

# TP4B : Comportement de poutres en béton armé

---

## I) Introduction de l'étude :

Deux poutres en béton armé seront étudiées en deux temps :

- Dans un premier temps, une étude théorique nous permettra de déterminer chaque étape du comportement de celles-ci
- Dans un deuxième temps, elles seront testées expérimentalement sur un banc de flexion 4 points afin d'observer leurs comportements réels et les confronter aux résultats théoriques.

### ➤ Objectifs :

- Observer le comportement d'une poutre soumise à des efforts progressifs : fissuration, évolution de l'axe neutre, influence du moment et de l'effort tranchant
- Calculer chaque étape théorique de l'évolution du comportement de la poutre
- Déterminer les paramètres de comportement des constituants de la poutre : béton et acier
- Comparer les résultats théoriques et pratiques
- Conclure sur la notion de sécurité d'une pièce en béton armé

### ➤ Déroulement :

1. Description des poutres et du dispositif expérimental
2. Etude théorique des deux poutres en béton armé : calcul du moment de fissuration, du moment de rupture
3. Etude expérimentale du comportement des matériaux constitutifs béton et acier
4. Etude expérimentale des deux poutres à l'aide d'un essai de flexion 4 points

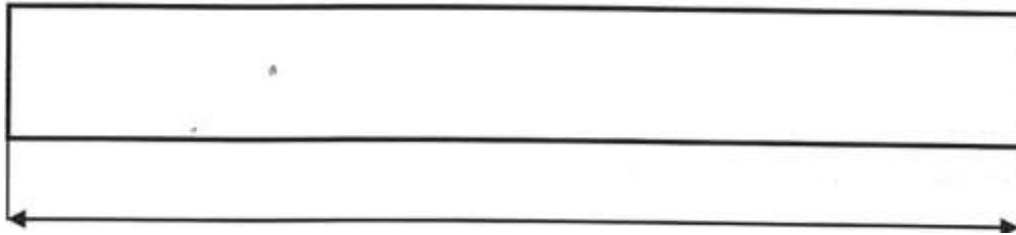
## II) Description des poutres et du dispositif expérimental :

### ➤ Caractéristiques des poutres étudiées :

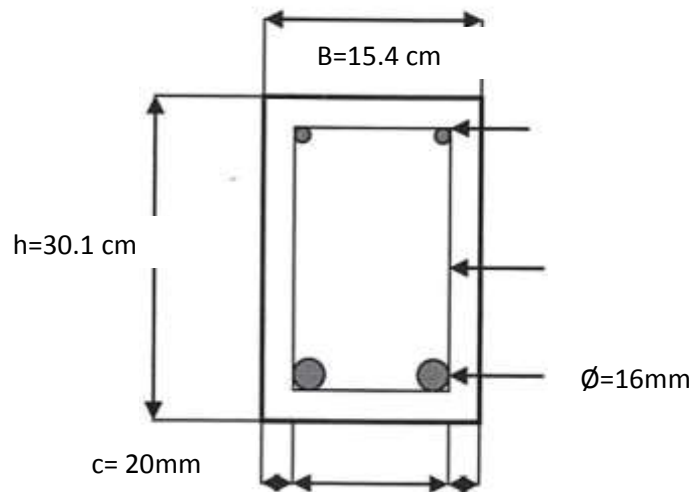
Deux poutres vont être testées (TP4A) de dimensions identiques. La seule différence entre elles provient du ferrailage :

- Un « gros » ferrailage pour la poutre n°1
- Un « petit » ferrailage pour la poutre n°2

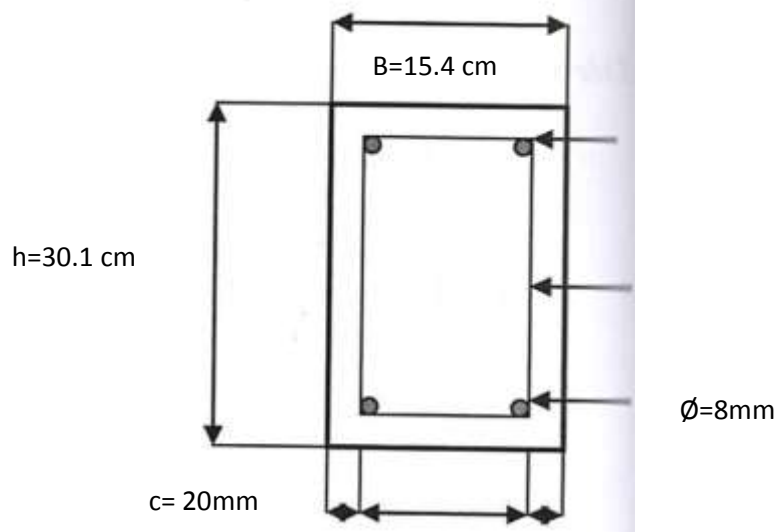
Les schémas ci-dessous permettent de noter les dimensions nécessaires aux calculs qui suivront :



Poutre 1



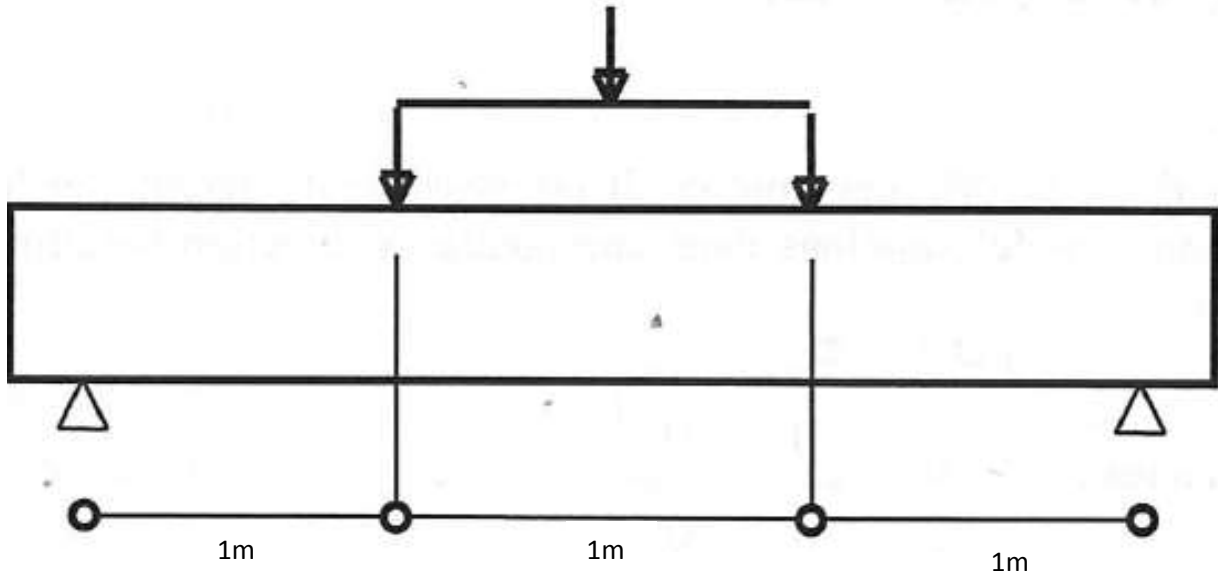
Poutre 2



➤ **Dispositif expérimental :**

Les poutres seront testées sur un banc de flexion 4 points schématisé ci-dessous :

- Chaque poutre reposera sur deux appuis simples
- Un vérin applique une force sur la poutre par l'intermédiaire de deux appuis supérieurs



