

Génie Parasismique

Etude de la vulnérabilité sismique d'un HLM

Modification du comportement par ajout d'un système TMD

(Sol de classe D, Séisme de type 1)

Partie I

1. Les dimensions de chacun des murs et planchers sont connues : il est donc possible d'en calculer le volume. La densité des éléments est connue. Il est donc possible de calculer la masse de chacun des murs et planchers, et ce, à l'aide de la relation suivante :

$$m(\text{élément}) = V(\text{élément}) \times d \times \rho_{eau}$$

Le terme $m(\text{élément})$ désigne la masse de l'élément considéré. Le terme $V(\text{élément})$ désigne le volume de l'élément considéré. Le terme d est la densité de l'élément. Le terme ρ_{eau} désigne la masse volumique de l'eau.

La relation suivante permet alors d'obtenir le poids de chacun des éléments :

$$Poids(\text{élément}) = m(\text{élément}) \times g$$

Les poids des différents murs et planchers sont donnés dans le tableau suivant :

Eléments	1	2 à 5	6/7	8/10/14	9	11	12	13	Plancher
LX(en m)	0,1	0,1	1,65	0,1	2,26	3,73	0,1	0,1	16,5
LY(en m)	10	4,08	0,1	5,11	0,1	0,1	0,8	2,21	10
Volume (en mètre cube)	2,65	1,081	0,43725	1,35415	0,599	0,988	0,212	0,5857	24,75
Masse (en tonnes)	5,83	2,379	0,96195	2,97913	1,318	2,175	0,466	1,2884	54,45
Poids (en kN)	0,057	0,023	0,00943	0,0292	0,013	0,021	0,005	0,0126	0,53361

La masse totale des murs est ainsi de 31,45 tonnes, ce qui donne, ajoutée à la masse du plancher, la masse d'un étage : 85,9 tonnes.

2. La formule donnant la rigidité d'un élément bi-encasté est la suivante :

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_f}}$$

Avec

$$k_f = \frac{12EI}{h^3}$$

Et

$$k_c = \frac{GS_c}{h}$$

E et G sont respectivement les modules de Young et de cisaillement du matériau. I est l'inertie de l'élément étudié dans la direction considérée (X ou Y). Le terme h désigne la hauteur du mur (ou l'épaisseur, s'il s'agit d'un plancher). S_c est égale au 5/6 de la surface de la section de l'élément considéré.

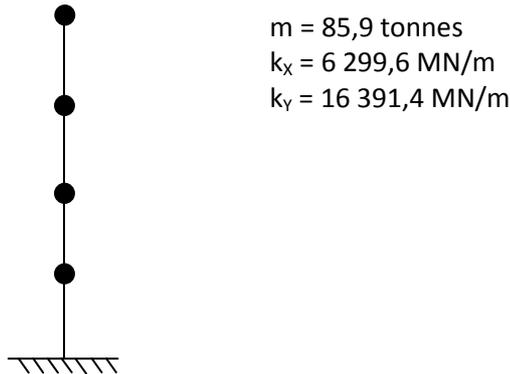
Les rigidités de chacun des éléments sont données dans le tableau suivant :

Eléments	1	2 à 5	6/7	8/10/14	9	11	12	13	Plancher
k dans la direction X (en MN/m)	13,379	5,459	285,122	6,83669	501,1	1040	1,07	2,9568	9548337
k dans la direction Y (en MN/m)	3197,7	1166	2,20754	1530,92	3,024	4,99	54,48	482,86	9547865

Les valeurs de rigidité d'un étage (obtenue par sommation des rigidités des murs constituant un étage) sont données dans le tableau suivant :

Rigidité d'un étage	
k dans la direction X (MN/m)	6299,633544
k dans la direction Y (MN/m)	16391,36562

3. Nous proposons, pour le bâtiment la modélisation masse ressort suivante, reposant sur un encastrement à sa base :



Nous supposons le sol est les planchers indéformables. Cette hypothèse peut être justifiée en observant les rigidités calculées précédemment. En effet, les rigidités de flexion selon l'axe X et selon l'axe Y, ainsi que la rigidité de cisaillement pour un plancher sont très élevées et largement supérieures aux rigidités calculées pour les autres éléments. Nous pouvons donc considérer les planchers comme des éléments indéformables.

