Comportement des Matériaux (DS 1h30)

NB : on utilisera les conventions de la mécanique des sols (contraction, compression et diminution de volume positives)

On considère un essai de compression simple (fig 1) sur 1 éprouvette cylindrique (hauteur H et diamètre D) d'un matériau isotrope. Dans la suite, on mesure le temps (t), la force appliquée (F), la diminution de hauteur (DH), la variation de diamètre (DD). L'essai est supposé homogène. Pour l'ensemble du problème l'hypothèse des petites transformations est supposée valide. Il est demandé de fournir les expressions littérales avant de faire les éventuelles applications numériques.

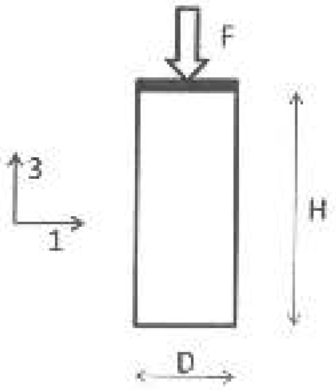


Figure 1 : essai de compression simple

1) Ecrire les tenseurs de déformation et de contrainte en fonction des valeurs mesurées.

A partir du temps t=0 on maintient la force constante ($F=F_0$). On observe durant cet essai que la déformation dans la direction 3 (ε_{33}) s'obtient à partir du corps analogique décrit dans la figure 2. σ_{v1} et σ_{v2} , sont respectivement les contraintes dans le ressort (E) et dans l'amortisseur (η).

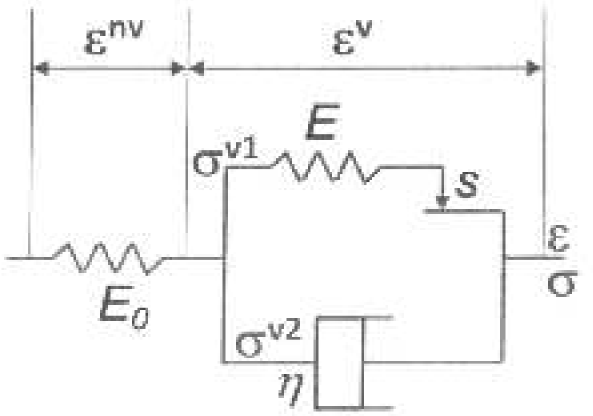


Figure 2 : Corps analogique représentant le module dans la direction 3

2) Le corps est-il viscoélastique linéaire ? Le corps est-il viscoélastique ? (expliciter vos réponses)
Quel est le type de comportement du corps ?

3) Donner l'évolution de ε_{33} en fonction du temps pour les 2 cas suivants : $F_0=s/2$ et $F_0=4s$ (on donnera les équations puis les formes de courbes obtenues en précisant quelques points caractéristiques ; valeurs à l'origine, asymptotes, ..).

4) Les mesures de déplacements axiaux et radiaux pour l'essai de fluage à $F_0=4s$, ont donnés les résultats de la figure 3. Montrer que ces résultats peuvent être obtenus en considérant que le ressort de rigidité E_0 a un coefficient de Poisson constant ν_0 et que le corps viscoplastique (E, s, η) a un coefficient de Poisson constant ν.
Donner les valeurs de ν_0 et ν si H=100mm et D=50mm.

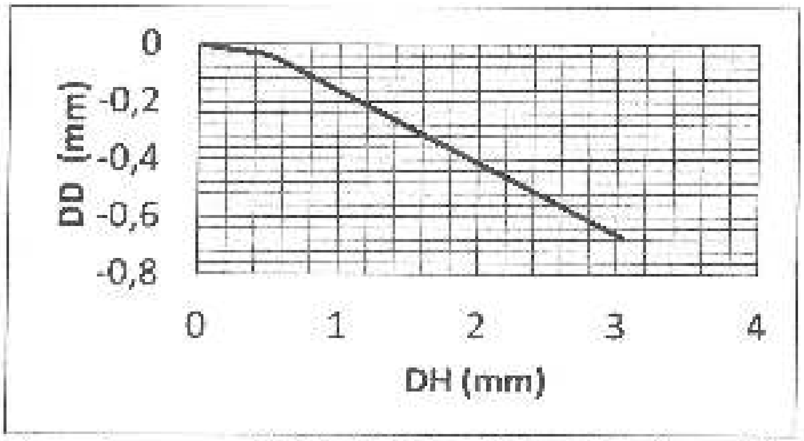


Figure 3 : mesure de DH et DD lors de l'essai de fluage à $F_0=4s$

On applique au corps une contrainte axiale sinusoïdale d'amplitude s/2 : s=s/2*sin(wt).