**III) Etude théorique :**

➤ **Quelques rappels de RDM :**

Selon la théorie des poutres, il est possible de déterminer le champ des contraintes et le champ des déformations dans une poutre (x direction longitudinale, y et z direction transversale) :

-contraintes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- déformations :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & \frac{(1+\nu)\tau_{xy}}{E} & \frac{(1+\nu)\tau_{xz}}{E} \\ \frac{(1+\nu)\tau_{xy}}{E} & \frac{-(\nu)\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ \frac{(1+\nu)\tau_{xz}}{E} & 0 & \frac{-(\nu)\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}$$

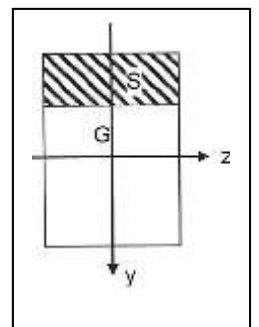
Selon les différents cas de chargement, il est alors possible de déterminer les composantes du champ des contraintes et de déformation :

- Flexion pure :  $\sigma_{xx} = -\frac{N}{S} + \frac{Mz}{I_z}y - \frac{My}{I_y}z = \frac{Mz}{I_z}y$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{Mz}{I_z \cdot E}y$$

- Effort tranchant :  $\tau_{xy} = \frac{T \cdot \mu(S)}{b \cdot I_z}$

$I_z$  : inertie de la section/axe z



$\mu(S)$  moment statique de S/axe z

➤ **Paramètres de comportement des matériaux :**

- Béton :

Pour un béton dosé à 350kg/m<sup>3</sup> d'un ciment CPA 45 :

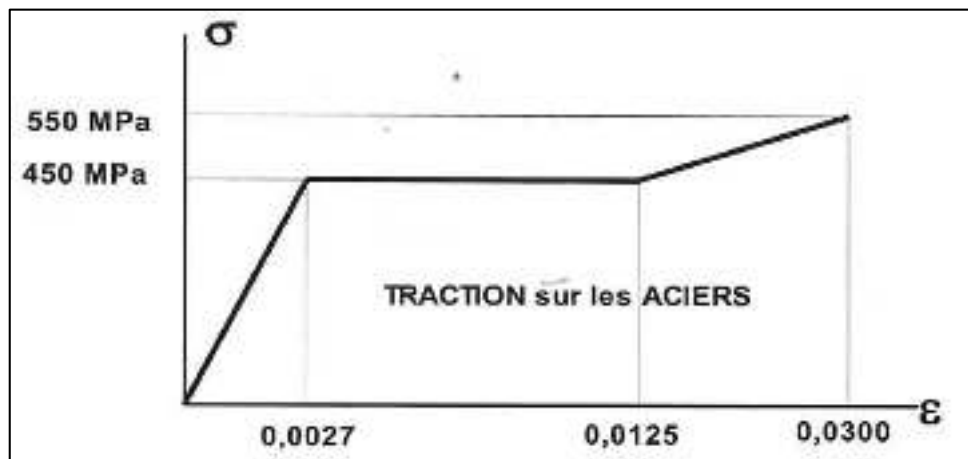
Résistance à la compression :  $f_{cj} = 35 \text{ MPa}$

Résistance à la traction :  $f_{tj} = 0.6 + 0.06 \times f_{cj}$  (en MPa)

Module d'Young :  $E_b = 11000 \times f_{cj}^{0.33}$

- Acier :

Le comportement de l'acier est déterminé par la courbe d'un essai de traction modélisé sur le schéma ci-dessous :



- Coefficient d'équivalence :

Par convention, le rapport n du module d'élasticité longitudinale de l'acier à celui du béton a pour valeur 15.

➤ **Relations entre la force appliquée et le moment au centre :**

Pour la suite des calculs, il est nécessaire de relier la force appliquée par le vérin au moment de flexion au centre d'inertie de la poutre.

Dans un premier temps, il convient de tracer le diagramme des efforts (tranchant et fléchissant) en fonction du chargement appliqué :

- Poids propre de la poutre
- Force appliquée au vérin
- **Montrer l'intérêt d'un essai flexion à 4 points :**

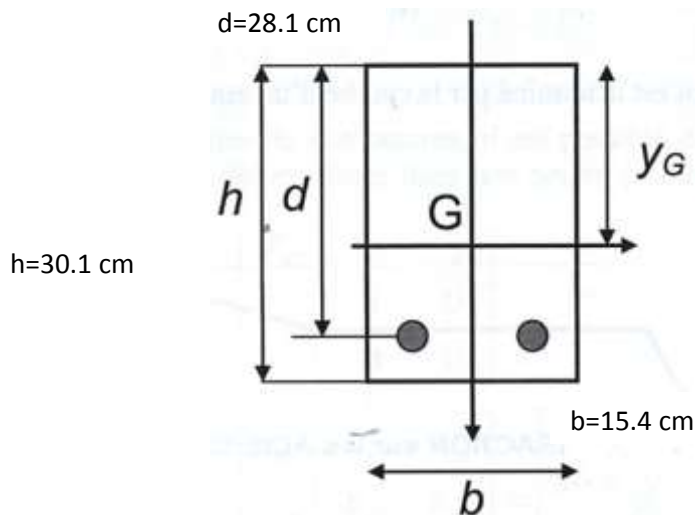
La flexion à 4 points permet de ne pas avoir d'effort tranchant entre les deux points de charge permettant à la poutre d'être en flexion pure sur cette section précise.

➤ **Calcul du moment de fissuration:**

La 1<sup>ère</sup> fissure apparaît dès que la contrainte de traction excède la possibilité du béton en traction.

Il s'agit donc de déterminer la contrainte dans la zone où les fibres de la poutre sont tendues.

Pour cela on considère la section totale rendue homogène ( $S_{\text{béton}} + nS_{\text{acier}}$ )



Il est possible de calculer la position du centre de gravité G de la section homogène :

$$Yg \times (bh + nAs) = \frac{bh \cdot h}{2} + nAs \cdot d$$

On peut calculer également l'inertie  $I_z$  de la section homogène :

$$I_z^{total} = \frac{b \cdot Yg^3}{3} + \frac{b \times (h - Yg)^3}{3} + nAs \times (d - Yg)^2$$

La contrainte de traction pour la fibre la plus tendue est définie par :

$$\sigma_{xx} = \frac{Mz}{I_z^{total}} \times (h - Yg)$$

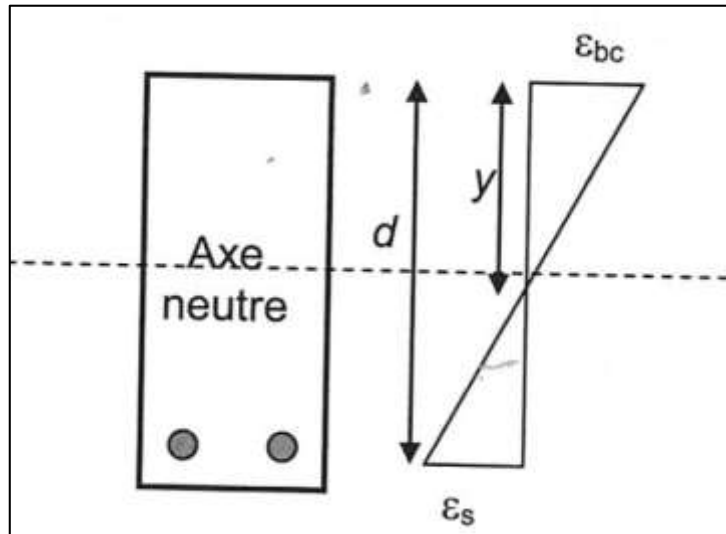
A partir du critère de fissuration, on obtient la valeur du moment de fissuration, puis de la force appliquée sur la poutre pour obtenir la première fissure dans la poutre.

