

Partie I :

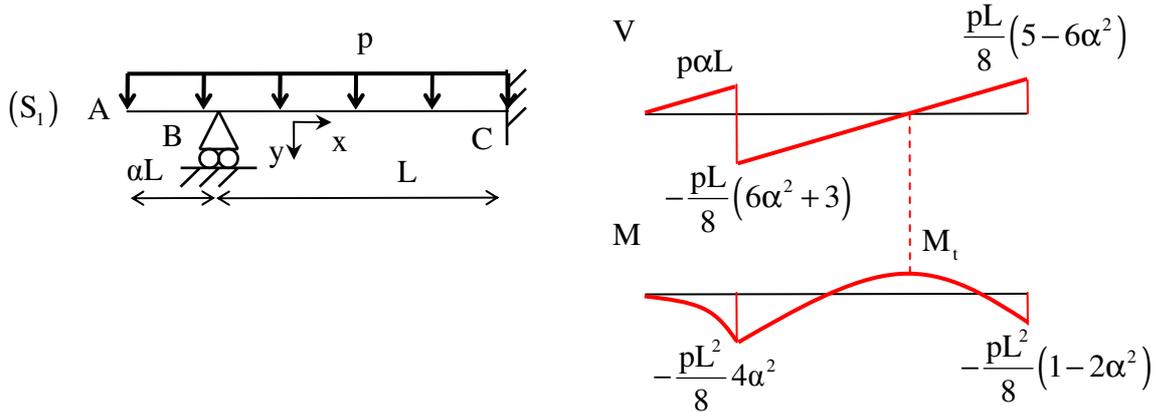
Position d'un appui paramétré

On considère une poutre droite de longueur totale $AC = (1 + \alpha)L$

Elle est encastrée en C et sur un appui simple en B dont la position est paramétrée par α

Elle est soumise à une force répartie p

On donne les courbes paramétrées des sollicitations



1. La structure est-elle hyperstatique, si oui de quel degré ?
2. A l'aide des courbes des sollicitations, déterminer les actions de liaison en B et en C

Remarque : les résultats seront représentés sur un schéma

Limites du paramètre α :

3. A quelle condition sur α les moments en B et C sont négatifs
4. A quelle condition sur α existe-t-il un moment maximum sur $]B, C[$

On suppose ces conditions sur α vérifiées pour la suite.

5. Donner l'expression du moment maximum en travée (entre B et C) : M_t
6. Quel est le signe de ce moment ?

Recherche de α pour avoir un moment fléchissant maximum sur la poutre AC en valeur absolue le plus petit possible :

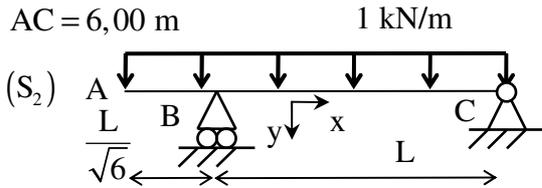
7. Déterminer α pour avoir $M_B = M_C$
8. Calculer M_B et M_C correspondant
9. Calculer M_t correspondant
10. En déduire que α déterminé à la question 7. correspond bien à la recherche demandée

Pour les questions suivantes (11 à 15) : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $AC = 6,00$ m $p = 1$ kN/m

11. Déterminer les longueurs AB et BC
12. Tracer les sollicitations (effort tranchant V moment fléchissant M) sur Doc. Réponse

Echelle des abscisses : $\frac{1}{50}$
 Echelle des efforts tranchants : 1 cm pour 1 kN
 Echelle des moments fléchissants : 1 cm pour 1 kN.m

On considère maintenant la structure suivante :

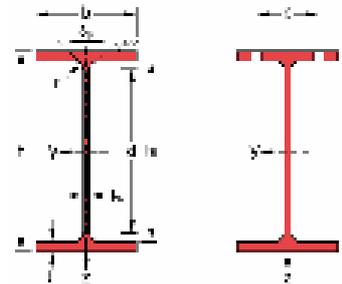


13. Calculer les actions de liaison
14. Tracer les sollicitations (effort tranchant V moment fléchissant M) sur Doc. Réponse
15. Conclure sur l'intérêt mécanique d'encaster en C

