Exercice 1 : Dénombrement (5 points)

1. Les initiales de Andréï Kolmogorov sont A.K.
   (a) En excluant les prénoms/noms composés, combien peut-on composer d'initiales avec les lettres de l'alphabet ?
   Puisqu'il y a 26 *lettres dans l'alphabet, il y a en tout* $26^2 = 676$ *initiales possibles.*
   (b) Combien au minimum un village doit-il avoir d'habitants pour qu'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?
   Il doit compter au moins 677 habitants.
2. Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle souhaite en inviter cinq à dîner.
   (a) Combien de groupes différents d'invités y a-t-il ?
   Il y a $C_{11}^5 = 462$ *manières de choisir* 5 *invités parmi* 11.
   (b) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?
   Il y a deux possibilités, soit ils sont tous les deux invités et il reste alors à choisir les 3 *autres invités parmi* $11 - 2 = 9$ *c'est à dire* $C_9^3 = 84$ *ou bien ni l'un ni l'autre ne sont invités et il faut choisir* 5 *invités parmi* 9 *soit* $C_9^5 = 126$. *Au total, on a donc* 210 *possibilités.*
   (c) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont en mauvais terme et ne peuvent pas être invités ensemble ?
   Il y a trois possibilités, soit l'une ou l'autre des deux personnes en mauvais terme est invitée et il reste à choisir les 4 *autres avec* C_9^4 *possibilités ou bien ni l'une ni l'autre ne sont invitées et il faut choisir* 5 *invités parmi* 9 *soit* $C_9^5 = 126$. *Au total, on a donc* $2 * C_9^4 + C_9^5 = 378$ *possibilités.*

Exercice 2 : Hémophilie (3 points)

La reine porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de $0,5$. Si elle est porteuse, chaque prince aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie, indépendamment l'un de l'autre. Si elle ne l'est pas, aucun prince ne souffrira.

On note H *(respectivement* $\overline{H}$*) le fait que la reine soit hémophile (respectivement qu'elle ne le soit pas). De même on note* H_i *ou* $\overline{H_i}$ *selon que le i-ème fils est hémophile ou non.*

1. Supposons que la reine ait un seul fils. Quelle est la probabilité pour qu'il soit hémophile ?

$$P(H_1) = P(H_1|H)P(H) + P(H_1|\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. Supposons maintenant que la reine a eu un seul fils et que celui-ci n'est pas hémophile. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ?

$$P(H|\overline{H_1}) = \frac{P(\overline{H_1}|H)P(H)}{P(\overline{H_1})}$$

or $P(\overline{H_1}|H) = 1/2$ *et* $P(\overline{H_1}) = 1 - P(H_1) = 3/4$ *d'où* $P(H|\overline{H_1}) = 1/3$

3. Toujours en supposant que la reine a eu un fils non hémophile, s'il naît un deuxième prince, avec quelle probabilité sera-t-il hémophile ?
   On cherche
$$P(H_2|\overline{H_1}) = \frac{P(H_2 \cap \overline{H_1})P(H)}{P(\overline{H_1})}.$$
   D'après la formule des probabilités totales,
$$P(H_2 \cap \overline{H_1}) = P(H_2 \cap \overline{H_1}|H)P(H) + P(H_2 \cap \overline{H_1}|\overline{H})P(\overline{H}).$$
   Par indépendance, $P(H_2 \cap \overline{H_1}|H) = P(H_2|H)P(\overline{H_1}|H) = 1/4$, *de plus* $P(H_2 \cap \overline{H_1}|\overline{H}) = 0$ *donc au final* $P(H_2|\overline{H_1}) = 1/6$

Exercice 3 : Recrutement (5 points)

Une entreprise veut recruter un cadre. Il y a en tout 10 candidats à se présenter pour ce poste. L'entreprise fait passer un test au premier candidat, qui est recruté s'il le réussit. Sinon, elle fait passer le même test au second candidat et ainsi de suite. On suppose que la probabilité qu'un candidat réussisse le test est égale à p, réel fixé compris entre 0 et 1. On appelle alors X la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., 11\}$ qui vaut k si c'est le candidat numéro k qui est recruté, et 11 si aucun candidat n'est recruté.