➤ **Calcul du moment de rupture de la poutre 1:**

La poutre 1 dispose d'un « gros » ferrailage. La rupture de cette poutre interviendra donc dans le béton sous des efforts de compression trop important.

Par convention, la rupture intervient si la déformation relative du béton comprimé vaut 3.5 pour mille ( $\epsilon_{bc} = 0.0035$ )

On représente les déformations de la poutre au moment de la rupture par le schéma ci-dessous :

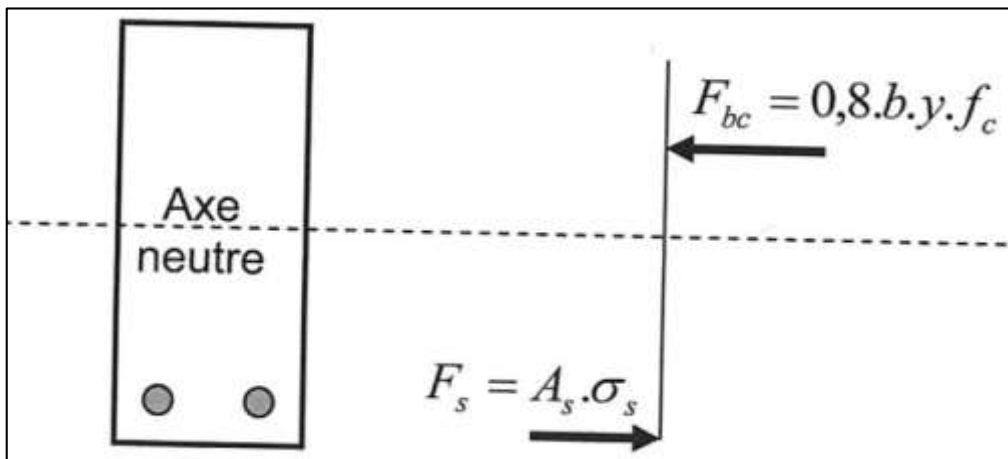


La position de l'axe neutre peut être déterminée par la première relation :

$$\frac{y}{\epsilon_{bc}} = \frac{d}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}$$

Pour déterminer la déformation de l'acier, il faut écrire l'équilibre entre la force reprise par le béton comprimé et la force reprise par l'acier tendu en supposant qu'il travaille à son maximum :

$$F_{bc} = F_s$$



Une fois calculée la déformation de l'acier, la position de l'axe neutre peut être définie, puis le moment correspondant à l'aide de l'équation suivante :

$$M = F_{bc} \times (d - 0.4y)$$

### ➤ Calcul du moment de rupture de la poutre 2:

La poutre 2 est constituée d'un « petit » ferrailage donc celui-ci ne résistera pas à des efforts de traction trop élevés. La rupture de la poutre interviendra donc à la suite de la rupture du ferrailage en traction.

Celle-ci intervient si la déformation relative de l'acier tendu vaut 30 pour mille ( $\varepsilon_s = 0.0030$ ).

Pour déterminer la déformation maximale dans le béton comprimé ( $\varepsilon_{bc}$ ), il faut écrire l'équilibre entre la force reprise par le béton comprimé et la force reprise par l'acier tendu. La contrainte de l'acier est alors maximale.

On calcule ensuite, à l'aide de la formule vue précédemment, le moment correspondant à la rupture de la poutre 2.

## IV) Etude expérimentale du comportement des matériaux:

Plusieurs essais sont proposés afin d'obtenir certains paramètres du comportement de chacun des matériaux.

### ➤ Essais sur béton :

- Résistance à la compression : Il faut réaliser un essai de compression simple et mesurer la force maximale obtenue, puis en déduire la contrainte.
- Résistance à la traction : Deux essais possibles : le fendage ou la flexion.
- Module d'Young et coefficient de poisson : Il faut déterminer les déformations axiales et radiales au sein de l'éprouvette testée. On mesure donc à l'aide de capteurs les variations de hauteur et de diamètre au cours de cycles de charges-décharges.

### ➤ Essai de traction sur l'acier

On effectue un essai de traction sur une barre en acier. Un système de mesure permet d'enregistrer la force de traction ainsi que le déplacement appliqué à la barre. Il est donc possible ensuite de tracer la relation contrainte-déformation afin d'étudier la loi de comportement.

## V) Etude expérimentale des poutres en béton armé:

Les deux poutres sont soumises à un essai de flexion 4 points. La force est augmentée par palier jusqu'à atteindre la rupture.

Durant cet essai, on enregistre plusieurs mesures :

- L'effort appliqué par le vérin, mesuré par la presse
- La flèche au centre de la poutre, mesurée par un capteur de déplacement
- La déformation de l'acier, mesurée par une jauge placée sur le ferrailage.

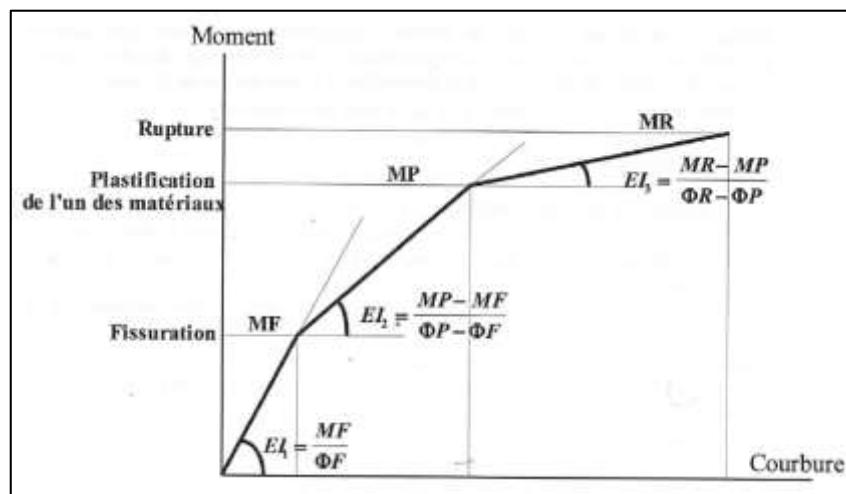
La position de l'axe neutre est également déterminée à différents paliers de force, à l'aide de capteurs disposés sur la poutre et reliés à un PC. Ce dispositif permet d'évaluer les différents déplacements de la poutre en fonction des cycles de charge et décharge appliqués à celle-ci.



Figure 1: Disposition de capteurs sur la poutre testée

➤ **Courbe type d'un essai de flexion :**

Le comportement d'une section de béton armé peut se représenter par un diagramme moment-courbure linéaire dans chacune des trois phases (élastique, fissuration, plastification et rupture) permettant ainsi de déterminer les rigidités  $EI$ .





## VI) Travail demandé:

- Rédaction sous forme de note de calcul l'étude théorique des deux poutres donnant les valeurs de la force de fissuration et la rupture des deux poutres.