Partie II :

Tolérance de fabrication dans un profilé

On considère un profilé métallique IPE 180



Designation Bezeichnung	Dimensions Abmessungen						Dimensions de construction Dimensions für den Entwurf Konstruktionsmaße						Surface Oberfläche	
	b	t	b ₁	t ₁	t ₂	A	b ₁	d	r	r ₁	r ₂	A _{fl}	A _{br}	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ²	
PE 180	180	91	21	8	9	2130	194	180	70	40	48	3,28	37,10	

Designation Bezeichnung	Valeurs statistiques / Section properties / Statistische Kennwerte											Classification EN 1993-1-1				S235
	valeurs moyennes statistische Kennwerte						valeurs limites statistische Kennwerte					S235		S235		
	b	t	W _{pl,y}	W _{pl,z}	I _y	I _z	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	r	r ₁	r ₂		r ₃	
mm	mm	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ⁴	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm		
PE 180	180	91	1469	1604	742	1123	1009	22,10	24,00	21,0	21,24	4,70	7,43	1	2	

Ce profilé est obtenu par laminage à chaud

Ces caractéristiques théoriques ont donc des tolérances de laminage

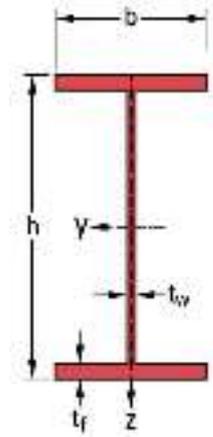
L'objectif de cette partie est de mettre en évidence les variations de caractéristiques en fonction des différentes tolérances.

On conservera les axes donnés dans l'extrait de la documentation

Les épaisseurs t_f et t_w ne seront pas négligeables devant b et h

On considère la simplification d'un IPE 180 comme ci contre

1. Déterminer les inerties maximum $I_{y,simpl.}$ et minimum $I_{z,simpl.}$ de la section simplifiée
2. Déterminer les différences avec le tableau des caractéristiques exactes
3. Expliquez ces différences



Pour les défauts suivants, on donne les variations d'inerties principales :

$I_y - I_{y,simpl.}$ et $I_z - I_{z,simpl.}$ et les variations relatives avec celles de la section simplifiée :

$$\frac{I_y - I_{y,simpl.}}{I_{y,simpl.}} \text{ et } \frac{I_z - I_{z,simpl.}}{I_{z,simpl.}}$$

Hauteur $\Delta h = +3 \text{ mm}$

$$I_y - I_{y,simpl.} = 48,8 \text{ cm}^4 \quad \text{soit } 3,8 \%$$

$$I_z - I_{z,simpl.} = 0,0 \text{ cm}^4 \quad \text{soit } 0,0 \%$$

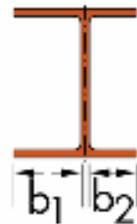
Epaisseur d'aile $\Delta t_f = +2 \text{ mm}$

$$I_y - I_{y,simpl.} = 224,9 \text{ cm}^4 \quad \text{soit } 17,7 \%$$

$$I_z - I_{z,simpl.} = 25,1 \text{ cm}^4 \quad \text{soit } 24,9 \%$$

Pour chacun des défauts suivants vous calculerez les variations d'inerties principales et les variations relatives avec celles de la section simplifiée.

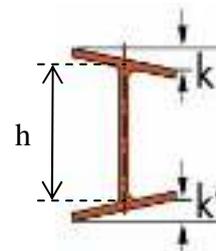
4. Largeur d'aile $\Delta b = +4 \text{ mm}$
5. Epaisseur d'âme $\Delta t_w = +0,7 \text{ mm}$
6. Symétrie $(b_1 - b_2)/2 = +2,5 \text{ mm}$

