BUANNIC Maël
LABBOUZ Lucie
VILLA Céline

Le 25 mai 2007

Projet de modélisation

Problème : cylindre creux infini sous pression

1A Groupe 6

2006-2007

Sommaire

Présentation du sujet

Un cylindre creux de révolution est soumis à une pression uniforme p(t) sur ses parois intérieures. Le solide est considéré infini déformable. La paroi extérieure du cylindre est fixe : le cylindre se déforme au niveau de sa paroi intérieure. On suppose que le solide est hypoélastique et que la transformation F est quasistatique.

Démarche, méthodes et outils employés

1. Modélisation mécanique du problème.

Nous avons cherché à établir par des méthodes issues de la mécanique des milieux continus une expression du tenseur des déformations d'Euler **E** et du tenseur des contraintes de Cauchy **σ,** en fonction du déplacement radial de la paroi intérieure $f(R,t)$ et de sa dérivée $f'(R,t)$; que nous avons donc également déterminé.

- Tout d'abord, nous avons justifié le fait que la transformation du solide peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r = f(R,t) \\ \theta = \Theta \\ z = Z \end{cases}$$

(cf. question 1 Annexe 1)

Nous travaillerons donc à présent à la résolution du problème, écrit sous cette forme simplifiée.

- Ensuite, nous avons montré que les composantes des différents tenseurs eulériens ne dépendent que de t et de la variable de Lagrange R et non pas de celle d'Euler r. En effet nous avons déterminé r comme fonction de R et de t, il est donc plus simple d'exprimer tous les tenseurs sous cette forme *(cf. question 3 Annexe 2).* On a donc :

$$\begin{cases} G = G(R,t) \\ D = D(R,t) \\ W = W(R,t) \\ \sigma = \sigma(R,t) \end{cases}$$

- Après avoir défini de nouvelles fonctions v et w dépendant uniquement de R et établi trois équations les reliant, nous avons alors exprimé $f, \sigma, et\ E$ en fonction de v et w. Forts de ces résultats, nous sommes alors passés à la résolution numérique du problème et obtenir des valeurs numériques

- L'équation (2) ne fait appel qu'à des outils de calculs mathématiques (calcul intégral principalement). Nous sommes partis du calcul de l'intégrale en remplaçant $v(x)$ par son expression en fonction de x pour parvenir à $w(x)$. Par un changement de variables, nous avons obtenu l'expression suivante de l'intégrale :

$$\int_{x1}^{x} \frac{v(u)-1}{u\,v(u)}\,du = \ln\left(\frac{f(R,t)}{R}\right) - \ln\left(\frac{f(R1,t)}{R1}\right)$$

Or, la déformation de la paroi intérieure se fait dans le sens des r croissants. Ainsi, si initialement on à $R=R_1$ alors il n'y a pas de dilatation possible donc pas de déformation. D'où $\mathrm{f(R1,t)} = \mathrm{R1}$

On reconnaît ainsi l'expression de $\ln(w(x))$, d'où le résultat suivant :

$$w(x) = \exp\left(\int_{x1}^{x} \frac{v(u)-1}{u\,v(u)}\,du\right) \qquad (2)$$

(cf. question 5 annexe 3)

-Pour parvenir à établir l'équation (3), nous avons du combiner deux équations.

D'une part, nous avons essayé de déterminer $\boldsymbol{\sigma}$ grâce aux hypothèses de l'énoncé afin de faire intervenir la constante de poisson ν. Nous avons d'abord calculé G en utilisant la formule $G = grad(\vec{v})$ où $\vec{v}$ représente la vitesse. Nous avons ensuite calculé les tenseurs déviatoriques W et symétriques D. On a ainsi obtenu que $\dot{\sigma} = \lambda\, tr\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{D}$

Afin d'obtenir les dérivées spatiales de $f(\dot{R},t)$ en fonction de R en non de r, on a effectué un changement de variable, puis nous avons intégré $\dot{\sigma}$ par rapport au temps. Ainsi, nous avons obtenu les composantes non nulles du tenseur des contraintes σ.

L'équation indéfinie du mouvement sans efforts à distance nous a permis d'obtenir la première équation :

$$div\,\boldsymbol{\sigma} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

D'autre part, nous devions avoir une équation de v'(x). Pour simplifier les calculs, nous avons calculé avec g'(R) et obtenu notre deuxième équation.

En combinant ces deux équations nous avons obtenu l'équation (3) :

$$v'(x) = \frac{v(x) + (1-2\nu)\ln(v(x)) - 1}{(1-\nu)\,x} \qquad (3)$$

(cf. question 5 (suite) annexe 4)

-Enfin, pour obtenir la dernière équation, nous nous sommes servis de la relation :

$$\sigma_{rr}(x=1,t) = -p(t)$$

En effet, le cas x=1 correspond au cas où R=Ro, c'est-à-dire au cas limite « inférieur ». On constate qu'alors la norme de la contrainte radiale σrr vaut (en x=1) -p(t).