Dans notre modélisation, les masses sont concentrées au niveau des planchers. Cette hypothèse est justifiable en comparant les masses calculées précédemment. La masse des murs pour un étage est de 31,45 tonnes, alors que la masse d'un plancher est de 54,45 tonnes. Pour faciliter les calculs, nous considérons donc que la masse totale d'un étage est concentrée dans le plancher et vaut 85,9 tonnes, pour tous les étages.

A l'aide de cette modélisation, nous calculons les paramètres modaux de ce bâtiment : fréquences et déformées modales (normalisées à 1), coefficient de participation et masses modales.

En appliquant les principes de la dynamique pour chaque étage, nous obtenons le système de résolution suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} m * \ddot{U}_1 + k * U_1 - k * (U_2 - U_1) = 0 \\ m * \ddot{U}_2 + k * (U_2 - U_1) - k * (U_3 - U_2) = 0 \\ m * \ddot{U}_3 + k * (U_3 - U_2) - k * (U_4 - U_3) = 0 \\ m * \ddot{U}_4 + k * (U_4 - U_3) = 0 \end{array} \right.$$

Soit le système matriciel suivant :

$$M\ddot{U} + KU = 0$$

Nous recherchons les solutions périodiques, de la forme $U = \phi e^{i\omega t}$. Cela revient à chercher les vecteurs propres ϕ_i et les valeurs propres ω_i^2 associées, tels que :

$$(M^{-1} * K - \omega_i^2 * I)\phi_i = 0$$

- **Direction X :**

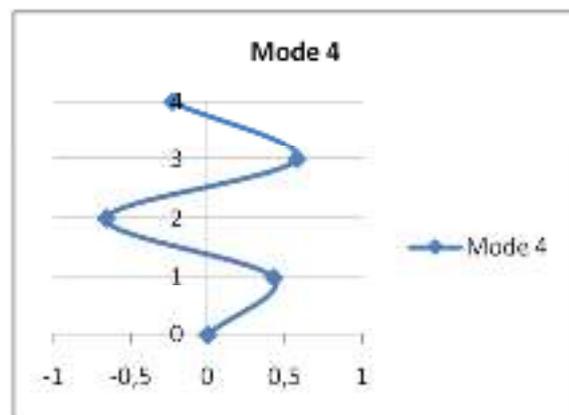
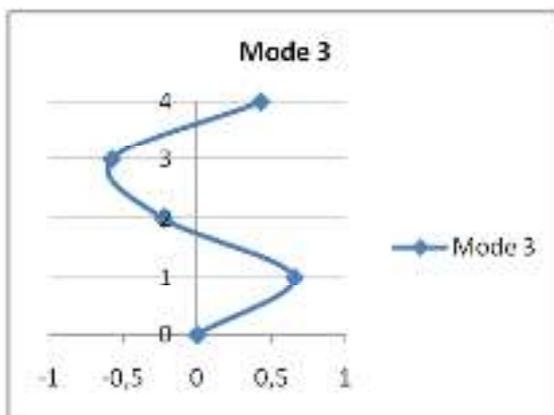
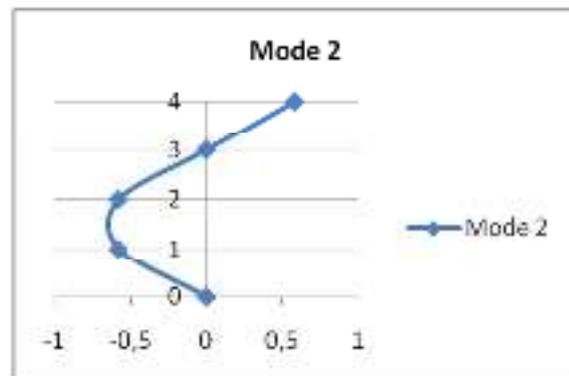
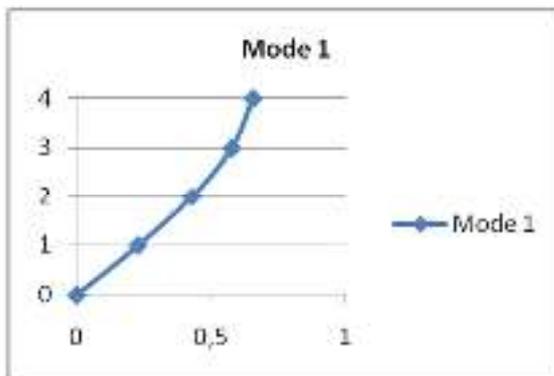
Après avoir résolu ce système à l'aide d'une calculatrice, nous obtenons les valeurs de fréquences propres et de fréquences suivantes, pour la direction X :

