DAÏ Florent 3AGC

15,5

Test d'Analyse Limite et Calcul à la Rupture

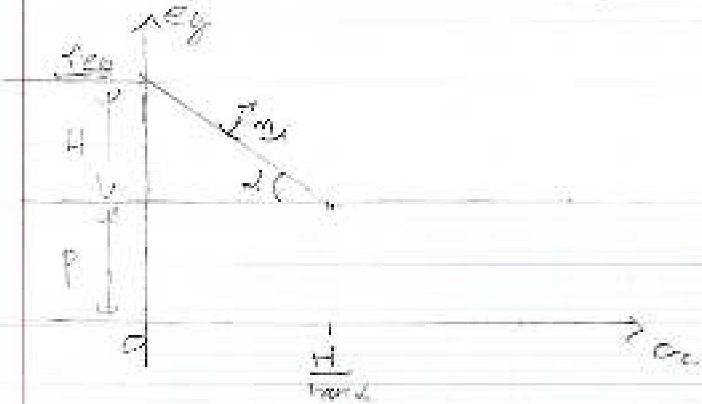
Problème n°1

1) $\mathcal{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \; \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\gamma} = \underline{0},\ \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}$ continu, $x<0$ $y=P+H$ $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e_y}=\underline{0}$

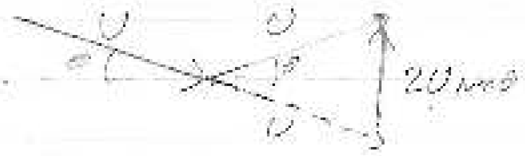
avec $n_1 = \cos\alpha\,\underline{e_y} + \sin\alpha\,\underline{e_x}$ $x \in [0, \frac{H}{\tan\alpha}]$, $y = P+H-x\tan\alpha$ $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n_1} = \underline{0}$

$x > \frac{H}{\tan\alpha}$, $y = P$ $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e_y} = \underline{0}$ $\}$

$\mathcal{C} = \{ \underline{v}\ C^0, C^1$ par morceaux, $y=0$, $\underline{V} = \underline{0} \}$



2)



discontinuité des vitesse
$2U\sin\theta\,\underline{e_y}$

3) $P_{rm}(U) = 2CP^2U\cos\theta$

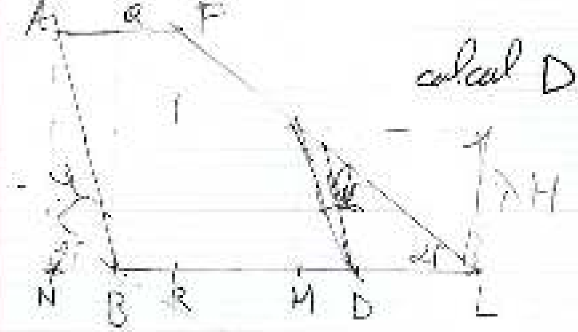
$(= (\sup(\sigma_i - \sigma_j))\ A_{bloc} \times$ discontinuité vitesse $)$

4) ~~$P_e(U) = \gamma \times A_{bloc}$ translaté $\times$ vitesse discontinuité~~

$= \gamma U \sin\theta (A_{ABDEF} - A_{DEL})$

$A_{ABDEF} + A_{DEL} = A_{ABLF}$

ABLF est un trapèze $\quad BD = \dfrac{P}{\tan\theta}$



calcul DL : $ML = \dfrac{\lambda H}{\tan\alpha}$

$MD = \lambda H \tan\varphi$

$DL = ML - MD = \lambda H\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)$

calcul AF $\quad AF = AQ + QF$

$NB = \dfrac{H}{\tan(\theta+\varphi)}$

$RL = \dfrac{H}{\tan\alpha}$

$$BR = BL - RL = BD + DL - RL$$
$$= \frac{P}{\tan\theta} + \lambda H\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right) - \frac{H}{\tan\alpha}$$

$$AF = NB + BR = \frac{H}{\tan(\theta+\varphi)} + \frac{P}{\tan\theta} + (\lambda-1)\frac{H}{\tan\alpha} - \lambda H \tan\varphi$$

$$A_{ABLF} = (AF + BL)\times\frac{H}{2} = \left(\frac{H}{\tan(\theta+\varphi)} + \frac{P}{\tan\theta} + (\lambda-1)\frac{H}{\tan\alpha} - \lambda H\tan\varphi + \frac{P}{\tan\theta} + \frac{\lambda H}{\tan\alpha} - \lambda H \tan\varphi\right) \times \frac{H}{2}$$