5) Donner l'évolution de la contrainte axiale et de la déformation radiale selon la pulsation w. On donnera les formules permettant d'obtenir le déphasage et le rapport d'amplitude. Pour cela on pourra raisonner en utilisant les transformées de Carson et en ajoutant les réactions de chacun des 2 corps en série (ressort E0 et corps (E, s, η).

6) Quelles sont les valeurs du module (E_{mat}) et du coefficient de Poisson du matériau (ν_{mat}) lorsque w tend vers l'infini et lorsque w tend vers 0.

Comportement des matériaux

1 Tenseurs de déformation et de contrainte.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4F}{D^2 \pi} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\Delta D}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta D}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}$$

oui

2

2)

Ce corps contient un patin plastique. Il n'est donc pas viscoélastique (linéaire ou non).

Il s'agit d'un comportement visco-élasto-plastique.

3) Chargement et fluage.

$F_0 = \frac{5}{2}$

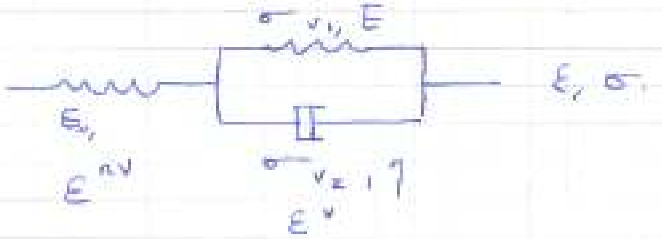
On supposera qu'il s'agit plutôt de $\frac{4F}{D^2 \pi} = \frac{5}{2}$.

Dans ce cas : $\sigma = \frac{5}{2}$.

Par association en parallèle, σ_{ave} sera inférieur à σ

$\Rightarrow$ Le patin reste bloqué.

On étudie le schéma équivalent.



$\varepsilon = \varepsilon^{nv} + \varepsilon^{v}$ $\qquad$ $\sigma_{v2} + \sigma_{v1} = \sigma$

$\varepsilon^{nv} = \dfrac{\sigma}{E_0}$ $\qquad$ $\sigma_{v2} = \eta\, \dot{\varepsilon}^{v}$

$\varepsilon^{v} = \varepsilon - \dfrac{\sigma}{E_0}$ $\qquad$ $\sigma_{v1} = E\, \varepsilon^{v}$

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_0}\right) + \eta\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_0}\right)$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right) + \frac{\dot{\sigma}}{E_0} = \frac{E}{\eta}\varepsilon + \dot{\varepsilon}}$$

$\sigma = \dfrac{S}{2}$

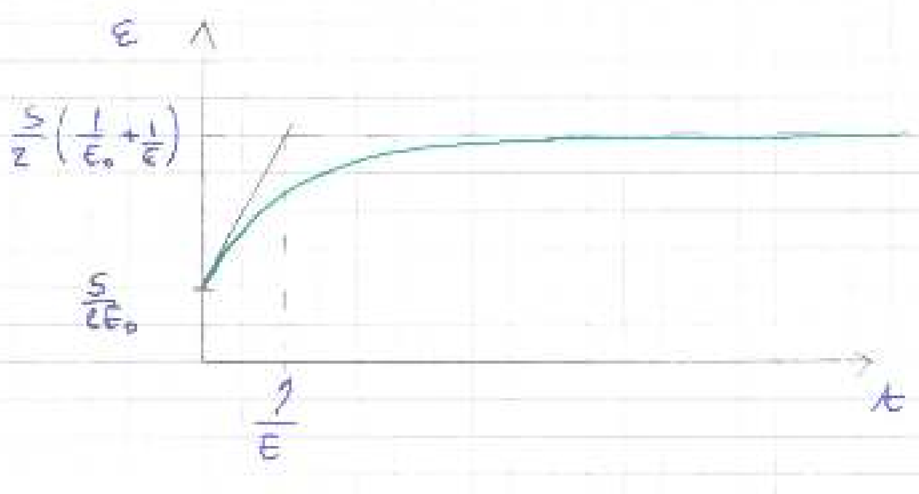
$$\Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{S}{2\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)$$

$$\varepsilon(t) = A\, e^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{S}{2E}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)$$

À $t = 0^+$: l'amortisseur est infiniment rigide, $\varepsilon = \varepsilon^{nv} = \dfrac{S}{2E_0}$

$$\boxed{\varepsilon_{33}(t) = \frac{S}{2E}\left(\frac{E_0 + E}{E_0} - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)}$$

2,5



$F_0 = 4S$

On supposera de même qu'il s'agit de $\sigma = \frac{4F}{D^2\pi} = 4S$.