$\omega_1^2 (s^{-2})$	8845,50	$f_1 (Hz)$	14,97
$\omega_2^2 (s^{-2})$	73336,83	$f_2 (Hz)$	43,10
$\omega_3^2 (s^{-2})$	1,72E+05	$f_3 (Hz)$	66,03
$\omega_4^2 (s^{-2})$	2,59E+05	$f_4 (Hz)$	81,00

Rappel : $f = \omega/2\pi$

Nous obtenons les déformées modales suivantes (normalisées à 1) :

Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
0,22801	-0,57735	0,65653	0,42852
0,42852	-0,57735	-0,22801	-0,65653
0,57735	3,5E-11	-0,57735	0,57735
0,65653	0,57735	0,42852	-0,22801



Comme les déformées modales sont normalisées à 1, et comme la valeur des masses et raideurs sont identiques, nous pouvons utiliser les formules suivantes pour calculer les coefficients de participation, et les masses modales :

$$p_i = \sum_j \varphi_{ij}$$

$$m_i = p_i^2$$

p_1	1,890
p_2	-0,577
p_3	0,280
p_4	0,121

$m_1(t)$	306,98
$m_2(t)$	28,63
$m_3(t)$	6,72
$m_4(t)$	1,26

On retrouve bien :

$$\sum_i m_i = m_{total} = 343,6 \text{ tonnes}$$

- **Direction Y :**

De même que pour la direction X, nous obtenons les valeurs de fréquences propres et de fréquences suivantes, cette fois-ci pour la direction Y :

$\omega_1^2 (s^{-2})$	23015,61	$f_1 (Hz)$	24,15
$\omega_2^2 (s^{-2})$	1,91E+05	$f_2 (Hz)$	69,52
$\omega_3^2 (s^{-2})$	4,48E+05	$f_3 (Hz)$	106,52
$\omega_4^2 (s^{-2})$	6,74E+05	$f_4 (Hz)$	130,66

Nous obtenons les déformées modales suivantes (normalisées à 1), identiques à celles obtenues dans la direction X :

Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
0,22801	-0,57735	0,65653	0,42852
0,42852	-0,57735	-0,22801	-0,65653
0,57735	3,5E-11	-0,57735	0,57735
0,65653	0,57735	0,42852	-0,22801

Les coefficients de participation, ainsi que les masses modales dans la direction Y sont identiques aux valeurs trouvés dans la direction X.

On ne s'intéressera dans la suite du projet qu'à la direction X.

4. Les modes principaux sont le ou les premiers modes dont les masses modales représentent au moins 90% de la masse totale du bâtiment soit 343,6 tonnes. Le premier mode représente 89,3% de la masse totale, ce n'est donc pas suffisant. Si nous prenons les deux premiers modes, nous avons 97,67% de la masse totale. Les modes principaux sont donc les modes 1 et 2.

Nous nous plaçons dans le cas où le sol est de classe D, et le séisme de type 1. En utilisant le spectre de réponse élastique des Eurocodes, nous avons donc les valeurs suivantes :

S	1,35	T _C (s)	0,8
T _B (s)	0,2	T _D (s)	2
η	1	Agr (m/s ²)	1
γ _i	1		

De plus, nous pouvons calculer facilement les périodes T₁ et T₂, qui sont les inverses des fréquences f₁ et f₂, dans la direction X :

$$T_1 = 0,0668 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_2 = 0,0232 \text{ s}$$

Nous sommes donc dans le cas où : $0 < T_1 \text{ et } T_2 < T_B = 0,2 \text{ s}$

Nous avons donc la formule suivante :

$$Se(T) = S * A_{gr} * \gamma_i * (1 + (2,5 * \eta - 1) * \frac{T}{T_B})$$

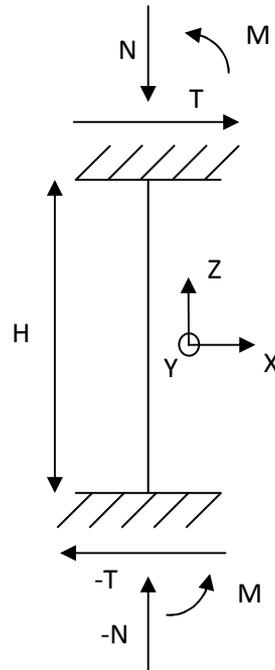
Ensuite, nous calculons les déplacements au niveau de chaque étage, pour en déduire les déplacements inter-étages :