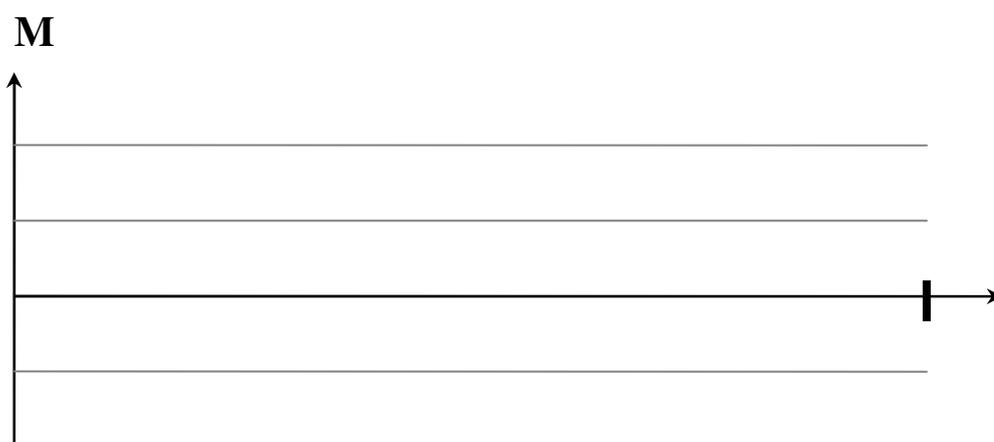
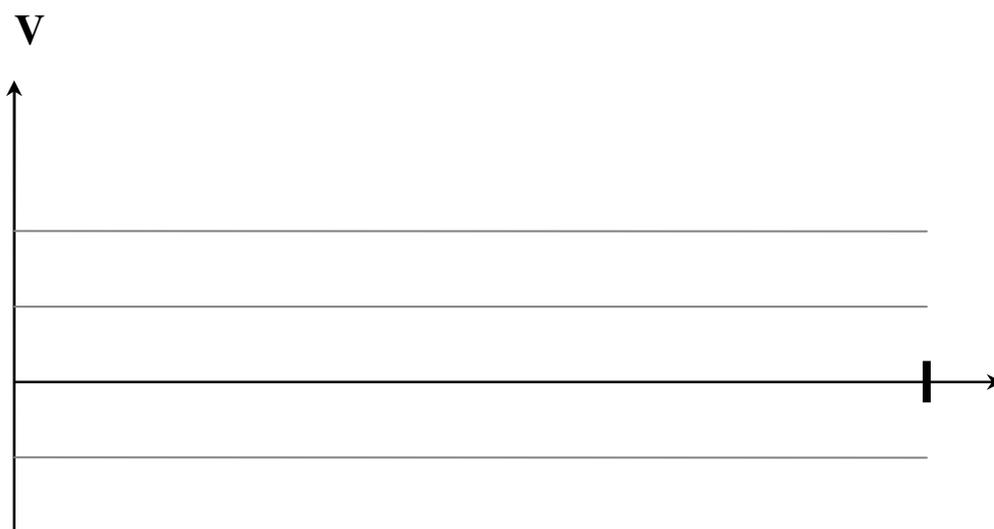


Pour le défaut suivant vous expliquerez comment évoluent qualitativement les axes principaux et les inerties principales.

7. Equerrage

$$k = k' = +0,75 \text{ mm}$$





Légende :



Question 12



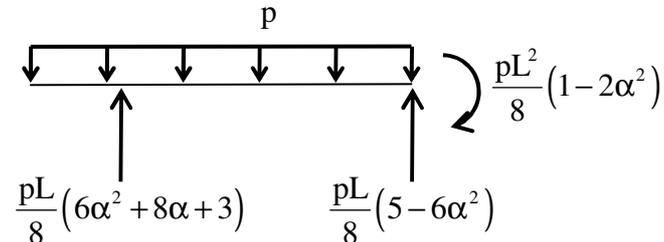
Question 14

Partie I :

Position d'un appui paramétré

1. La structure est hyperstatique de degré 1 :
4 inconnues de liaison et 3 équations de la statique

2. A l'aide des courbes des sollicitations :



Limites du paramètre α :

3. Les moments en B et C sont négatifs :

$$\alpha \geq 0 \text{ et } \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

