ENTPE novembre 2013

Résistance des matériaux – Test sujet

Documents autorisés : Polycopiés et notes de cours

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

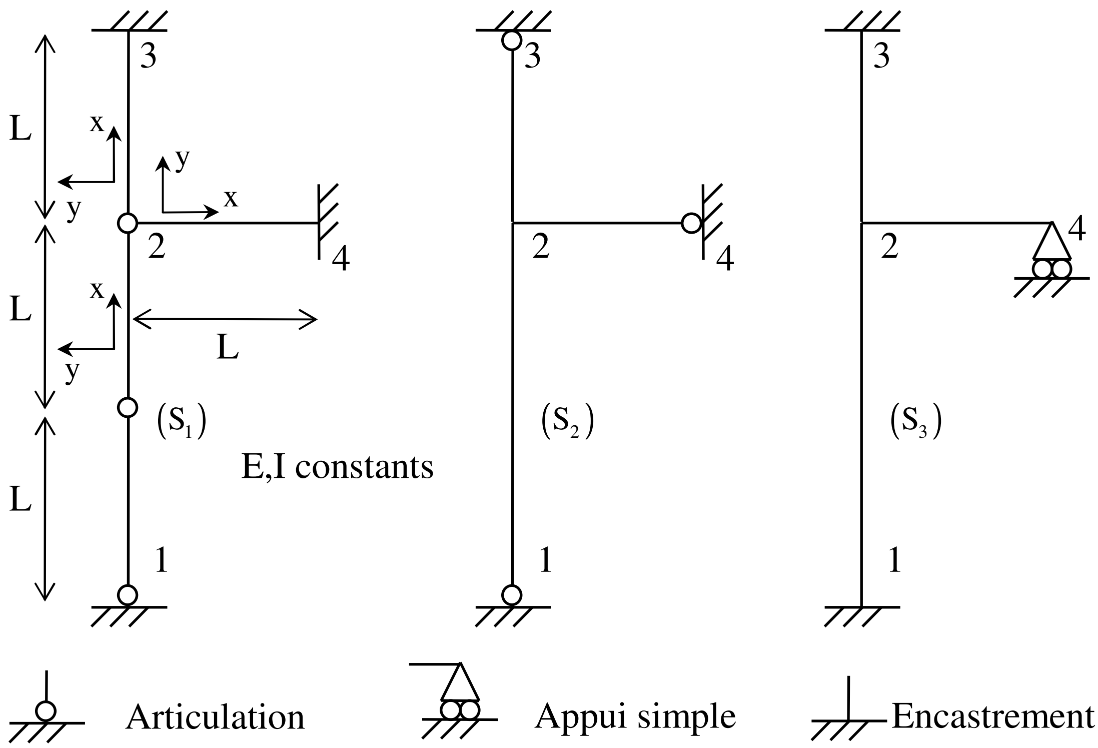
Pour chacune des 3 structures suivantes, indiquez si possible :

Pour la méthode des forces :

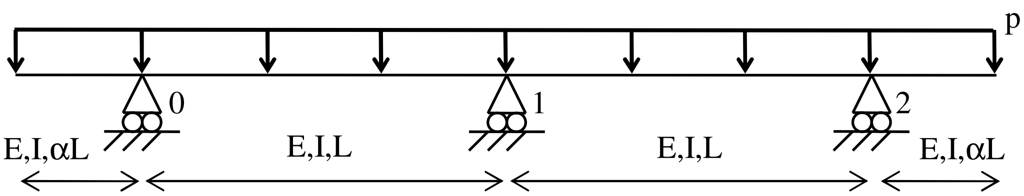
- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place

Pour la méthode des rotations :

- Les inconnues cinématiques
- Les cinématiques des PTV à appliquer (seulement la cinématique)



Partie II : Méthode des forces (7 pts)