Pour des temps suffisamment faibles, le patin est bloqué.

$$\boxed{\varepsilon_{13}(t) = \frac{4S}{E}\left(\frac{E}{E_0} + 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)}$$

Le patin se débloque pour : $t = t_1$

$$\sigma_{nv1}(t_1) = S$$

or $\sigma_{nv1}(t_1) = E\,\varepsilon^v(t_1)$

$$= E\,\varepsilon(t_1) - \frac{E}{E_0}\sigma$$

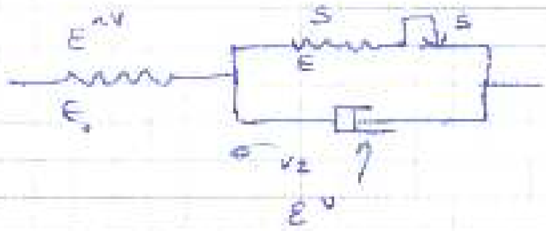
$$\Rightarrow \frac{S}{E} + \frac{4S}{E_0} = \varepsilon(t_1).$$

$$\frac{S}{E} + \frac{4S}{E_0} = \frac{4S}{E}\left(\frac{E}{E_0} + 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

$$e^{-\frac{E}{\eta}t_1} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{E}\ln\frac{4}{3}}$$

Pour $t > t_1$, on a le modèle équivalent :



$\varepsilon = \varepsilon^{nv} + \varepsilon^{v}$ $\qquad$ $\sigma = S + \sigma_{v2}$

$\varepsilon^{nv} = \frac{\sigma}{E_0}$ $\qquad$ $\sigma_{v2} = \eta\,\dot{\varepsilon}^{v}$

$$\sigma = S + \eta\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_0}\right)$$

$$\boxed{\sigma - S + \frac{\dot{\sigma}}{E_0} = \eta\,\dot{\varepsilon}}$$

or $\sigma = 4S$.

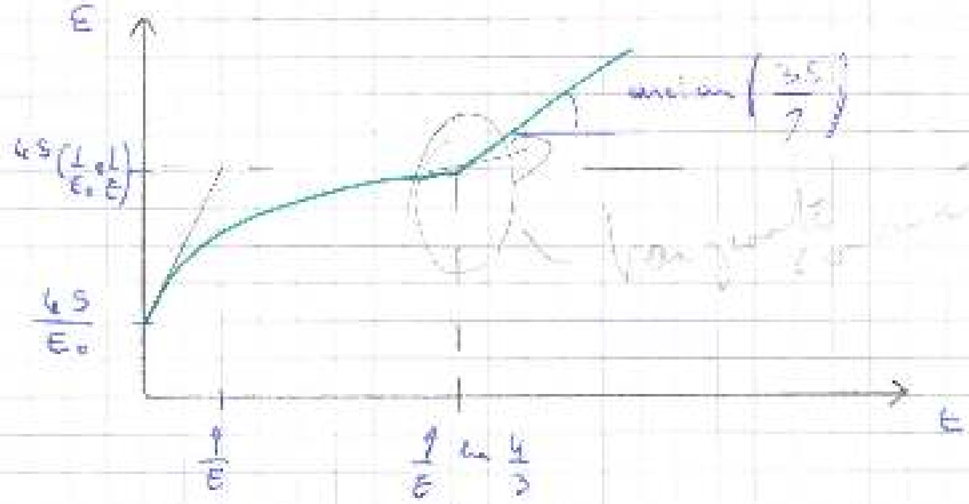
$$\frac{3S}{\eta} = \dot{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_{33}(t) = \frac{3S}{\eta}(t - t_1) + \text{constante}. \quad \varepsilon_{33}(t_1) = S\left(\frac{1}{E} + \frac{4}{E_0}\right)$$

$t < t_1 \quad \varepsilon_{33}(t) = \frac{4S}{E}\left(\frac{E}{E_0} + 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$

$t \geq t_1 \quad \varepsilon_{33}(t) = \frac{3S}{\eta}(t - t_1) + S\left(\frac{1}{E} + \frac{4}{E_0}\right)$

$$t_1 = \frac{\eta}{E} \ln \frac{4}{3}$$



4) Coefficient de Poisson.