$$\vec{U}_i = p_i * \frac{Se(T_i)}{\omega_i^2} * \vec{\varphi}_i$$

Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

Niveau	U ₁ (m)	ΔU ₁ (m)	U ₂ (m)	ΔU ₂ (m)
1	9,87E-05	9,875E-05	7,204E-06	7,204E-06
2	0,000186	8,684E-05	7,204E-06	0
3	0,000250	6,445E-05	2,221E-19	-7,204E-06
4	0,000284	3,429E-05	-7,204E-06	-7,204E-06

5. On cherche à déterminer le déplacement inter-étage Δu amenant à un début de rupture des murs du rez-de-chaussée. Pour ce faire, les murs du rez-de-chaussée sont modélisés par des poutres encastrées à leurs extrémités.



Les murs du rez-de-chaussée supportent le poids des étages 1, 2 et 3. On note S_i la surface de la section du mur i . La somme de ces surfaces S_i est notée S . L'effort N auquel est soumis le mur i est alors donné par :

$$N = -\frac{mgS_i}{S}$$

Le terme m est la masse des étages 1, 2 et 3. Le terme mg est alors le poids des étages 1, 2 et 3.

L'effort T auquel est soumis la poutre est donné par :

$$T = k\Delta u$$

Le terme k désigne la raideur du ressort modélisant le mur considéré dans la direction X . Δu est le déplacement inter-étage.

Le moment M et l'effort T sont liés par la relation suivante :

$$M = \frac{TH}{2}$$

Le terme H désigne la hauteur du mur.

Ainsi, le moment M s'exprime de la manière suivante :

$$M = \frac{kH\Delta u}{2}$$

Au niveau de la section de cote z , l'effort normal $N(z)$, l'effort tranchant $V(z)$ et le moment $M(z)$ s'expriment de la manière suivante :

$$N(z) = \frac{mgS_i}{S}$$

$$V(z) = -k\Delta u$$

$$M(z) = k\Delta u\left(z - \frac{H}{2}\right)$$

On considère la section de cote z du mur i . Au niveau de cette section, les contraintes $\sigma_{zz}(z, x, \Delta u)$ et $\sigma_{zx}(x, z, \Delta u)$ s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{zz}(x, z, \Delta u) = \frac{N(z)}{S_i} - \frac{M(z)x}{I_y}$$

$$\sigma_{zx}(x, z, \Delta u) = 1,5 \frac{T(z)}{S}$$

Les contraintes associées aux autres directions sont nulles. La matrice $\sigma(x, z, \Delta u)$ s'écrit alors :

$$\sigma(x, z, \Delta u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{zz}(x, z, \Delta u) - \sqrt{\sigma_{zz}(x, z, \Delta u)^2 + 4\sigma_{zx}(x, z, \Delta u)^2}}{2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{zz}(x, z, \Delta u) + \sqrt{\sigma_{zz}(x, z, \Delta u)^2 + 4\sigma_{zx}(x, z, \Delta u)^2}}{2}$$

Ces valeurs propres ont été déterminées à partir du polynôme caractéristique de la matrice étudiée. Cette dernière est une matrice carrée de taille 3×3 : son polynôme caractéristique est donc de degré 3. Or, 0 est une racine évidente de ce polynôme : ainsi, il s'agit de calculer les racines d'un polynôme de degré 2 pour déterminer les deux dernières valeurs propres.

On suppose que le comportement des murs est élastique, linéaire et isotrope. Ainsi, les matrices de contrainte et de déformation sont liées par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} tr(\sigma) \delta$$

On en déduit que les valeurs propres de la matrice de déformation sont :

$$\varepsilon_1 = -\frac{\vartheta}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \vartheta}{E}\sigma_2 - \frac{\vartheta}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 + \vartheta}{E}\sigma_3 - \frac{\vartheta}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

Ces valeurs propres sont calculées pour x égal à $Lx/2$: les contraintes calculées, et, par suite, les déformations, sont maximales pour cette valeur de x (ce serait également vrai pour x égal à $-Lx/2$). On recherche alors la valeur maximale de Δu pour laquelle :

$$\forall z \in [0, H], \quad \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \leq 10^{-4}$$