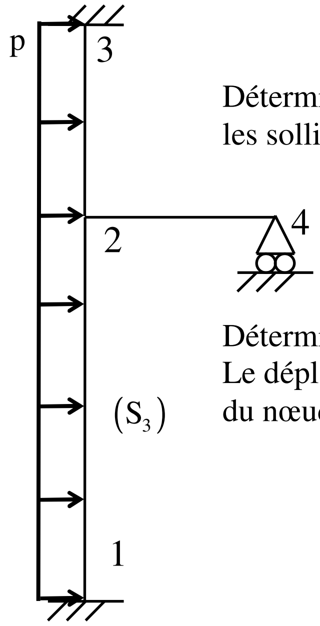
Déterminer α pour avoir $M_0 = M_1$

Pour $\alpha = 1/\sqrt{6}$:

- Tracer $V(x)$ et $M(x)$
- Est-ce la valeur de α pour avoir un moment fléchissant minimum en valeur absolue dans la structure ?
- Déterminer la flèche maximum (on pourra admettre que les flèches et rotations sont toutes nulles au niveau de tous les appuis, on étudiera la console et la travée 1)

Déterminer α maximum pour ne pas avoir de risque de soulèvement à l'appui 1

Partie III : Méthode des déplacements (7 pts)



Déterminer
les sollicitations

Déterminer
Le déplacement
du nœud 4

Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis

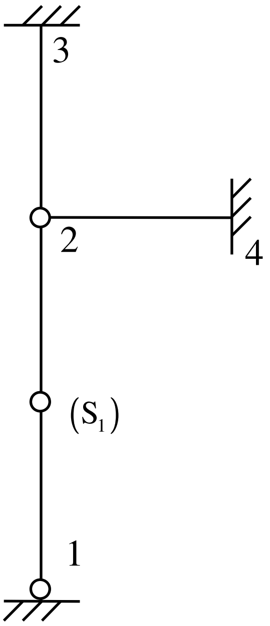
Précisez les 6 paramètres d'un élément fini poutre dans ce problème
Quelle est la taille de la matrice de rigidité élémentaire de cet élément
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale
Quelle est la taille de la matrice inversée par le système
Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est concentrée au nœud 2 (Force ponctuelle horizontale de 3pL appliquée au nœud 2)
Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage

ENTPE mars 2013

Résistance des matériaux – Test ***Corrigé***

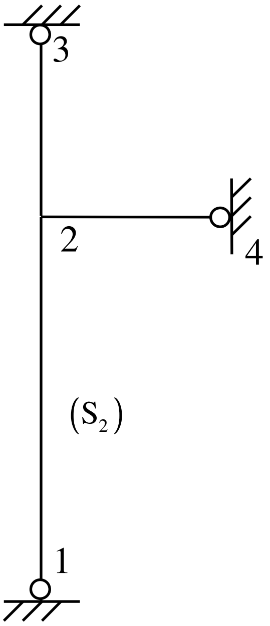
Partie I : Choix de résolution (3 pts)

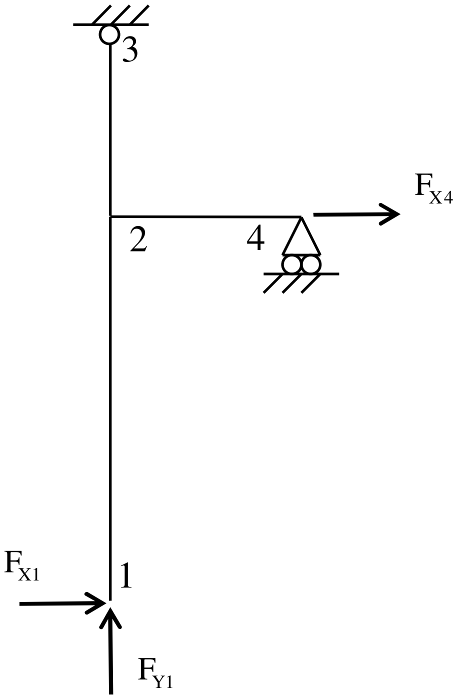
Structure (S_1)



3 rotules alignées
Nous avons un mécanisme

Structure (S_2)