4. Condition sur α : moment maximum sur]B,C[

L'effort tranchant s'annule sur BC

$$V(B^+) < 0$$

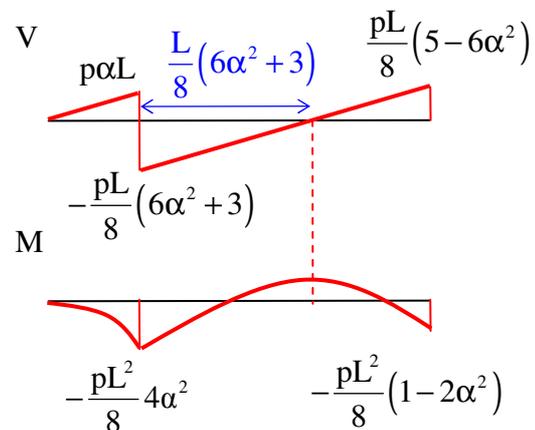
$$V(C^-) > 0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{\frac{5}{6}} = 0,913$$

5. Donner l'expression du moment maximum en travée : M_t

$$M_t = -\frac{pL^2}{8} 4\alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{pL^2}{64} (6\alpha^2 + 3)^2$$

$$M_t = -\frac{pL^2}{2} \alpha^2 + \frac{9pL^2}{128} (4\alpha^4 + 4\alpha^2 + 1)$$

$$M_t = \frac{pL^2}{128} (36\alpha^4 - 28\alpha^2 + 9)$$



6. Signe de M_t

$$36\alpha^4 - 28\alpha^2 + 9$$

$$\Delta' = 14^2 - 36 \times 9 = -128$$

M_t est de signe constant positif

Recherche de α pour avoir un moment fléchissant maximum sur la poutre AC en valeur absolue le plus petit possible :

7. α pour avoir $M_B = M_C$

$$-\frac{pL^2}{8}4\alpha^2 = -\frac{pL^2}{8}(1-2\alpha^2)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,4082$$

8. M_B et M_C correspondant

$$M_B = M_C = -\frac{pL^2}{12}$$

9. M_t correspondant

$$M_t = \frac{pL^2}{128} \left(36 \frac{1}{36} - 28 \frac{1}{6} + 9 \right) \qquad M_t = \frac{pL^2}{24}$$

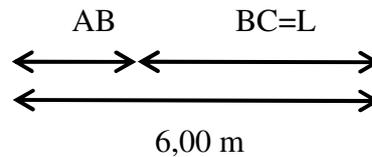
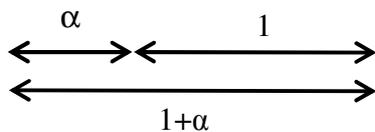
10. α déterminé à la question 7. correspond bien à la recherche demandée.

$$M_B \text{ est décroissant et } M_C \text{ est croissant donc } \text{Inf}_\alpha (|M_B|, |M_C|) = \frac{pL^2}{12}$$

$$\text{Pour } \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ on a : } M_t < \frac{pL^2}{12} \text{ donc } \text{Inf}_\alpha (|M_B|, |M_C|, |M_t|) = \frac{pL^2}{12}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $AC = 6,00 \text{ m}$ $p = 1 \text{ kN/m}$

11. AB et BC



$$\frac{AB}{6} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$AB = \frac{6}{1+\sqrt{6}} = 1,739 \text{ m}$$

$$\frac{BC}{6} = \frac{1}{1+\alpha}$$

$$BC = L = \frac{6\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} = 4,261 \text{ m}$$

12. Tracer les sollicitations : Document réponse

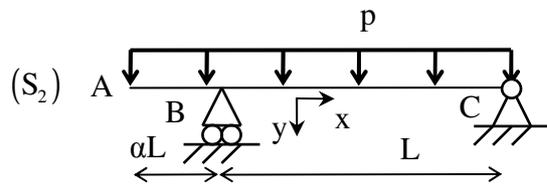
$$V_{B^-} = p\alpha L = 1,739 \text{ kN}$$