Pour résoudre ce problème, on réalise une analyse de scénario avec Excel. Pour chaque mur, on obtient un déplacement maximal admissible. Cependant, les calculs n'ont été menés que sur les murs 1 et 11. Les valeurs limites de déplacement Δu obtenues pour ces deux murs sont données dans le tableau suivant :

	Mur 1	Mur 11
Valeur limite de déplacement Δu (en m)	0,001816244	0,000243328
Déformation maximale obtenue	0,000100002	0,000100902

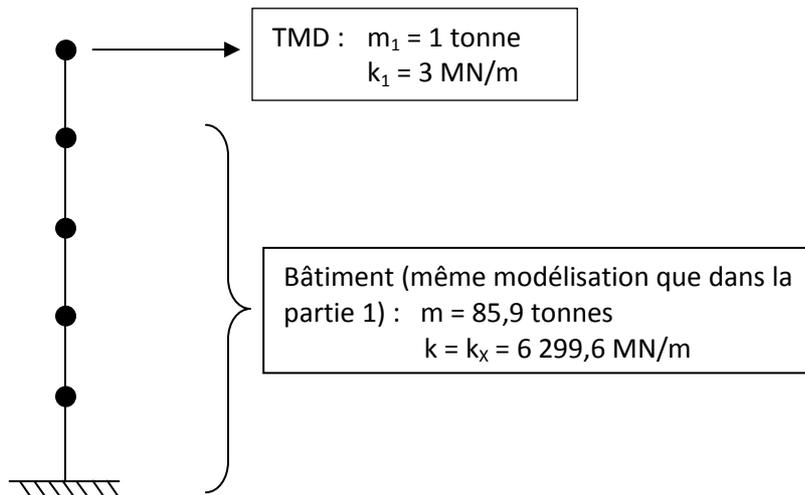
Pour une accélération au rocher de $1m/s^2$, on obtient un déplacement de l'ordre du dixième de millimètre du plancher 1 (cf. question 4). Or, le déplacement maximal admissible pour le mur 1 est de l'ordre du millimètre et le déplacement maximal admissible pour le mur 11 est de l'ordre de 2 dixièmes de millimètre. Ainsi, le séisme considéré ici ne devrait pas amener à la rupture des murs 1 et 11 : le bâtiment étudié ici devrait donc résister au séisme.

Partie II : Modification du comportement dynamique

6. Un système masse-ressort (TMD) est fixé sur le toit de l'immeuble, dont les caractéristiques sont les suivantes :

Masse : 1 tonne
Rigidité : 3 MN/m

Le système bâtiment – TMD peut ainsi être modélisé de la manière suivante :



Nous obtenons cette fois-ci le système suivant :