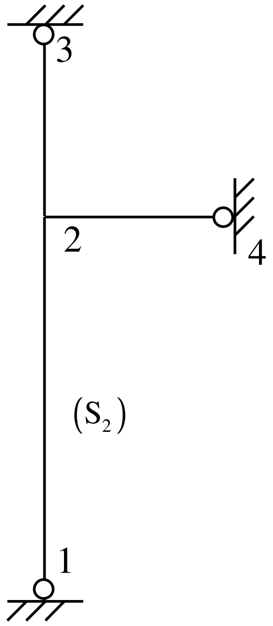


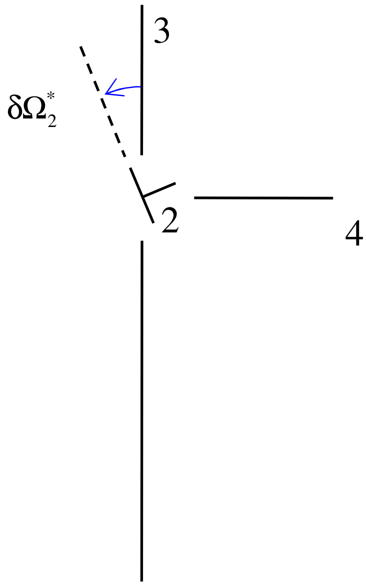
Méthode des forces :

3 inconnues hyperstatiques : F_{X1}, F_{Y1}, F_{X4}

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases}$$





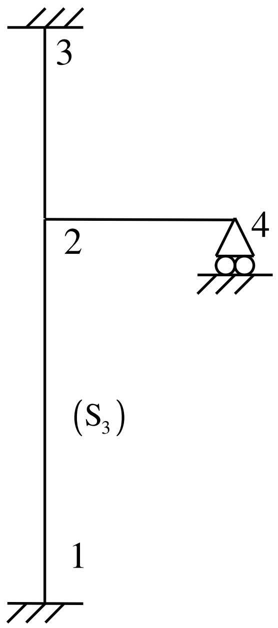
Méthode des rotations :

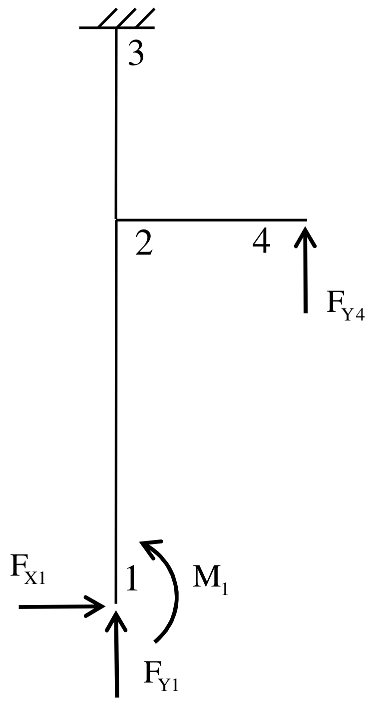
4 inconnues cinématiques
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$
1 après substitution
Ω_2

Equations de type statique :

$$-\frac{W_{ext}^*\left(\delta\Omega_2^*\right)}{\delta\Omega_2^*} = 0$$

Structure (S_3)



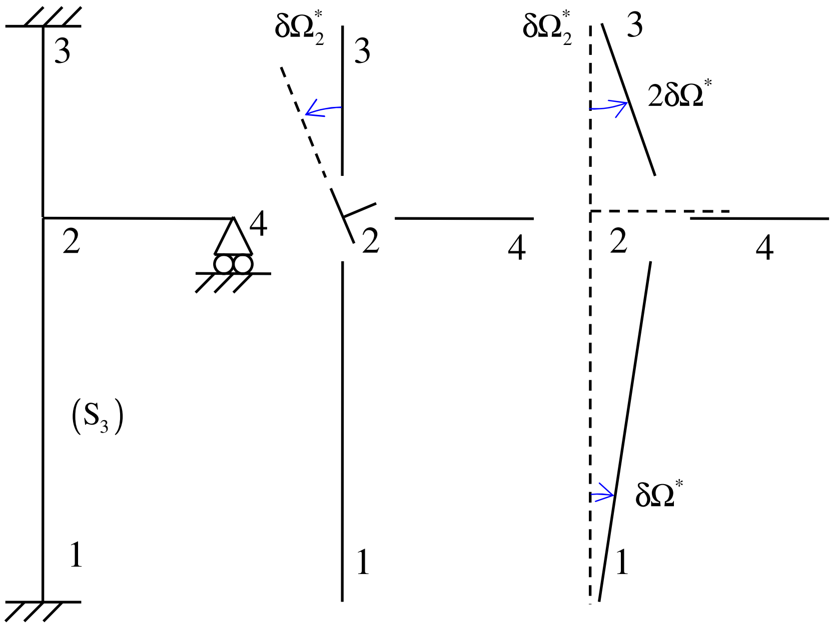


Méthode des forces :