$$V_{B^+} = -\frac{pL}{8}(6\alpha^2 + 3) = -2,130 \text{ kN}$$

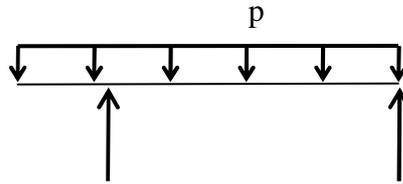
$$V_{C^-} = \frac{pL}{8}(5 - 6\alpha^2) = 2,130 \text{ kN}$$

$$M_B = M_C = -\frac{pL^2}{12} = -1,513 \text{ kN.m}$$

$$M_t = \frac{pL^2}{24} = 0,756 \text{ kN.m}$$



13. Actions de liaison



$$\frac{p(1+\alpha)^2 L}{2} = 4,225 \text{ kN} \quad \frac{p(1-\alpha^2)L}{2} = 1,775 \text{ kN}$$

14. Tracer les sollicitations :

$$V_{B^-} = p\alpha L = 1,739 \text{ kN}$$

$$V_{B^+} = p\alpha L - \frac{p(1+\alpha)^2 L}{2} = -\frac{pL(1+\alpha^2)}{2} = -\frac{7pL}{12} = -2,485 \text{ kN}$$

$$V_{C^-} = \frac{p(1-\alpha^2)L}{2} = 1,775 \text{ kN}$$

$$M_B = -\frac{pL^2}{12} = -1,513 \text{ kN.m}$$

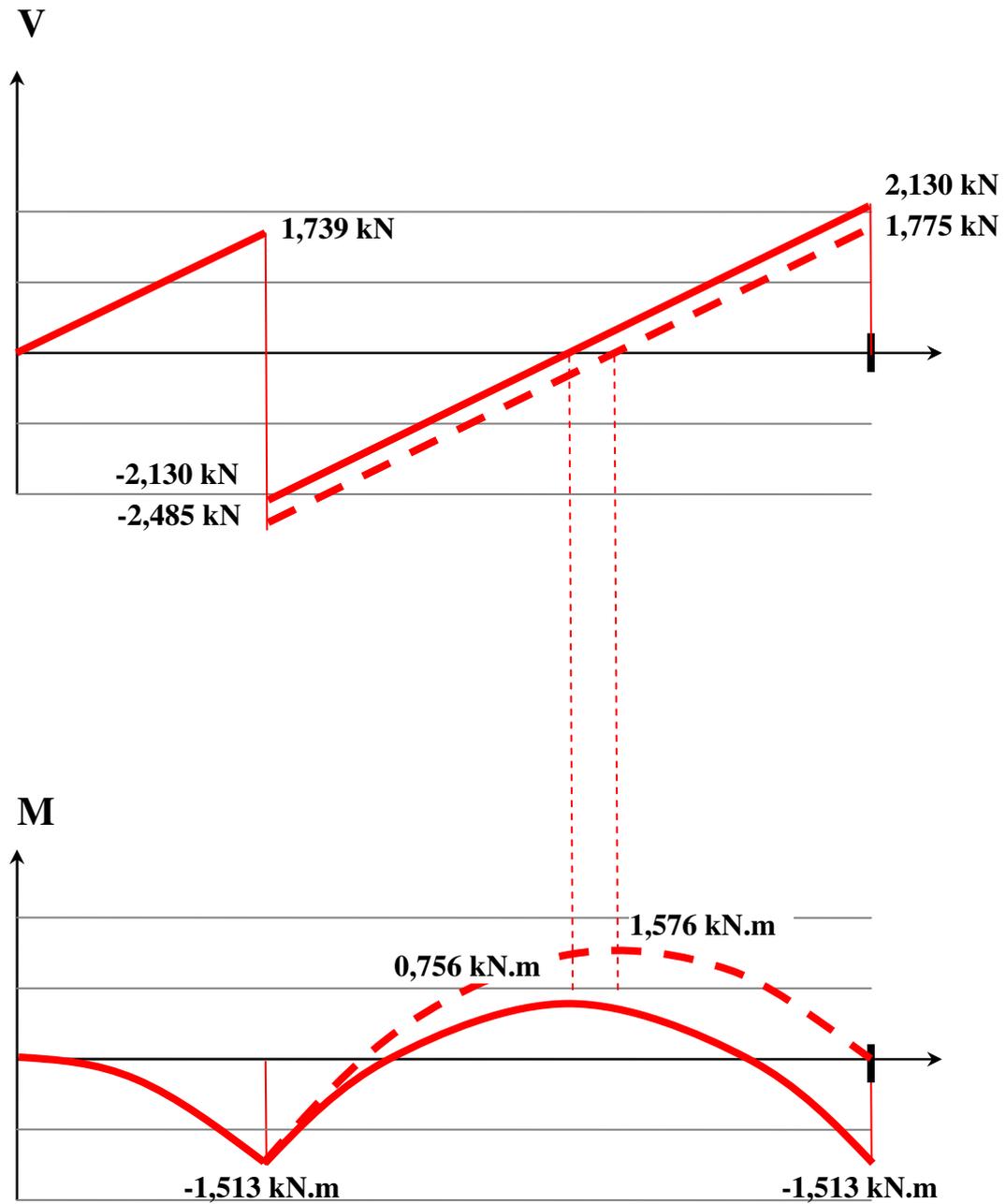
$$M_C = 0 \text{ kN.m}$$

$$\text{Sur BC : } V = 0 \text{ kN} \Leftrightarrow x = \frac{7}{12}L = 2,485 \text{ m}$$

$$M_t = -\frac{pL^2}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\right)^2 pL^2 = \frac{25pL^2}{288} = 1,576 \text{ kN.m}$$

15. Intérêt mécanique d'encastrer en C :

Diminuer le moment fléchissant maximum en valeur absolue



Légende :

————— Question 12

- - - - - Question 14

Partie II :

Tolérance de fabrication dans un profilé

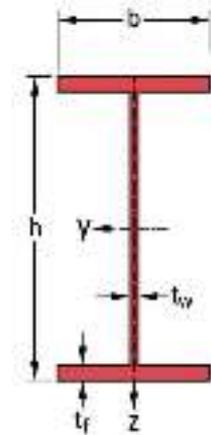