1. Calculer en fonction de p les probabilités $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, . . . , $P(X = 10)$. Déterminer aussi $P(X = 11)$.
   Soit $q = (1 - p)$. *Pour* $k = 1...10$, *pour que* X *soit égal à* k, *il faut que les* $(k - 1)$ *premiers candidats aient échoué au test, ce qui arrive avec probabilité* q^{k-1}, *et que le k-ème candidat ait réussi, ce qui arrive avec la probabilité* p.
   Ainsi, $\forall k \in \{1, ..., 10\} \quad P(X = k) = pq^{k-1}$ *(loi géométrique de paramètre* p*)*
   Pour $X = 11$ (aucun candidat ne réussit le test), $P(X = 11) = q^{10}$.
2. Comment doit-on choisir p pour que la probabilité de ne recruter personne soit inférieure à 1% ?
$$P(X = 11) \leq 0,01 \iff (1 - p)^{10} \leq 0,01 \iff p \geq 1 - 0,011/10$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on considère la fonction P définie par :
$$P(x) = 1 + x + ... + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j.$$
   Exprimer sa dérivée $P'(x)$ sous la forme d'une somme de n termes.
$$P'(x) = 1 + 2x + ... + nx^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} jx^{j-1}.$$
4. Pour $x \neq 1$, écrire plus simplement $P(x)$ (penser à la somme des termes d'une suite géométrique). En déduire que $P'(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$P'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$
   Pour $x \neq 1$, *en dérivant la somme des termes d'une suite géométrique de raison* x, *on obtient la formule*

5. Déduire des questions précédentes que X a pour moyenne :

$$E(X) = \frac{1-(1-p)^{11}}{p}.$$

La moyenne de X s'écrit

$$E(X) = 1 \times p + 2 \times pq + ... + 10 \times pq^9 + 11 \times q^{10} = p(1 + 2q + ... + 10q^9) + 11q^{10}$$

que m'on peut encore écrire comme

$$E(X) = p \times P'(q) + 11q^{10}.$$

En utilisant la question précédente, on obtient

$$E(X) = \frac{1-(1-p)^{11}}{p}.$$

6. Supposons maintenant qu'il n'y ait pas seulement 10 candidats, mais un nombre infini, et que l'on procède de la même façon. Appelons Y le numéro du candidat retenu. Quelle est la loi classique suivie par Y ? Donner son espérance.
S'il y a une infinité de candidats, alors Y suit une loi géométrique de paramètre p d'espérance $1/p$.

Exercice 4 : Les fourmis (3 points)
Le nombre d'oeufs pondus par une fourmi reine définit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
La probabilité d'éclosion d'un oeuf est une constante p et on suppose que les oeufs éclosent (ou non) indépendamment les uns des autres. On note Y le nombre de rejetons engendrés par cette fourmi.

1. Soit n un entier naturel. Quel est la loit de Y sachant $\{X = n\}$?
Les éclosions des oeufs sont indépendantes et pour chaque oeuf la probabilité d'éclore est p donc la loi de Y sachant $X = n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On a donc

$$P(Y = k|X = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Déterminer la loi de Y.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P(Y = k) = P\big((Y = k) \cap (\cup_{n=0}^{\infty}(X = n))\big) = P\left(\cup_{n=0}^{\infty}(Y = k) \cap (X = n)\right)$$

Les évènements étant 2 à 2 incompatibles, on a

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k \text{ et } X = n)$$

Or $P(Y = k \text{ et } X = n) = P(X = n)P(Y = k|X = n)$ d'où

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)P(Y = k|X = n) && (0.1)\\
&= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} && (0.2)\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} && (0.3)\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} && (0.4)\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} && (0.5)\\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} && (0.6)
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Couple de variables aléatoires discrètes (4 points)
Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi conjointe est donnée par

$P(X = x, Y = y)$	$Y = -1$	$Y = 1$	$Y = 2$	Loi de X
$X = -2$	$0,2$	$0,2$	α	$0,45$
$X = 0$	$0,1$	$0,1$	$0,05$	$0,25$
$X = 1$	$0,2$	0	$0,1$	$0,3$
Loi de Y	$0,5$	$0,3$	$0,2$	1

1. Donner la valeur de α en justifiant la réponse.
   $\alpha = 0,05$
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
   cf tableau complété
3. Calculer $E(XY)$ **0,5 pt** et en déduire $cov(X, Y)$.
   Avec le théorème de transfert, on a $E(XY) = -0,2$. *Avec la définition de l'espérance,* $E(X) = -0,6$, $E(Y) = 0,2$ *et* $cov(X, Y) = -0,08$
4. On pose $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z, puis son espérance $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.
   $Z(\Omega) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *et*
   $P(Z = -3) = P(X = -2, Y = -1) = 0,2$
   $P(Z = -1) = P((X, Y) \in \{(-2, 1); (0, -1)\}) = 0,1 + 0,2 = 0,3$
   $P(Z = 0) = P((X, Y) \in \{(-2, 0); (1, -1)\}) = 0,05 + 0,2 = 0,25$

$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) = 0,1$
$P(Z=2) = P((X,Y) \in \{(0,2);(1,1)\}) = 0,05 + 0$
$P(Z=3) = P(X=1, Y=2) = 0,1$

Enfin $E(Z) = -0,4, V(Z) = 3,14$