$$A_{ABDEF} = A_{ABLF} - A_{DEL} \qquad A_{DEL} = \frac{\lambda H \times DL}{2} = (\lambda H)^2\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)$$

$$A_{ABDEF} = \frac{H}{2}\left(2\frac{P}{\tan\theta} + H\left(\frac{1}{\tan(\theta+\varphi)} + \frac{2\lambda-1}{\tan\alpha} - 2\lambda\tan\varphi\right)\right) - \frac{(\lambda H)^2}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)$$

$$P_e(\underline{U}) = \underline{U}\cdot\underline{\gamma}\, A_{ABLF} + \underline{U}'\cdot\underline{\gamma}\, A_{DEL} \qquad \underline{U}' = \underline{U} + d\underline{U}$$
$$= \underline{U}\cdot\underline{\gamma}\, A_{ABLF} - 2\underline{U}\cdot\underline{\gamma}\, A_{DEL} \qquad d\underline{U}\cdot\underline{\gamma} = -2\underline{U}\cdot\underline{\gamma} \text{ (car [illegible])}$$
$$= \gamma \underline{U} \sin\theta\,(A_{ABLF} - 2A_{DEL}) = \gamma U \sin\theta\,(A_{ABDEF} - A_{DEL})$$

5) $\Gamma(U) = \frac{P_{som}(U)}{Pe(U)} = \frac{2CP^2 U\cos\theta}{\gamma U \sin\theta \times f(\lambda,\theta)}$

à θ fixé $f(\lambda) = (A_{ABDEF} - A_{DEL}) = (A_{ABLF} - 2A_{DEL})$

$= K + (2\lambda-1)\frac{H^2}{2\tan\alpha} - 2\lambda\tan\varphi\frac{H^2}{2} - (\lambda H)^2\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)$

$= \underbrace{\left(K - \frac{H^2}{2\tan\alpha}\right)}_{K'} + \frac{\lambda H^2}{\tan\alpha} - \lambda H^2\tan\varphi - (\lambda H)^2\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)$

$= K' + \left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right)(\lambda H^2 - \lambda^2 H^2)$

$\frac{df}{d\lambda} = \left(\frac{1}{\tan\alpha} - \tan\varphi\right) H^2 (1-2\lambda$

f maximal pour $\lambda = \frac{1}{2}$ ici donc Γ min pour $\lambda = \frac{1}{2}$

Exercice 1

1) en appelant Y la réaction en A et M_0 l'effort appl en O

on a $x > L$ $M(x) = -QH$

$x < L$ $M(x) = -QH + Y(L-x)$

d° d'hyperstaticité en moment 1

nombre de SPC 1 encastrement, 1 charge concentré, 1 point angulaire

soit 3

2 mécanismes à étudier

2) $x=0$, $x=L$, $x=2L$ $-m \leq -QH \leq m$ $(\times 2)$

$-m \leq -QH + YL \leq m$

$\Rightarrow -m \leq -QH \leq m$ $\Rightarrow$ $-\frac{m}{H} \leq Q \leq \frac{m}{H}$

$-m - YL \leq -QH \leq m - YL$ $\;\; \frac{-m+YL}{H} \leq Q \leq \frac{m+YL}{H}$

~~$-m + QH \leq 0 \leq m + QH$~~

possible si $\frac{m+YL}{H} \geq -\frac{m}{H}$ et $\frac{m}{H} \geq \frac{-m+YL}{H}$

$\Rightarrow -2m \leq YL \leq 2m$

Q^+ vaut donc approximativement $\frac{m}{H}$

3)

