① $v_\psi(x,y)$ - Solution elementaire

$M(x) = T(x) = -\dfrac{dM}{dx} \qquad \Rightarrow M = -\int \mu S \dfrac{d v(x)}{dx}$

force transversale $\Psi(y)$

$\mu S \dfrac{d^2 v(x)}{dx^2} - f = 0 \qquad$ ~~soit~~ $\mu S \dfrac{d^2 v_\psi(x)}{dx^2} = \Psi(y) = \Psi^{\circ}(x-y)$

poutre ∞

$$\mu S \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \Psi(y) = \Psi \delta(x-y)$$

$$\mu S \frac{d v(x)}{dx} = \frac{\Psi}{2} \,\mathrm{sgn}(x-y)$$

$$\mu S \, v_\psi(x) = \frac{\Psi}{2} |x-y|$$

$$\boxed{v_\psi(x) = \frac{\Psi}{2\mu S} |x-y|} \quad \text{et} \quad \boxed{T(x) = \frac{\Psi}{2} \,\mathrm{sgn}(x-y)}$$

② condition aux limites

$T(p) = F$

$T(0) = 0$

$v(0) = 0$

$$v_\psi(x) = \frac{\psi}{2\mu S} |x-y|$$

$$T(x) = \frac{\psi}{2} \operatorname{sgn} |x-y|$$

$$v_\psi(x) = v_{\psi_0} + v_{\psi_p}$$

$$= \frac{\psi_0}{2\mu S} |x| + \frac{\psi_p}{2\mu S} |x-L|$$

$$\boxed{v_\psi(0) = \frac{\psi_p}{2\mu S} L = 0}$$

$$T(p) = \frac{\psi_0}{2} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\psi_p}{2} \operatorname{sgn}(x-L)$$

$$T(x_p) = \frac{\psi_0}{2} \operatorname{sgn}(L) + \frac{\psi_p}{2} \operatorname{sgn}(\underbrace{L-L}_{+})$$

$$\boxed{T(x_p) = \frac{\psi_0}{2} + \frac{\psi_p}{2} = F}$$

③

$$\frac{\psi_p}{2\mu S} \times L = 0 \Rightarrow \psi_p = 0$$

$$\frac{\psi_0}{2} = F \qquad \psi_0 = 2F$$

Regarder la fct signe

$$v_\psi(x) = \frac{\cancel{2}F}{\cancel{2}\mu S} \times |x|$$

$$\boxed{v_\psi(x) = \frac{F}{\mu S} |x|}$$

Question subsidiaire.

→ Non

→

ENTPE, Département Génie Civil et Bâtiment

Cours de Méthodes numériques - 2ème partie

Équations intégrales et éléments de frontière

Examen final du 23 novembre 2009

(durée conseillée 30 mn)

Sujet : Analyse d'une poutre en cisaillement par par équations intégrales.

En élasticité infinitésimale, sous l'hypothèse de cisaillement pur (i.e. flexion négligeable), le mouvement transversal $v(x)$ des points d'une poutre droite soumise à un chargement transversal quelconque f est régi par l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$\mu S \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - f = 0$$

où μ le module de cisaillement et S l'aire de la section.

On considère le cas particulier d'une poutre console de longueur L soumise à une force transversale F exercée en $x = x_P$ (Fig. 1). On négligera les forces de pesanteur. La poutre est encastrée à gauche (point O) alors que le mouvement de l'extrémité droite est libre (point P).

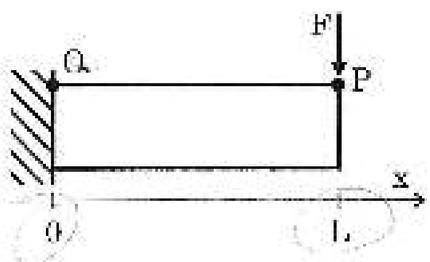


Figure 1: Poutre console soumise à une force transversale.

L'objectif de cet exercice est de résoudre ce problème simple par la méthode des équations intégrales présentées en début de cours. Pour ce faire, on adoptera une *méthode de résolution indirecte* en s'inspirant des étapes d'intégration de la fonction $\delta(x - y)$ réalisées en cours. On rappelle que l'effort tranchant $T(x)$ dans une poutre est lié au déplacement transversal $v(x)$ par la relation :

$$T(x) = \mu S \frac{dv(x)}{dx} = F$$

1. Déterminer la *solution élémentaire* $v_e(x, y)$ du problème posé[1] (on notera $\varphi(y)$ la *force transversale concentrée* exercée en un point d'abscisse y).
2. Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution élémentaire et déterminer les valeurs de force concentrée φ_O et φ_P à imposer pour retrouver le problème posé.
3. Écrire la solution $v(x)$ du problème et commenter.

Question "subsidiaire" :
La méthode des éléments de frontière est-elle bien adaptée à la modélisation de milieux fortement hétérogènes ? Pourquoi ? Comparer avec les éléments finis.

[1] On rappelle que, puisque la flexion est négligeable, les seules inconnues du problème considéré sont le déplacement transversal $v(x)$ et l'effort tranchant $T(x)$. On ne considèrera donc pas de solution élémentaire en moment ponctuel.