### ➤ Poutre 1 FISSURATION:

$$As(PGA) = 4.10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F_{cj} = 35 \text{ MPa} \quad f_{tj} = 0.6 + 0.06.f_{cj} = 2.7 \text{ MPa} \quad E_b = 11000.f_{cj}^{0.33} = 15266.61 \text{ MPa}$$

$$E_s = 210 \text{ GPa}$$

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{210}{15.266} = 13.75$$

$$Y_G = \left[ \frac{\frac{0.30^2 \times 0.154}{2} + 13.75 \times 4.10^{-4} \times 0.281}{0.154 \times 0.301 + (13.75 \times 4.10^{-4})} \right] = 14.45 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{0.154 \times (0.1445)^3}{3} + \frac{0.154 \times (0.301 - 0.1445)^3}{3} + 13.75 \times 4.10^{-4} (0.281 - 0.1445)^2$$
$$= 3.76.10^{-4} \text{ m}^4$$

$$M_{zfissuration} = \frac{2.7 \times 3.76.10^{-4}}{0.301 - 0.1445} = 6.48 \text{ kN.m}$$

### ➤ Poutre 1 RUPTURE DUCTILE:

Quelques explications sur la méthode de calculs :

Pour la poutre en gros ferrailage, c'est le béton qui sera le premier en rupture donc dans les équations  $\frac{y}{\epsilon_{bc}} = \frac{d}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}$  et  $F_{bc} = F_s$  avec  $\epsilon_{bc} = 0.0035$ ,  $F_{bc} = 0.8 \times b \times y \times f_c$  et  $F_s = E_s \times \epsilon_s \times A_s$ ,  $\epsilon_s$  et  $y$  sont les deux inconnus et on isole  $y$  pour identifier  $y$  (axe neutre). On obtient une équation du second degré en  $y$  :

$$4312000 y^2 + 294000y - 82614 = 0$$

$$y = 10.84 \text{ cm}$$

A partir de l'axe neutre, nous pouvons calculer le moment de rupture :

$$M_{rupture} = 0.8 \times 0.154 \times 35 \times 0.1084 \times (0.281 - 0.4 \times 0.1084) = 111 \text{ kN.m}$$

➤ **Poutre 2 FISSURATION:**

$$As(PGA) = 1.10^{-4} \text{ m}^2$$

$$YG = \left[ \frac{\frac{0.30^2 \times 0.154}{2} + 13.75 \times 1.10^{-4} \times 0.281}{0.154 \times 0.301 + (13.75 \times 1.10^{-4})} \right] = 15.33 \text{ cm}$$

$$Iz = \frac{0.154 \times (0.1533)^3}{3} + \frac{0.154 \times (0.301 - 0.1533)^3}{3} + 13.75 \times 1.10^{-4} (0.281 - 0.1533)^2$$

$$= 3.72.10^{-4} \text{ m}^4$$

$$Mz_{fissuration} = \frac{2.7 \times 3.72.10^{-4}}{0.301 - 0.1533} = 6.8 \text{ kN.m}$$

➤ **Poutre 2 RUPTURE ACIER:**

Quelques explications sur la méthode de calculs :

Pour la poutre en petit ferrailage, c'est l'acier qui sera le premier en rupture donc en utilisant l'équation d'équilibre des forces  $Fbc = Fs$  avec  $Fbc = 0.8 \times b \times y \times fc$  et  $Fs = \sigma_s \times As$ , on peut facilement calculer l'axe neutre  $y$  :

$$y = \frac{500 \times 1.10^{-4}}{0.8 \times 0.154 \times 35} = y = 1.16 \text{ cm}$$

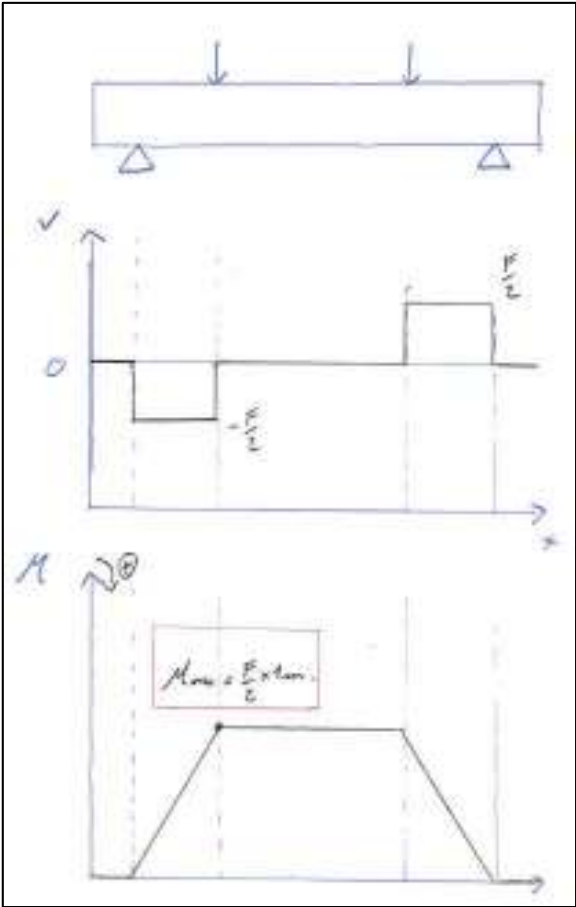
A partir de l'axe neutre, nous pouvons calculer le moment de rupture :

$$M_{rupture} = 0.8 \times 0.154 \times 35 \times 0.0116 \times (0.281 - 0.4 \times 0.0116) = 13.82 \text{ kN.m}$$

**Récapitulatif des résultats théoriques poutre 1 et 2 :**

	Poutre 1 (PGA)	Poutre 2 (PPA)
YG (cm)	14.45	15.33
Iz (m <sup>4</sup> )	3.76.10 <sup>-4</sup>	3.72.10 <sup>-4</sup>
Moment fissuration (kN.m)	6.48	6.8
y (axe neutre) (cm)	10.84	1.16
Moment de rupture (kN.m)	111	13.82

**Diagramme théorique de la poutre flexion 4 points :**

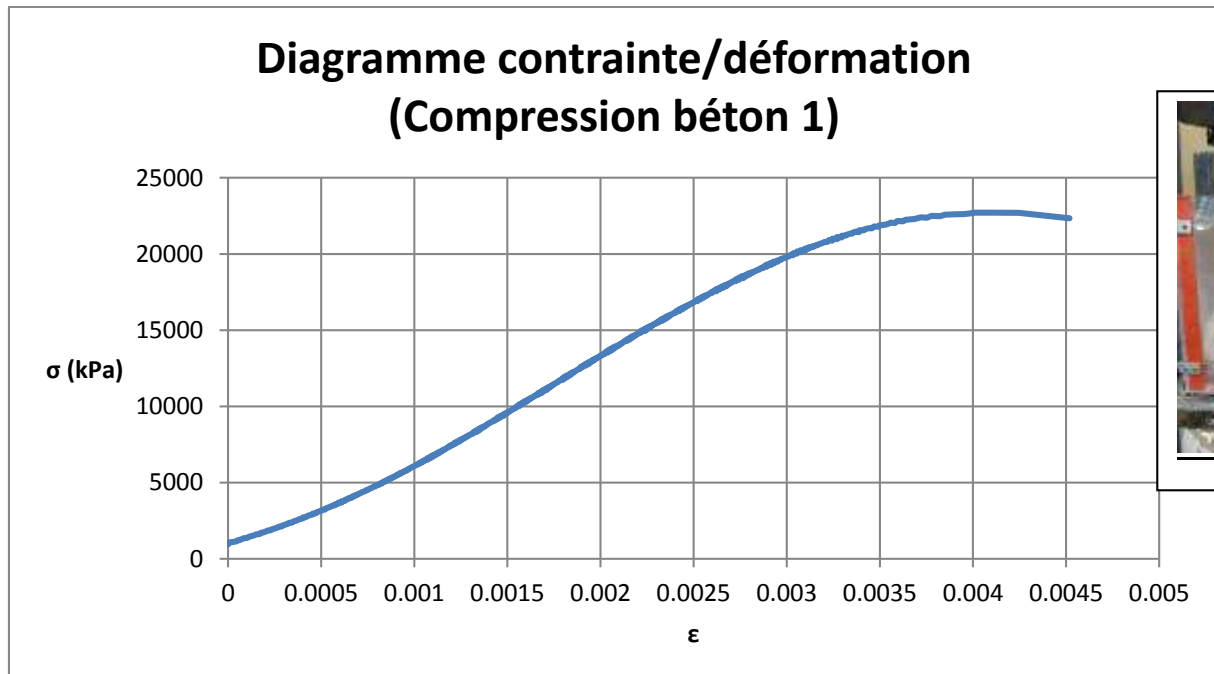


Grâce à ce diagramme, nous pouvons définir une valeur théorique de force de rupture de chaque poutre :