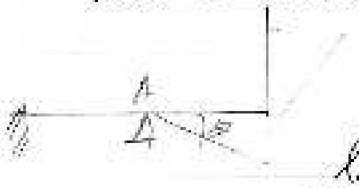
une discontinuité en B

la partie de droite a une vitesse $\dot{\theta} k$

$[\![\dot{\theta}_B]\!] = \dot{\theta}$

$P_{rm} = m\,|[\![\dot{\theta}_B]\!]| = m\dot{\theta}$

$P_{ext} = QH\dot{\theta} \Rightarrow Q \leq \frac{m}{H}$



une discontinuité en A

la partie de droite a une vitesse $\dot{\theta} k$

$P_{rm} = m\,|[\![\dot{\theta}_A]\!]| = m\dot{\theta}$

$P_{ext} = QH\dot{\theta} \Rightarrow Q \leq \frac{m}{H}$

théorème d'association $Q^+ = \frac{m}{H}$

$P_{ext} =$

DAI Florent — 3AGC

Test d'ALCR

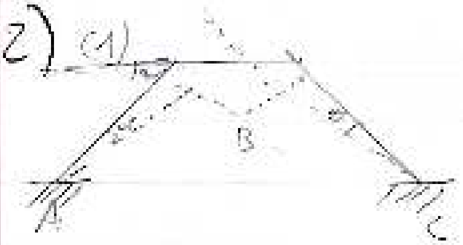
Exercice 2

1) nombre de SPC : 5

d° d'hyperstaticité en moment = d° d'hyperstaticité $= 3$

soit 2 mécanismes à étudier

2) (1)



3 discontinuités $[\![\dot\theta_A]\!] = -\dot\alpha\, k$

$[\![\dot\theta_B]\!] = 2\dot\alpha\, k$

$[\![\dot\theta_C]\!] = -\dot\alpha\, k$

$P_{rm} = m\,|[\![\dot\theta_A]\!]| + m\,|[\![\dot\theta_B]\!]| + m\,|[\![\dot\theta_C]\!]|$

$= 4m\dot\alpha$

$P_{ext} = QH\dot\alpha + Q\left(H + \frac{H}{2}\right)\dot\alpha$

$= Q\frac{5}{2}H\dot\alpha$

théorème d'association $Q^+ = \frac{8m}{5H}$

~~1 discontinuité~~ $\cancel{[\![\dot\theta_C]\!] = \dot\alpha\, k}$

$\cancel{P_{rm} = m\dot\alpha}$

$\cancel{P_{ext} = \frac{5}{2}QH\dot\alpha \Rightarrow Q^+ = \frac{2}{5}\frac{m}{H}}$

2 discontinuité $[\![\dot\theta_A]\!] = \dot\alpha\, k$

$[\![\dot\theta_C]\!] = \dot\alpha\, k$

$P_{rm} = 2m\dot\alpha$

$\cancel{P_{ext} = \frac{5}{2}QH\dot\alpha} \quad \cancel{\Rightarrow Q^+ = \frac{4m}{5H}}$

$P_{ext} = QH\dot\alpha \Rightarrow Q^+ = \frac{2m}{H}$

donc des 2 mécanismes $Q^+ = \frac{8}{5}\frac{m}{H}$

Problème 2

1) $\mathcal{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\gamma} = 0, \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ continu $, y = H, x > 0 \ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_y} = 0$
$y = 0 \ x < 0 \ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_y} = 0$

$\mathcal{C} = \{ \underline{V}\ C^0, C^1$ par morceaux$, y = 0 \ \underline{V} = \underline{0}, x = 0 \ \underline{V} = U \underline{e_x} \}$

2) $P_{ext} = \int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}\, dV + \int_S (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v}\, dS = \int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}\, dV + \int_S \frac{Q}{S} U \underline{e_x} \cdot \underline{e_x}\, dS$

$= \int_V \underline{\gamma} \cdot \underline{V}\, dV + \int_S QU \underline{e_x} \cdot \underline{e_x}\, dS = \gamma \left(\int v_y \underline{e_y} \cdot \underline{g}\, dV \right) + QU$

γ, Q 2 modes de chargement

3) $\sigma_{xx} = f(y), \ \sigma_{yy} = g(y)$

$\sigma_{yy} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_y} \cdot \underline{e_y} \quad g(y) = 0$ pour $y = H$

$g = \gamma (H - y)$ convient

(vu que $V = 0$ sur le substratum on connaît la pression exercée par le substratum sur le bloc)

4) sol de Tresca $\Rightarrow \sup |\sigma_i - \sigma_j| \leq 2C$
vu que $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ on a $|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| \leq 2C$

on a $\sigma_{yy} = g(y) = \gamma (H - y)$

$\Rightarrow |\sigma_{xx} - \gamma (H - y)| \leq 2C \Rightarrow |f(y) - \gamma (H - y)| \leq 2C$
$-2C \leq f(y) - \gamma (H - y) \leq 2C$
$\Rightarrow f^-(y) \leq f(y) \leq f^+(y)$ où $f^-(y) = -2C + \gamma (H - y)$
$f^+(y) = 2C + \gamma (H - y)$

5) approche par l'intérieur

vu la forme du massif $\sigma_{xx} = f(y)$

$Q^- = -2C + \gamma H$ (vrai $\forall y$ donc particulièrement pour
$Q^+ = 2C$ ceux qui [illegible] le plus l'intervalle)