Passage en Carson.

$$\varepsilon_{11}^* = -\frac{\nu_0^*}{E^*}\sigma_{33}^*$$

$$\varepsilon_{33}^* = \frac{\sigma_{33}^*}{E^*}$$

$$\frac{\varepsilon_{11}^*}{\varepsilon_{33}^*} = -\nu_0^* = \frac{DD}{D} \times \frac{H}{DH}$$

NON

Ici, DD et DH varient linéairement, leur rapport reste constant or la transformée inverse de Carson d'une constante est une constante.

Comportement des matériaux

4) Ainsi, ν et ν_0 sont des constantes

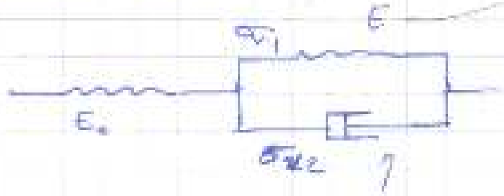
$$\boxed{\nu_0 = 0{,}16} \qquad \boxed{\nu = 0{,}51}$$

pas très explicite

3,5

5) Sollicitation sinusoïdale.

Le patin reste bloqué, puisque l'intensité de la sollicitation est inférieure à 5. ? bien



7,5

$$\varepsilon_{33}^* = \varepsilon^{v*} + \varepsilon^{nv*} \qquad \sigma^* = \sigma_{v_1}^* + \sigma_{v_2}^*$$

$$\varepsilon^{nv*} = \frac{\sigma^*}{E_0} \text{ oui} \qquad = E\varepsilon^{v*} + \eta p \varepsilon^{v*}$$

$$= \varepsilon^{v*}(E + \eta p) \text{ oui}$$

$$\varepsilon_{11}^* = -\sigma^* \left(\frac{\nu_0}{E_0} + \frac{\nu}{E + \eta p} \right)$$

$p = i\omega$.

η ?

$$\varepsilon_{11}^* = -\sigma^* \frac{\nu_0 E + \nu E_0 + \nu_0 \eta i\omega}{E_0 E + E_0 \eta i\omega}$$

$$\boxed{\left| \frac{\varepsilon_{11}^*}{\sigma^*} \right| = \sqrt{\frac{(\nu_0 E + \nu E_0)^2 + (\nu_0 \eta \omega)^2}{(E_0 E)^2 + (E_0 \eta \omega)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{\nu_0 \eta \omega}{\nu_0 E + \nu E_0} - \operatorname{Arctan} \frac{\eta \omega}{E}}$$

6) Aux limites

$$\varepsilon_{33}^* = \sigma^* \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E + \eta i \omega} \right)$$

$$\frac{E_0 (E + \eta \omega i)}{E_0 + E + \eta \omega i} \varepsilon_{33}^* = \sigma^*$$

$$\varepsilon_{11}^* = - \sigma^* \left(\frac{\nu_0}{E_0} + \frac{\nu}{E + \eta i \omega} \right)$$

$$\frac{E_0 E + E_0 \eta i \omega}{\nu_0 E + \nu E_0 + \nu_0 \eta i \omega} \varepsilon_{11}^* = - \sigma^*$$

$$\frac{\varepsilon_{11}^*}{\varepsilon_{33}^*} = - \nu^*$$

$$= \frac{E_0 (E + \eta \omega i)}{E_0 + E + \eta i \omega} \; \frac{\nu_0 E + \nu E_0 + \nu_0 \eta i \omega}{E_0 E + E_0 \eta i \omega}$$

$\omega \to 0$:

$$\boxed{E_{mat} = \frac{E_0 E}{E_0 + E} \qquad \nu_{mat} = \frac{\nu_0 E + \nu E_0}{E_0 + E}}$$

$\omega \to \infty$

$$\boxed{E_{mat} = E_0 \qquad \nu_{mat} = \nu_0}$$