	Poutre 1 (PGA)	Poutre 2 (PPA)
F de rupture théorique (kN)	222	28

- Présentation des résultats des essais sur les matériaux béton et acier :

➤ Essais sur béton :



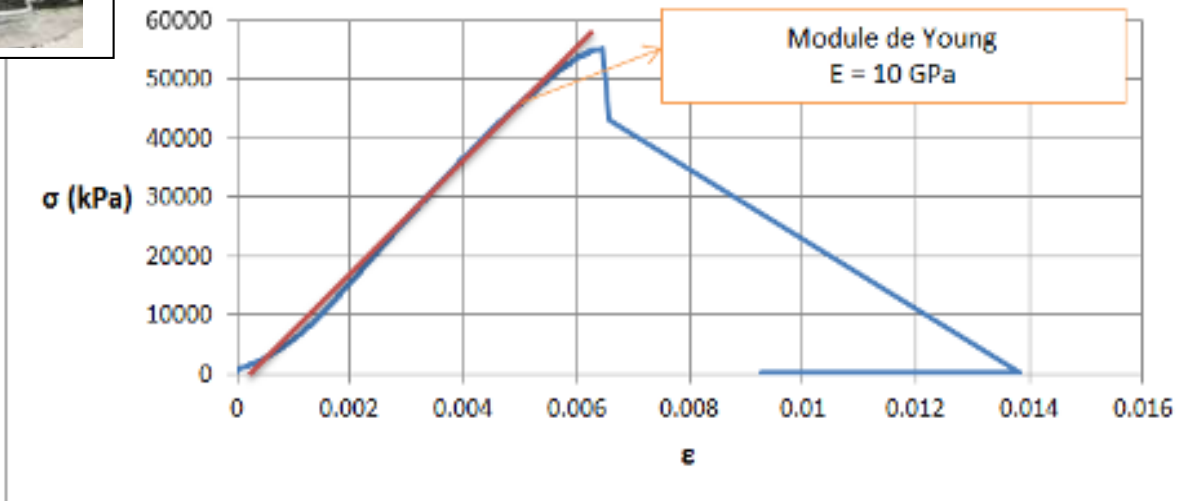
Les résultats de l'essai montrent que la structure de l'échantillon de l'éprouvette s'est désagrégée sans arriver à la rupture des granulats. Cela démontre que le ciment est d'une mauvaise qualité.



Figure 2: Granulats intacts après essai de compression



### Diagramme contrainte/déformation (Compression béton 2)



On peut observer cette fois ci que les granulats sont rompus démontrant que la qualité du liant ciment a totalement joué son rôle.



Figure 3: Granulats arrivés à rupture après essai de compression

Ces essais nous ont permis d'obtenir la contrainte maximale admissible en compression avant rupture pour ces bétons :

$$\sigma_{c1} = 22,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c2} = 55 \text{ MPa}$$

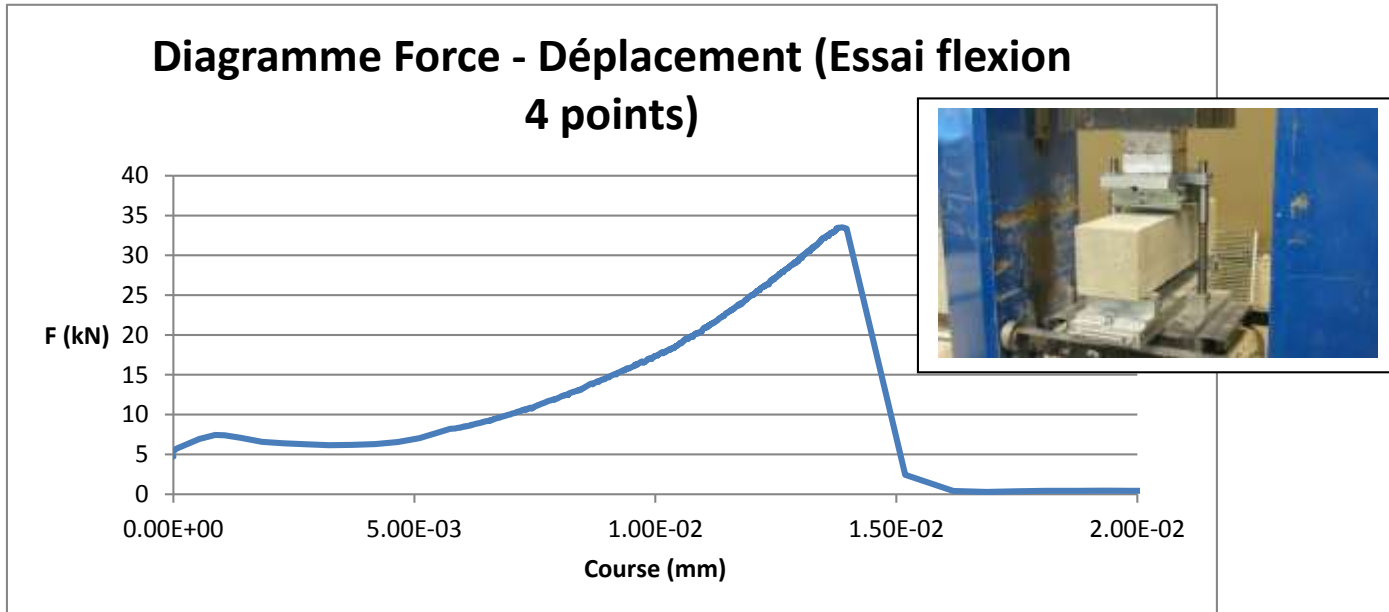
Le béton à la chaux est donc environ deux fois moins résistant en compression qu'un béton classique.

- Résistance à la traction : Deux essais possibles : le fendage ou la flexion.

Nous avons réalisé deux essais normalisés permettant d'obtenir la résistance du béton à la traction :