1. Inerties maximum $I_{y,simpl.}$ et minimum $I_{z,simpl.}$ de la section simplifiée

$$I_{y,simpl.} = 2 \left(\frac{bt_f^3}{12} + bt_f \left(\frac{h-t_f}{2} \right)^2 \right) + \frac{t_w (h-2t_f)^3}{12}$$

$$I_{y,simpl.} = 1272,5 \text{ cm}^4$$

$$I_{z,simpl.} = 2 \frac{t_f b^3}{12} + \frac{(h-2t_f)t_w^3}{12}$$

$$I_{z,simpl.} = 100,7 \text{ cm}^4$$



2. Différences avec le tableau des caractéristiques exactes

$$I_{y,vrai} = 1317 \text{ cm}^4 \quad I_{y,simpl.} - I_{y,vrai} = -44,5 \text{ cm}^4 \quad -3,5 \%$$

$$I_{z,vrai} = 100,9 \text{ cm}^4 \quad I_{z,simpl.} - I_{z,vrai} = -0,2 \text{ cm}^4 \quad -0,2 \%$$

3. Différences

On néglige les congés, les inerties simplifiées sont logiquement plus petites.

Les congés étant plus proche de l'axe z, la différence est plus petite autour de cet axe.

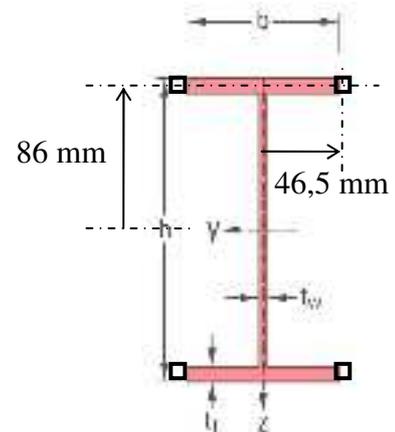
4. Largeur d'aile $\Delta b = +4 \text{ mm}$

$$I_y - I_{y,simpl.} = 4 \left(\frac{2 \times 8^3}{12} + 2 \times 8 \times 86^2 \right) \text{ mm}^4 = 47,4 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_{y,simpl.}}{I_{y,simpl.}} = 3,7 \%$$

$$I_z - I_{z,simpl.} = 4 \left(\frac{8 \times 2^3}{12} + 2 \times 8 \times 46,5^2 \right) \text{ mm}^4 = 13,8 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_z - I_{z,simpl.}}{I_{z,simpl.}} = 13,7 \%$$