4 inconnues hyperstatiques :
$F_{X1}, F_{Y1}, M_1, F_{Y4}$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ \Omega_1 = 0 \\ V_4 = 0 \end{cases}$$



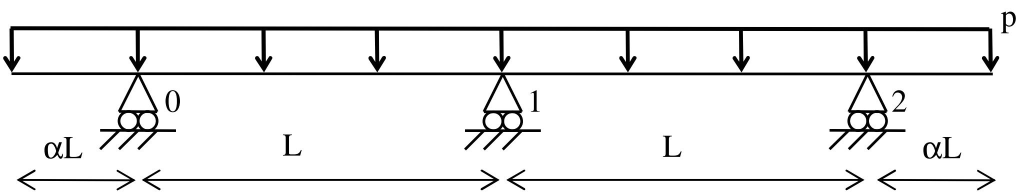
Méthode des rotations :

3 inconnues cinématiques
Ω_2, U_4, Ω_4
2 après substitution
Ω_2, U_4
Rotation d'ensemble
Ω_2, Ω

Equations de type statique :

$$\begin{cases} -\dfrac{W_{ext}^*\left(\delta\Omega_2^*\right)}{\delta\Omega_2^*} = 0 \\ -\dfrac{W_{ext}^*\left(\delta\Omega^*\right)}{\delta\Omega^*} = 0 \end{cases}$$

Partie II : Méthode des forces (7 pts)



$$M_0 = M_2 = -\frac{p\alpha^2 L^2}{2}$$

Formule des 3 moments $i = 1$

$$L\left(-\frac{p\alpha^2 L^2}{2}\right) + 4LM_1 + L\left(-\frac{p\alpha^2 L^2}{2}\right) = -\frac{pL^3}{2}$$

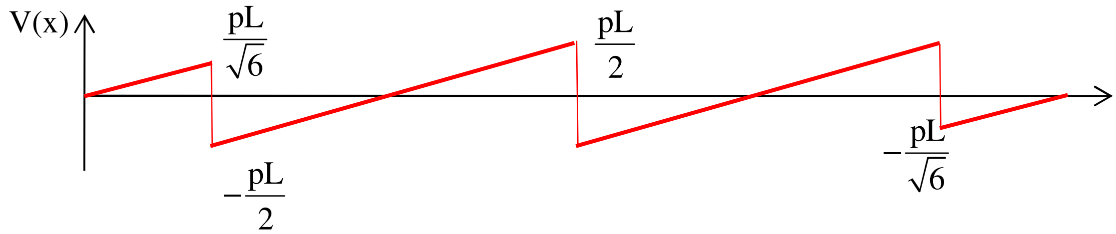
$$M_1 = \frac{p\alpha^2 L^2}{4} - \frac{pL^2}{8}$$

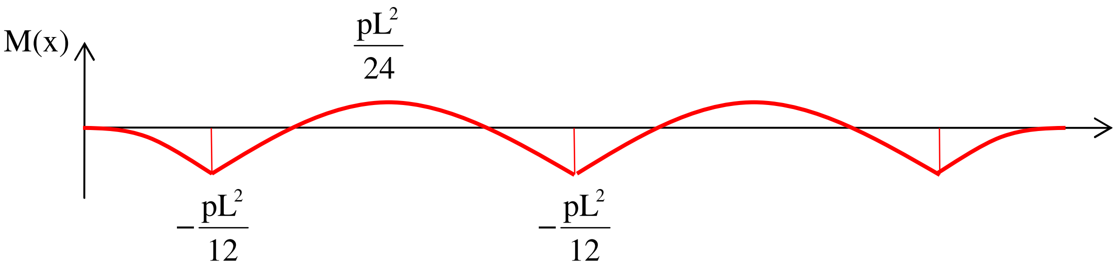
$$M_0 = M_2 = -\frac{pL^2}{8} 4\alpha^2$$