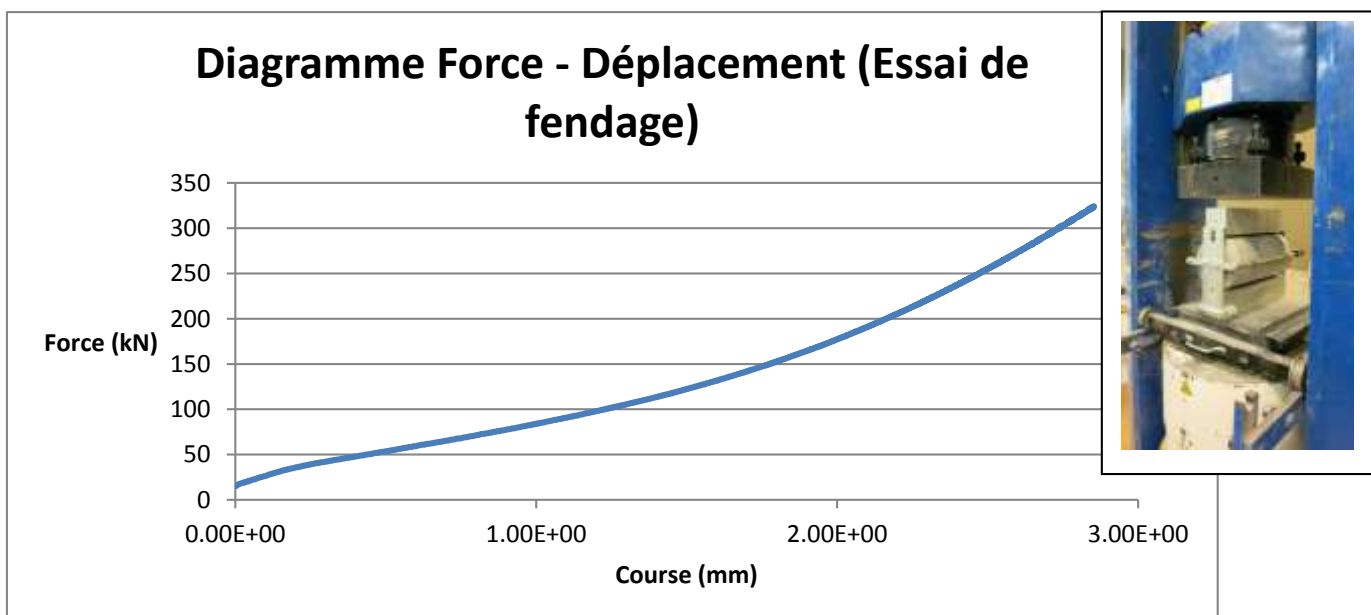
- Essai de flexion 4 points
- Essai de fendage (Essai brésilien)

Ces essais n'appliquent pas un effort de traction pure mais en appliquant des formules empiriques nous pouvons obtenir les contraintes à la rupture en traction.



Calcul de la contrainte de rupture en traction (F : force maximale ; a : Section éprouvette) :

$$\sigma_t = \frac{30 * F}{a^2} = 5,03 \text{ MPa}$$



$$\sigma_t = \frac{20 \cdot F}{\pi \cdot a \cdot h} = 4,03 \text{ MPa}$$

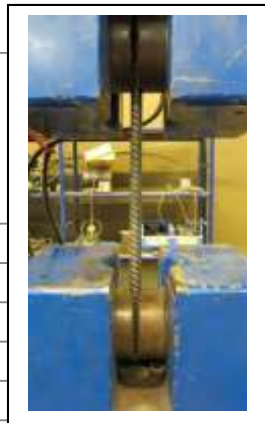
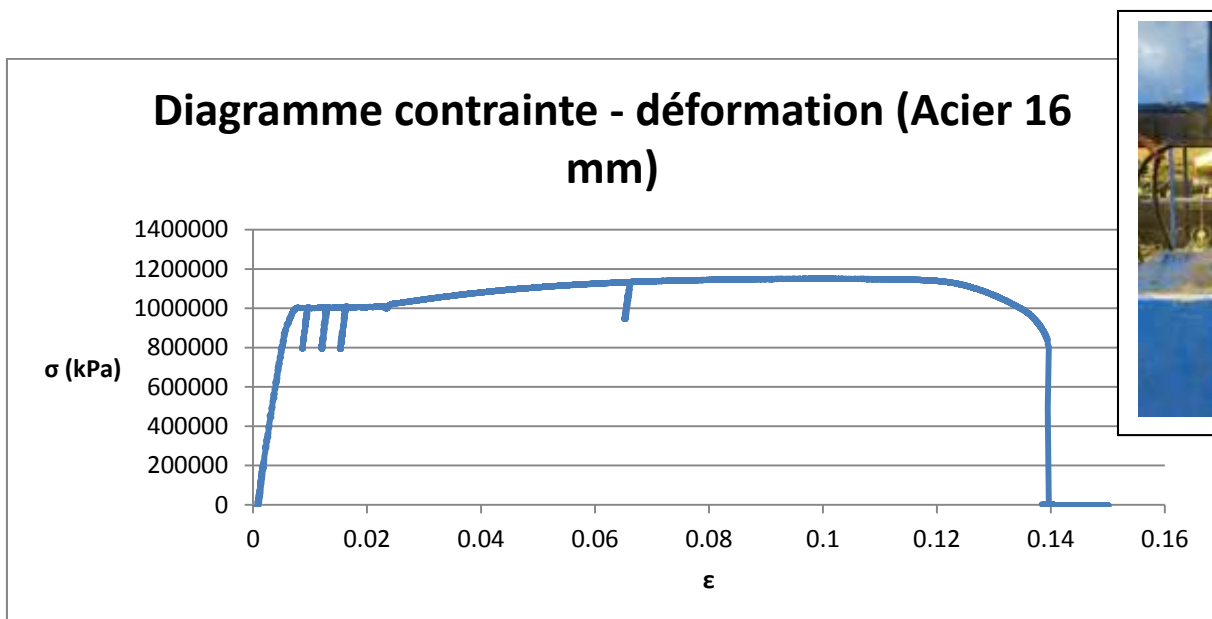
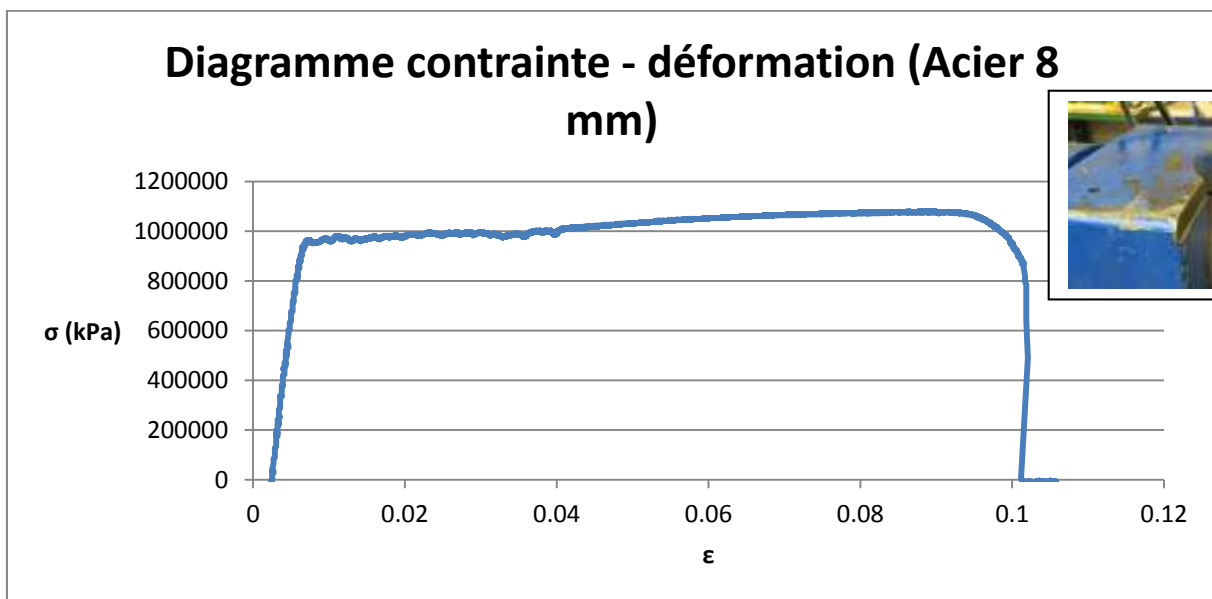
- Nous avons déterminé le module de Young de ce béton grâce à la courbe de contrainte-déformation en compression (n°2). La pente de la partie linéaire nous donne :

$$E = 10 \text{ GPa}$$

Ce module de Young est un peu faible en comparaison des ordres de grandeurs habituels compris entre 15 et 40 GPa.