Une suite de calculs nous fournit l'expression de σrr en fonction de x, qu'il ne reste plus qu'à exprimer en 1. On obtient alors l'expression recherchée :

$$\frac{v^{1-\nu}(1)}{w(1)} = \exp\left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)p(t)}{E}\right) \qquad (4)$$

(cf. question 5 (suite) annexe 4)

Il ne nous reste plus alors qu'à exprimer f(R ,t) ainsi que nos différents tenseurs en fonction de v(x) et de w(x). On verra comment la résolution numérique nous permet d'arriver à des résultats plus aboutis dans la seconde partie. Pour faire cela, nous avons simplement procédé à des substitutions de R dans les expressions des tenseurs précédemment trouvées. On obtient ainsi :

$$f(R,t) = R\,w(x)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln\left(\dfrac{w(x)}{v(x)^{1-\nu}}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln\left(\dfrac{w(x)}{v(x)^{\nu}}\right) \\ \sigma_{zz} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln\left(\dfrac{w^2(x)}{v(x)}\right) \end{cases}$$

Ainsi que :

$$E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\left(\dfrac{v}{w}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{1}{W^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(cf. question 6 annexe 5)

2) Modélisation numérique

Dans cette partie, nous cherchons à trouver les valeurs approchées prises par la fonction f caractérisant le déplacement radiale de la paroi intérieure du cylindre. D'après la modélisation mécanique nous avons déjà une expression de f en fonction de la fonction w(x), qui s'exprime, elle, en fonction de v(x). Ainsi nous devons dans un premier temps résoudre l'équation différentielle dont la fonction v est solution. Puis grâce à l'équation (2) nous pourrons obtenir les valeurs prises par la fonction w et ainsi déterminer le déplacement radial.

L'équation différentielle (3) est non linéaire et nous avons dû utiliser la méthode « d'Euler explicite » avec le logiciel Matlab pour pouvoir en déterminer une solution approchée. Nous avons d'abord créé une fonction « trouve » qui permet de déterminer les valeurs de v et w à l'abscisse x.

Les variables d'entrées sont les valeurs qui apparaissent dans les expressions de v, w, des composantes des deux tenseurs. Il s'agit de R_0, R_1 (notés R0 et R1) les rayons extrémaux, le module d'Young E (noté e dans notre fonction), le coefficient de poisson ν, la pression supposée uniforme (constante dans l'espace, ne variant que en fonction du temps).

Il nous faut aussi une condition aux limites noté v0 et le pas h pour appliquer la méthode d'Euler explicite. Dans un premier temps on définit les valeurs qui interviennent par la suite comme x1=R0/R1 et le nombre d'itérations N qui correspond à l'écart entre l'abscisse final et initiale x1,le tout divisé par le pas.

Par la suite, on initialise la matrice de v par son premier terme ; on fait alors une boucle "for" pour obtenir la matrice v en utilisant la méthode d'Euler explicite. On passe alors au calcule de w en utilisant une matrice intermédiaire et en approximant la fonction v par une fonction en escalier (continue par morceaux). On ressort alors la matrice recherchée.

On intègre ce petit programme dans un second qui fait une boucle sur les calculs des tenseurs de contrainte et de déformation. On ressort alors deux matrices qui nous donnent les contraintes et les déformations suivant les lignes on a σ_{rr} ; $\sigma_{\theta\theta}$; σ_{zz} (idem pour les déformations).

Analyse des résultats obtenus

Pour obtenir des résultats cohérent nous devons prendre une certaine valeur pour 'v0' qui n'est pas quelconque. En effet elle doit satisfaire la condition initiale et pour cela nous la prenons égale à 4,94.

Avec les données du problème on obtient alors des courbes pour les contraintes et les déformations. Nous allons les analyser.

La courbe des contrainte sigma rr ressemble fortement a une fonction racine elle part de -8 pour arriver vers -1. On remarque que la courbe représentative de sigma zz est très semblable à sigma rr , à la différence que celle-ci commence à -10 pour finir à 0. Quant à sigma θθ sa courbe ressemble aussi à une racine mais elle commence à -1 pour finir à 1.

Pour le tenseur des déformations la courbe représentative de Err doit être une fonction de la forme A*exp(-x)), on observe bien qu'elle converge vers 0. On a par contre Eθθ qui s'assimiler à une droite mais on voit bien une légère courbure qui laisse pensé à une fonction en 1/x, elle reste toujours très proche de 0 et semble tendre vers 0.

Toutes les courbes, à l'exception de sigma θθ, semblent tendre vers 0. Ceci paraît assez encourrageant car il est logique que lorsque l'on s'éloigne de la source de pression les contraintes ainsi que les déformations s'atténuent.