$$M_1 = -\frac{pL^2}{8}\left(1 - 2\alpha^2\right)$$

$M_0 = M_1$ $\qquad$ $1 - 2\alpha^2 = 4\alpha^2$ $\qquad$ $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = 0,408$

$$M_0 = M_1 = M_2 = -\frac{pL^2}{12}$$



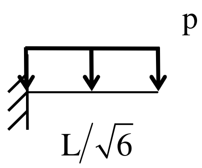


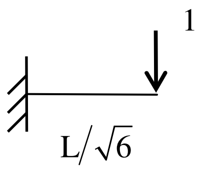
M_1 est une fonction croissante de α

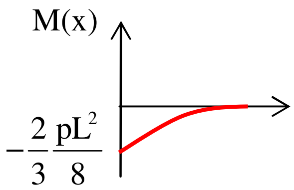
M_0 est une fonction décroissante de α

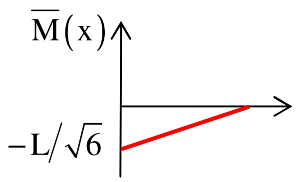
Il s'agit donc bien de l'optimum

Flèche à l'extrémité de la console :









$$\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\frac{pL^2}{8}\right)\left(-\frac{L}{\sqrt{6}}\right)\frac{L}{\sqrt{6}EI}=\frac{pL^4}{288EI}$$

Flèche sur la travée 1-2

1. Résolution de l'équation différentielle de la déformée :

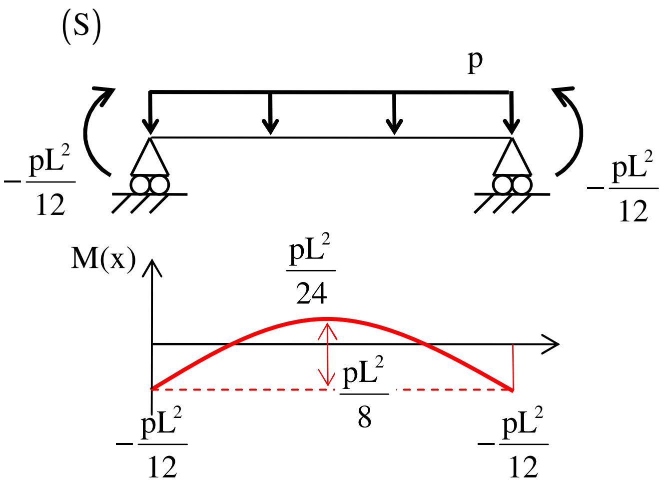
$$EIv''(x)=M(x)=-\frac{2}{3}\frac{pL^2}{8}+\frac{pL}{2}x-\frac{p}{2}x^2$$

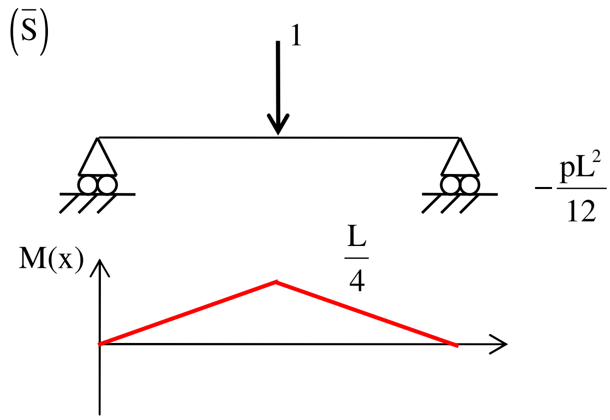
$$EIv'(x)=-\frac{2}{3}\frac{pL^2}{8}x+\frac{pL}{4}x^2-\frac{p}{6}x^3 \qquad v'(0)=0$$

$$EIv(x)=-\frac{2}{3}\frac{pL^2}{16}x^2+\frac{pL}{12}x^3-\frac{p}{24}x^4 \qquad v(0)=0$$

$$EIv\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{2}{3}\frac{pL^2}{16}\frac{L^2}{4}+\frac{pL}{12}\frac{L^3}{8}-\frac{p}{24}\frac{L^4}{16}=-\frac{pL^4}{384}$$