### ➤ Essai de traction sur l'acier

Nous avons effectué des essais de traction sur des barres en acier de diamètre 8 mm et 16 mm. Voici leurs diagrammes de contrainte – déformation :



On observe trois phases sur les diagrammes de ces essais :

1. Domaine élastique
2. Domaine plastique
3. Rupture du matériau.

Voici les valeurs importantes issues de ces diagrammes :

Diamètre barre	Contrainte d'élasticité (MPa)	Contrainte maximale (MPa)	Contrainte de rupture (MPa)	Module de Young (GPa)
8 mm	900	1008	925	200
16 mm	900	1150	931	200

Le domaine élastique se situe entre l'origine du diagramme et la contrainte d'élasticité. En déchargeant la barre avant cette valeur, la barre retrouve ses dimensions initiales sans déformations. Après avoir dépassé cette valeur, le matériau entre dans le domaine plastique et subit une déformation irréversible. Si l'on décharge la barre dans ce domaine, elle ne retrouve pas sa taille initiale. Ensuite la contrainte atteint une valeur maximale puis décroît car la rupture s'approche et la section de la barre diminue.

➤ **Comparaison des résultats expérimentaux aux valeurs usuelles utilisées lors de l'étude théorique.**

	BETON	
	Valeurs théoriques	Résultats essais éprouvettes
fc (Mpa)	35	55
ft (Mpa)	2.7	4 à 5
Module de Young Eb (Gpa)	15	10

**Comparatif : Les valeurs de la résistance du béton en compression et traction des résultats essais paraissent élevées. Ces paramètres dépendent essentiellement de la qualité du béton utilisé. Les modules diffèrent de plus de 30%.**

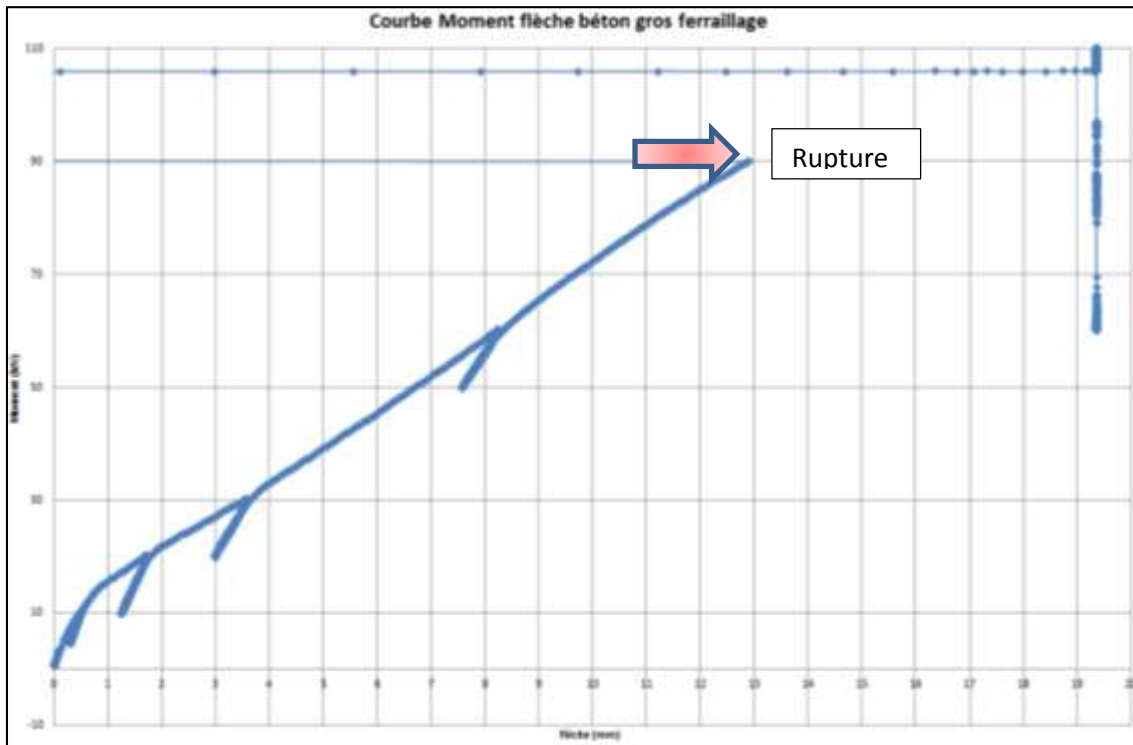
	ACIER	
	Valeurs théoriques	Résultats essais éprouvettes
Module de Young Es (Gpa)	210	200
n	13.75	20

**Comparatif : Les valeurs du module de Young sont quasiment les mêmes à 10GPa près représentant une erreur de 5 %. La valeur de n est différente car celui-ci se calcule par la formule**

**suivante :  $n = \frac{E_s}{E_b}$  or  $E_{\text{Expérimental}} < E_{\text{théorique}}$  donc on obtient un coefficient d'équivalence essai inférieur.**



- **Présentation des résultats expérimentaux**
- *Courbes flèche-effort appliqué et déformation-effort appliqué sur la poutre 1 PGA :*



**Figure 4 :courbe flèche de la poutre-moment**

On observe sur la courbe ci-dessus que la courbe entre les moments appliqués et la flèche est linéaire (les ressauts représentent les cycles de charge-décharge). Il est difficile sur cette courbe de définir les différentes étapes de fissuration ou de plastification de l'acier. Cependant, comme identifier sur le schéma, on relève facilement le point de rupture.(flèche=13 mm, effort de 90kN).