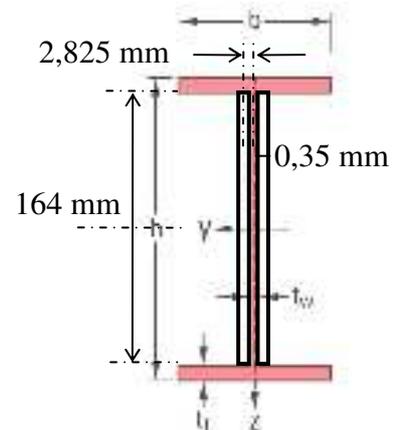
5. Epaisseur d'âme $\Delta t_w = +0,7 \text{ mm}$

$$I_y - I_{y,simpl.} = 2 \frac{0,35 \times 164^3}{12} \text{ mm}^4 = 25,7 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_{y,simpl.}}{I_{y,simpl.}} = 2,0 \%$$

$$I_z - I_{z,simpl.} = 2 \left(\frac{164 \times 0,35^3}{12} + 164 \times 0,35 \times 2,825^2 \right) \text{ mm}^4 = 0,1 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_z - I_{z,simpl.}}{I_{z,simpl.}} = 0,1 \%$$



6. Symétrie

$$(b_1 - b_2)/2 = +2,5 \text{ mm}$$

Décalage du CdG :

$$\frac{164 \times 5,3 \times 2,5}{164 \times 5,3 + 2 \times 91 \times 8} = 0,935 \text{ mm}$$

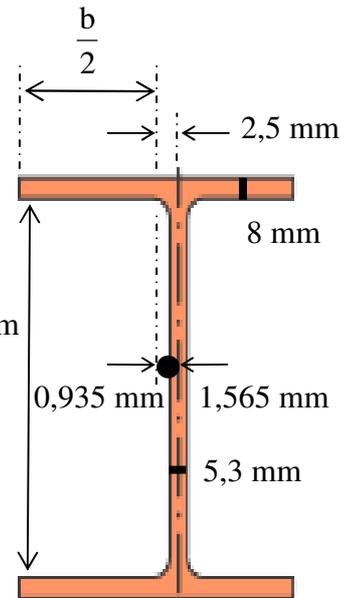
$$I_y - I_{y,\text{simpl.}} = 0 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_y - I_{y,\text{simpl.}}}{I_{y,\text{simpl.}}} = 0 \%$$

$$I_z - I_{z,\text{simpl.}} = 2 \times 91 \times 8 \times 0,935^2 + 164 \times 5,3 \times 1,565^2 \text{ mm}^4 \quad 164 \text{ mm}$$

$$I_z - I_{z,\text{simpl.}} = 0,3 \text{ cm}^4$$

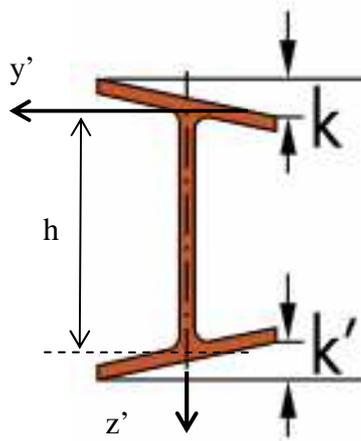
$$\frac{I_z - I_{z,\text{simpl.}}}{I_{z,\text{simpl.}}} = 0,3 \%$$



7. Equerrage

$$k = k' = +0,75 \text{ mm}$$

Ce qui change c'est l'inertie des semelles par rapport aux axes y' et z'



$I_{y'}$, d'une semelle augmente

Par suite I_y de la section augmente

$I_{z'}$, d'une semelle diminue

Par suite I_z de la section diminue

Un calcul précis montre que cette variation est négligeable.