2. Théorème de la charge unitaire :
Problème équivalent :





$$f = \frac{1}{2}\left(-\frac{pL^2}{12}\right)\frac{L}{4}\frac{L}{EI} + \frac{5}{12}\frac{pL^2}{8}\frac{L}{4}\frac{L}{EI}$$

$$f = \frac{pL^4}{384EI}$$

Flèche maximale à l’extrémité de la console : $\frac{pL^4}{288EI}$

Action de liaison en 1 : $F_{1Y} = V_1^- - V_1^+$

$$V_1^- = -\frac{M_1 - M_0}{L} + \frac{pL}{2}$$

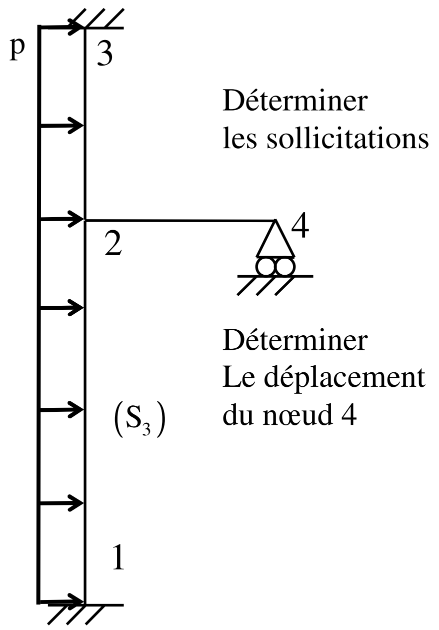
$$V_1^+ = -\frac{M_2 - M_1}{L} - \frac{pL}{2}$$

$$V_1^- - V_1^+ = 2\frac{M_0 - M_1}{L} + \frac{pL}{2}$$

$$F_{1Y} = 2\left(-\frac{p\alpha^2 L}{2} - \frac{p\alpha^2 L}{4} + \frac{pL}{8}\right) + \frac{pL}{2} = \frac{3pL}{4}\left(-2\alpha^2 + 1\right)$$

$$F_{1Y} = 0 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Partie III : Méthode des déplacements (7 pts)



Cinématique : $\Omega_2, \Omega_4, \Omega$ rotation d'ensemble de la poutre 1-2

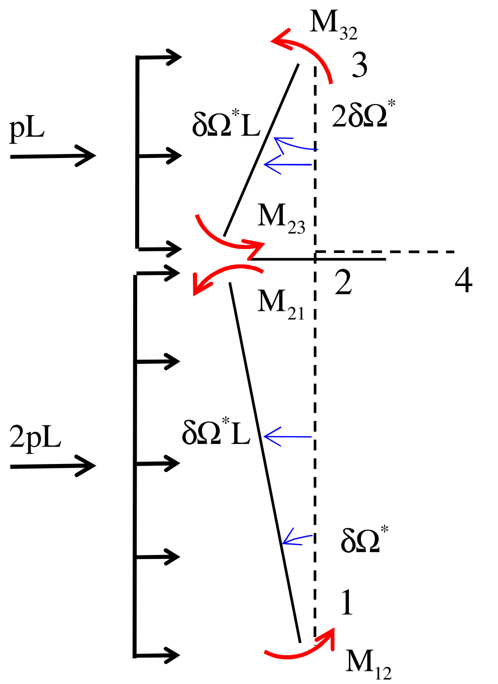
Substitution de l'inconnue Ω_4 :

$$M_{42} = 2\frac{EI}{L}\Omega_2 + 4\frac{EI}{L}\Omega_4 = 0 \qquad \Omega_4 = -\frac{\Omega_2}{2}$$