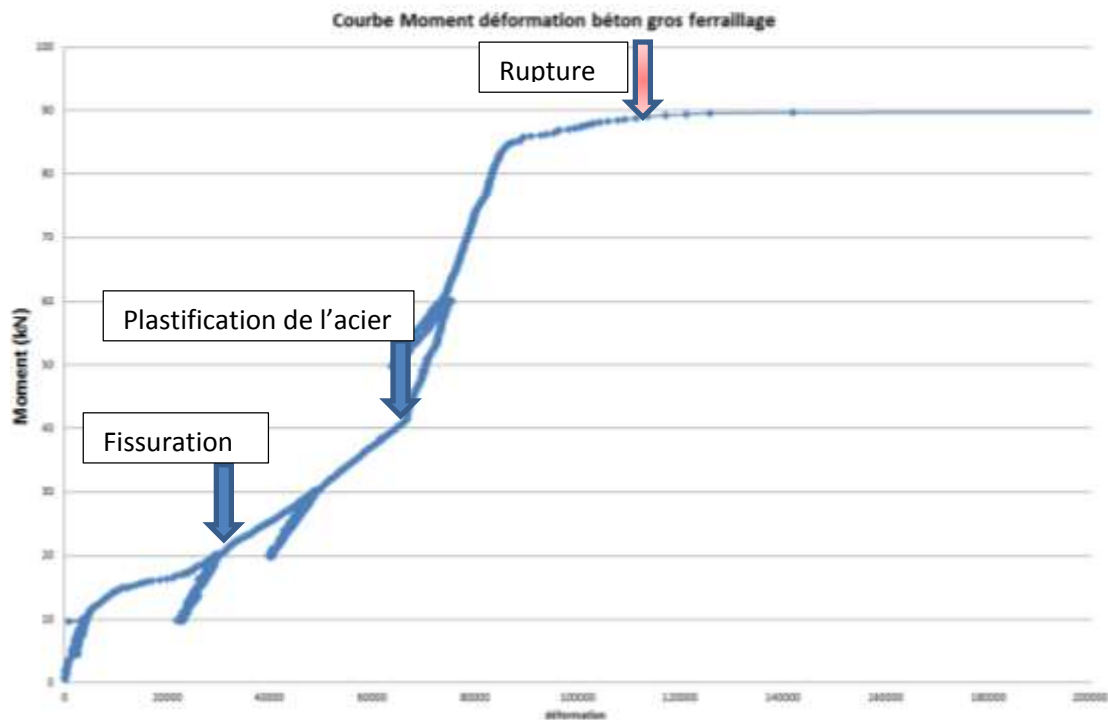


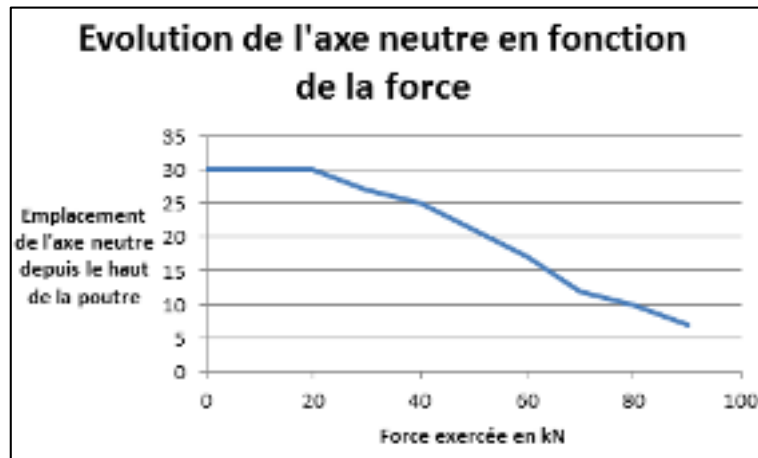
Figure 5 : courbe déformation de la poutre et efforts appliqués

On observe beaucoup plus clairement sur cette courbe effort-déformation de la poutre les différentes étapes de fissuration, plastification de l'acier ainsi que la rupture par écrasement du béton. Cette courbe peut facilement se convertir en courbe Moment-courbure définie dans la notice du rapport  $Courbure = \frac{cte}{déformation}$  ce qui ne fait que modifier le coefficient des pentes.

Récapitulatif de l'expérimentation des poutres :

	Poutre 1 (PGA)	Poutre 2 (PPA)
Moment fissuration (kN.m)	10	8
y (axe neutre) (cm)	6.8	2.4
Moment de rupture (kN.m)	90	15

- Courbe donnant la position de l'axe neutre en fonction de la force du vérin sur la poutre 1  
PGA :



L'axe neutre a pu être tracé grâce à l'évolution des fissures et leurs mesures successives lors de l'expérience. En effet, le sommet de la fissure correspond à l'axe neutre puisque celle-ci détermine les sections soumises à compression ou traction (section à fissures=traction).

**Apparition des fissures :**



Figure 6: début de fissuration au centre de la poutre

Les premières fissures apparaissent au centre de la poutre entre les deux appuis où s'exercent les forces.



Figure 7: propagation des fissures en direction des extrémités de la poutre

Puis au fur et à mesure de l'augmentation de la force du vérin hydraulique, les fissures se décalent de part et d'autre du centre de la poutre en direction des extrémités de la poutre.

**Orientation et évolution des fissures :**

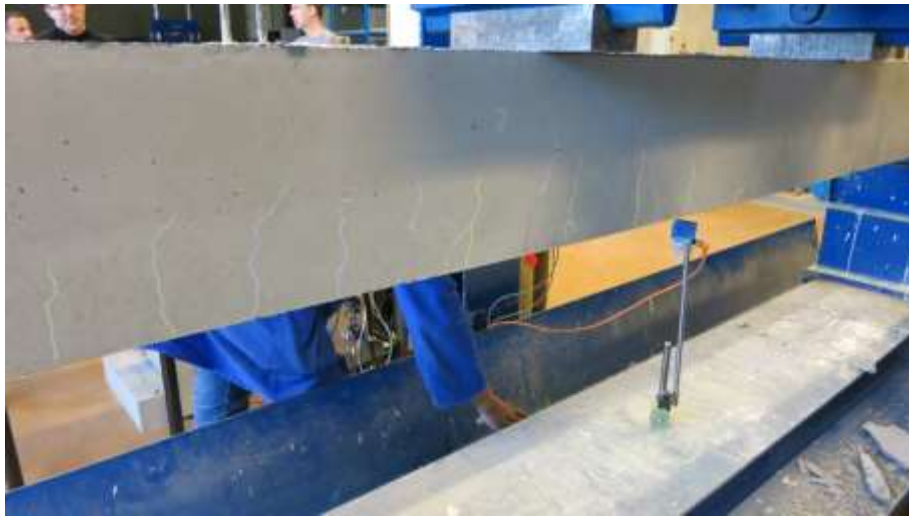


Figure 8: orientation des fissures

Leurs orientations sont perpendiculaires par rapport à la longueur de la poutre. Elles débutent en bas de celle-ci avant de remonter au sommet de la surface supérieure. Après la rupture, la distance entre le sommet de de la face supérieure de la poutre et la fin des fissures correspond au  $y$  de l'axe neutre.

- **Comparaison des résultats de l'étude expérimentale et théorique.**

Récapitulatif des résultats expérimentaux et théoriques :

	expérimental		théorique	
	Poutre 1 (PGA)	Poutre 2 (PPA)	Poutre 1 (PGA)	Poutre 2 (PPA)
Moment fissuration (kN.m)	10	8	6.48	6.8
$y$ (axe neutre) (cm)	6.8	2.4	10.84	1.16
Moment de rupture (kN.m)	90	15	111	13.82

Entre les études théoriques et les études expérimentales, on peut remarquer plusieurs points :

- Les moments de fissurations des deux poutres sont relativement proches (erreur tout de même d'environ 30%)
- Les ordres de grandeur des axes neutres sont respectés (surtout pour la poutre 2 PPA)
- Les moments de rupture sont similaires bien que la théorie de la poutre 1 semble top sécuritaire. (Inquiétant pour la mise en pratique).

Cependant, il est important de souligner que les tests éprouvettes et expérimentaux devraient être très éloignés du fait de la qualité du béton (test :  $f_c = 55MPa$  et expérience plus proche de  $35MPa$ ).

Du coup, la théorie est plus fiable (pour 1 fois !!!) que les essais éprouvettes.

- **Conclusion sur la sécurité de chacune des poutres**

La poutre 1 composée de gros ferrailage cède sans chute de la structure. Quelques morceaux de béton tombent mais celle-ci reste d'un seul morceau du fait que les aciers n'ont pas été jusqu'à la rupture.



Figure 9: poutre béton armé en un seul morceau exerçant toujours sa fonction de portance grâce à un ferrailage adapté

Ainsi, malgré la présence d'une force encore importante (de l'ordre d'une centaine de kN), la poutre 1 conserve sa fonction de portance malgré une certaine destruction de sa structure béton (dû essentiellement au « jaillissement » des aciers en surface sous la contrainte de la flexion).

Par contre, la poutre 2 ne disposant que de petits aciers s'effondrent totalement en deux parties bien distinctes n'exerçant plus aucune fonction de portance au niveau d'une tierce structure impliquant ainsi des problèmes importants de sécurité sur un ouvrage.



Figure 10: poutre en béton armé après rupture du ferrailage sous dimensionné

**En conclusion, la poutre en béton armé n'a d'intérêt que si le dimensionnement des aciers permet à une poutre de pouvoir rompre sans céder (caractéristique première des aciers). C'est pour cela que le dimensionnement d'une poutre armée se fait par rupture des bétons et non de l'acier.**