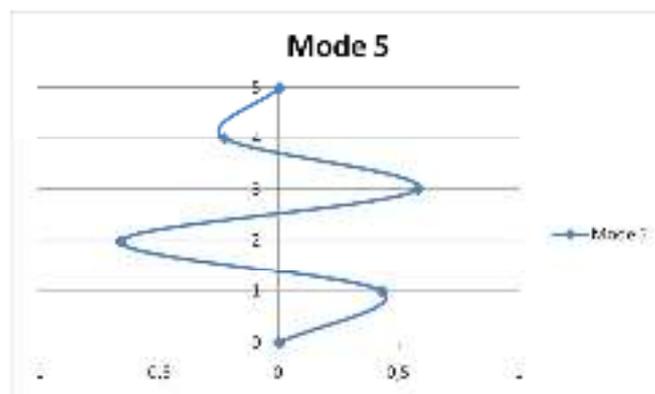
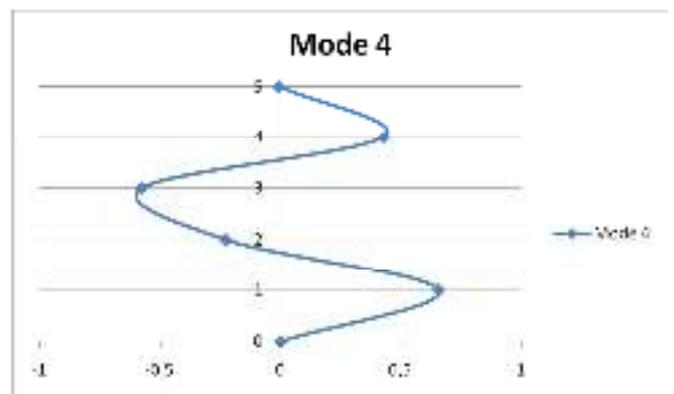
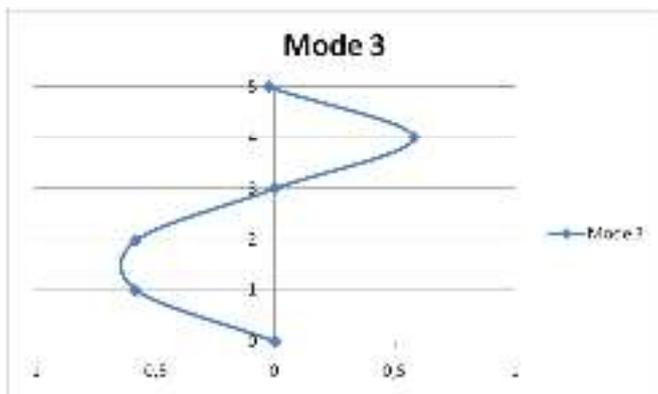
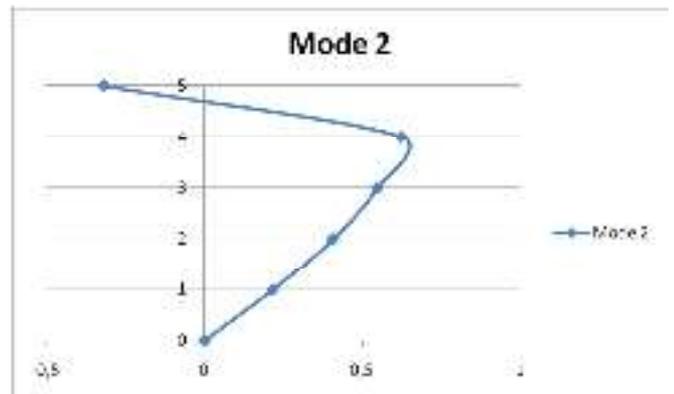
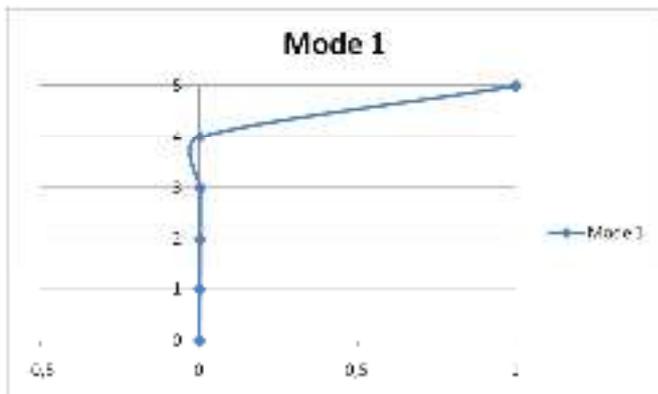
$$\begin{cases} m * \ddot{U}_1 + k * U_1 - k * (U_2 - U_1) = 0 \\ m * \ddot{U}_2 + k * (U_2 - U_1) - k * (U_3 - U_2) = 0 \\ m * \ddot{U}_3 + k * (U_3 - U_2) - k * (U_4 - U_3) = 0 \\ m * \ddot{U}_4 + k * (U_4 - U_3) - k_1 * (U_5 - U_4) = 0 \\ m_1 * \ddot{U}_5 + k_1 * (U_5 - U_4) = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système, nous obtenons :

ω_1^2 (s ⁻²)	2,99E+03	f_1 (Hz)	8,71
ω_2^2 (s ⁻²)	8,87E+03	f_2 (Hz)	14,99
ω_3^2 (s ⁻²)	73348,9	f_3 (Hz)	43,10
ω_4^2 (s ⁻²)	172149,8	f_4 (Hz)	66,03
ω_5^2 (s ⁻²)	259034,03	f_5 (Hz)	81,00

Nous obtenons ensuite les déformées modales suivantes (normalisées à 1) :

ϕ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
0,00077	0,21630	-0,57718	0,65649	0,42851
0,00150	0,40644	-0,57708	-0,22806	-0,65652
0,00219	0,54743	1,91E-04	-0,57727	0,57736
0,00277	0,62222	0,57727	0,42859	-0,22806