Equation relative à Ω_2 :

$$\boxed{M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0}$$

Equation relative à Ω :



$$\left(M_{12}+M_{21}\right)\delta\Omega^{*}-\left(M_{23}+M_{32}\right)2\delta\Omega^{*}-pL\delta\Omega^{*}L-2pL\delta\Omega^{*}L=0$$

$$\boxed{-\left(M_{12}+M_{21}\right)+2\left(M_{23}+M_{32}\right)+3pL^{2}=0}$$

$$M_{12}=\frac{EI}{L}\Omega_2-3\frac{EI}{L}\Omega+\frac{pL^2}{3} \qquad M_{23}=4\frac{EI}{L}\Omega_2+12\frac{EI}{L}\Omega+\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{21}=2\frac{EI}{L}\Omega_2-3\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{3} \qquad M_{32}=2\frac{EI}{L}\Omega_2+12\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{24}=3\frac{EI}{L}\Omega_2$$

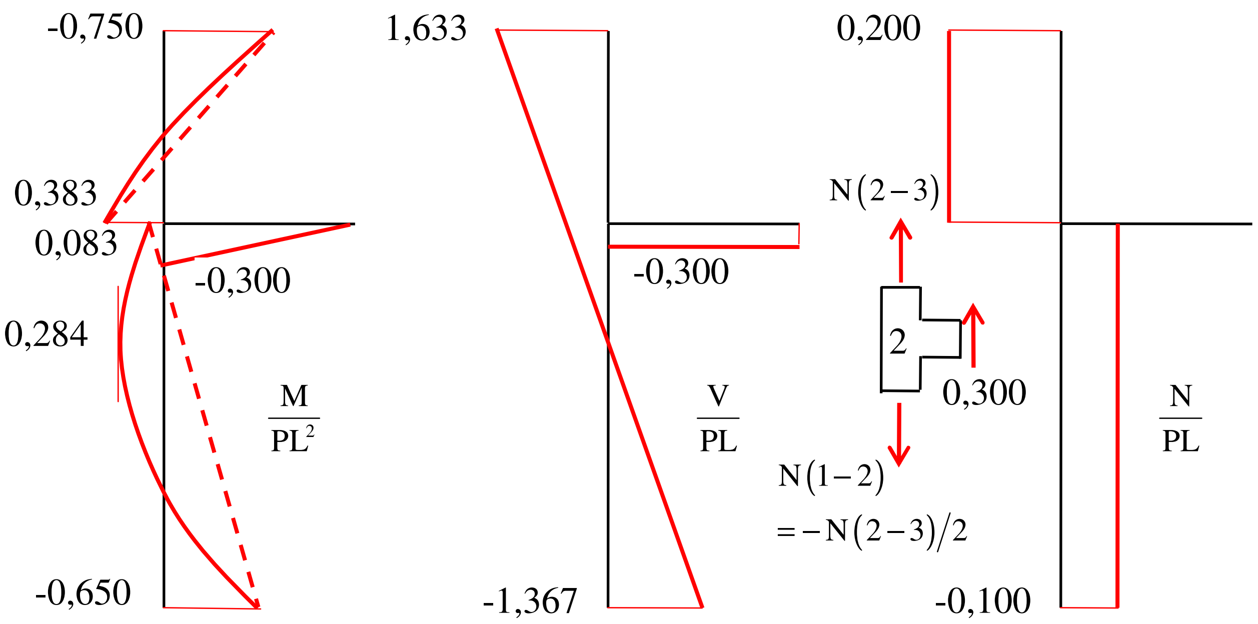
$$9\frac{EI}{L}\Omega_2+9\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{4}=0$$

$$9\frac{EI}{L}\Omega_2+54\frac{EI}{L}\Omega+3pL^2=0$$

$$9\frac{EI}{L}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_2\\ \Omega\end{bmatrix}=\frac{pL^2}{4}\begin{bmatrix}1\\ -12\end{bmatrix} \qquad \frac{EI}{L}\begin{bmatrix}\Omega_2\\ \Omega\end{bmatrix}=\frac{pL^2}{36}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -12\end{bmatrix}=\frac{pL^2}{180}\begin{bmatrix}18\\ -13\end{bmatrix}$$

$$M_{12}=\frac{13}{20}pL^2=0,650pL^2 \qquad M_{23}=-\frac{23}{60}pL^2=-0,383pL^2 \qquad M_{24}=\frac{3}{10}pL^2=0,300pL^2$$

$$M_{21}=\frac{1}{12}pL^2=0,083pL^2 \qquad M_{32}=-\frac{3}{4}pL^2=-0,750L^2$$



L'effort normal s'obtient à l'aide de l'équilibre du nœud 2, et du fait que l'allongement de la barre 1-2 est égal au raccourcissement de la barre 2-3

Notation : $N(i-j)$ effort normal dans la barre i-j

Déplacement du nœud 4 : $U_4=-\Omega\ 2L=\dfrac{13pL^3}{90EI}$

Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis

Élément fini poutre ij : 6 paramètres $u_i, v_i, \omega_i, u_j, v_j, \omega_j$

Matrice de rigidité élémentaire de cet élément : matrice carrée 6X6

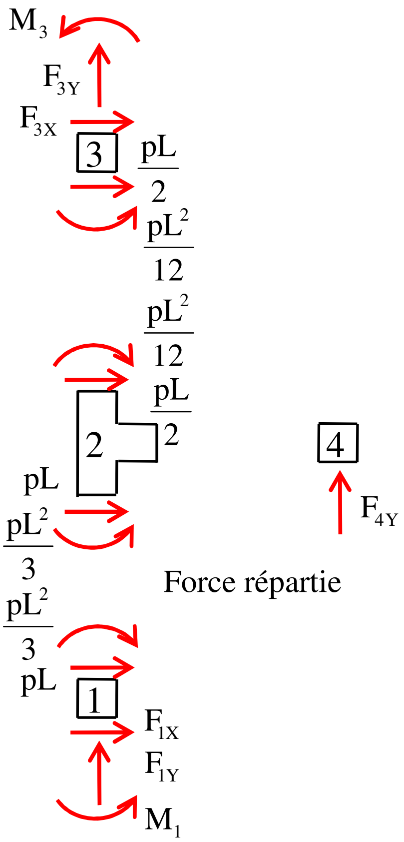
Matrice de rigidité globale : matrice carrée 12X12

Matrice inversée par le système : matrice carrée 5X5

La matrice de rigidité globale est indépendante du cas de charge

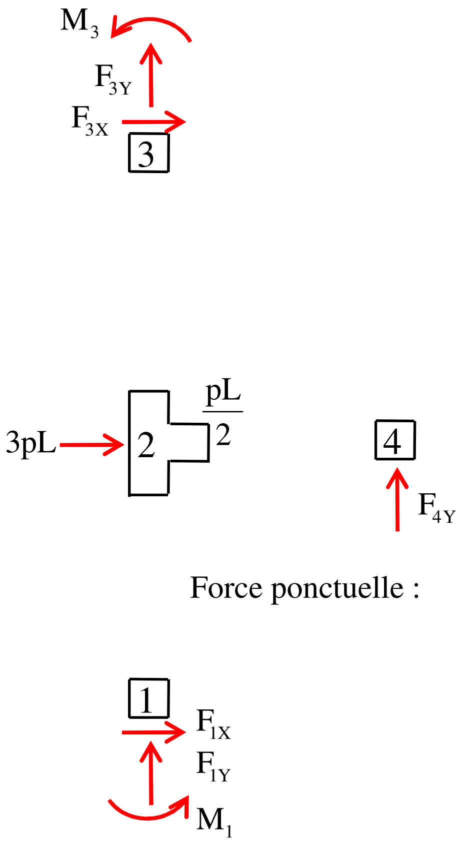
Second membre mis en place après l'assemblage :

Efforts sur les nœuds :



$$\begin{bmatrix} F_{1X} + pL \\ F_{1Y} \\ M_1 - \dfrac{pL^2}{3} \\ \dfrac{3pL}{2} \\ 0 \\ \dfrac{pL^2}{4} \\ F_{3X} + \dfrac{pL}{2} \\ F_{3Y} \\ M_3 + \dfrac{pL^2}{12} \\ 0 \\ F_{4Y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Force répartie



Force ponctuelle :

$$\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ M_1 \\ 3pL \\ 0 \\ 0 \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \\ 0 \\ F_{4Y} \\ 0 \end{bmatrix}$$