Pour le calcul des facteurs de participation et des masses modales, nous ne pouvons plus utiliser la formule simplifiée de la question 3 puisque, cette fois-ci, les masses et rigidités ne sont plus les mêmes. Nous utilisons donc les formules générales suivantes :

$$p_i = \frac{{}^t\vec{\varphi}_i M \vec{\delta}}{{}^t\varphi_i M \varphi_i} ; \quad m_i = \frac{({}^t\vec{\varphi}_i M \vec{\delta})^2}{{}^t\varphi_i M \varphi_i}$$

Avec : M la matrice de masse du système bâtiment – TMD,

φ_i les déformées modales,

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi les valeurs suivantes :

p_1	1,620
p_2	1,987
p_3	-0,577
p_4	0,280
p_5	0,121

$m_1(t)$	2,627
$m_2(t)$	305,36
$m_3(t)$	28,624
$m_4(t)$	6,719
$m_5(t)$	1,264

On a bien :

$$\sum_i m_i = m_{total} = 344,6 \text{ tonnes}$$

En comparant les déformées modales du système bâtiment et du système bâtiment – TMD, on remarque que le 1^{er} mode est le seul à avoir deux allures vraiment différentes selon les cas.

Dans le premier cas, les niveaux se déforment peu à peu dans la même direction, alors que dans le second cas, les quatre premiers niveaux restent stables, avec une légère déformation qui apparaît entre les niveaux 3 et 4 ; par contre, le niveau 5 subit une importante déformation : la déformation est reprise par le système masse-ressort TMD. Ce système va donc permettre de minimiser de manière significative les déplacements inter-étages du premier mode.

Pour les autres modes, les allures semblent identiques, mais on peut constater que les déformations n'ont pas lieu aux mêmes niveaux : le système TMD entraîne un décalage dans l'apparition des déformations dans les niveaux.

7. Pour avoir une masse modale supérieure à 90% de la masse totale, il faut prendre les trois premiers modes. Nous prenons cette fois-ci une valeur d'amortissement de 15%, ce qui donne :

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}} = 0,707$$

Les autres valeurs nécessaires aux calculs des déplacements inter-étages sont les mêmes :

S	1,35	T _C (s)	0,8
T _B (s)	0,2	T _D (s)	2
η	0,707	Agr (m/s ²)	1
γ _i	1		

De la même manière que pour la question 4, nous commençons par calculer les périodes :

$$T_1 = 0,11487 \text{ s}$$

$$T_2 = 0,06672 \text{ s}$$

$$T_3 = 0,023199 \text{ s}$$

Le sol est toujours de classe D, et le sol de type 1, on a donc encore : $0 < T_1, T_2 \text{ et } T_3 < T_B = 0,2 \text{ s}$.

Nous obtenons ainsi les valeurs des déplacements inter-étages suivantes :

Niveau	U1 (m)	ΔU1 (m)	U2 (m)	ΔU2 (m)	U3 (m)	ΔU3 (m)
1	8,11E-07	8,11E-07	8,22E-05	8,22E-05	6,68E-06	6,68E-06
2	1,59E-06	7,78E-07	1,54E-04	7,23E-05	6,68E-06	-1,11E-09
3	2,30E-06	7,13E-07	2,08E-04	5,36E-05	-2,21E-09	-6,68E-06
4	2,92E-06	6,19E-07	2,36E-04	2,84E-05	-6,68E-06	-6,68E-06
5	1,05E-03	0,001050338	-1,21E-04	-0,00035736	2,85E-07	6,97E-06

Nous constatons que le système TMD diminue de manière significative les déplacements inter-étages du mode 1, qui était le mode prépondérant dans la partie précédente, sans le dispositif. Par contre, avec le dispositif, c'est le mode 2 qui est prépondérant, et c'est aussi pour ce mode là que les déplacements inter-étages sont maxima (8,22E-05 mètre pour le premier étage, nous ne prenons pas en compte les déplacements du niveau 5, qui correspond au système).

En conclusion, le dispositif TMD, modifie les modes de vibration, et, en particulier, le mode prépondérant. Néanmoins, en comparant les déplacements inter-étages pour le bâtiment seul et pour le bâtiment le système TMD, ces derniers diminuent de presque 17%, ce qui est un point positif. Cette solution est donc efficace, dans une certaine mesure, ce qui peut laisser s'interroger sur la pertinence de ce type de système. D'autres solutions seraient à étudier, notamment au niveau des fondations (appuis glissants, néoprène ou autres systèmes de dissipation d'énergie).