Projet de MRO

Heuristiques pour la résolution des problèmes combinatoires difficiles

AIROLDI Solène
CLAVEL Jessica
NUGIER Freddy

7 mai 2014

Démonstration de la Propriété fondamentales 2.1.

Nous supposons qu'il existe $\overline{x} \in \mathcal{X}$ tel que pour $\mathcal{S}$ sous-ensemble de $\mathcal{X}$, $\varphi(\mathcal{S}) > f(\overline{x})$. Montrons que la solution du problème

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \tag{1}$$

n'appartient pas à $\mathcal{S}$.

Notons x_1 la solution du problème (1). Supposons, en raisonnant par l'absurde, que $x_1 \in \mathcal{S}$. Nous avons alors immédiatement $\varphi(\mathcal{S}) \leq f(x_1)$. Il vient donc

$$f(\overline{x}) < \varphi(\mathcal{S}) \leq f(x_1) \tag{2}$$

puis

$$f(\overline{x}) < f(x_1) \tag{3}$$

Or $\overline{x} \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$ donc (3) amène à une confusion : nous avons trouvé x_1 minimisant $f(x)$ sur $\mathcal{S}$ et non sur $\mathcal{X}$.

La proposition est démontrée.

Première partie
Résolution du problème du voyageur de commerce

1 Nombre de permutations de $\mathcal{X}$

La ville de départ est fixée. Le problème comportant six villes, il y a donc $5! = 120$ permutations de l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. [1]

1. Pour des raisons pratiques, nous avons numéroté les villes selon $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5etF = 6$.

2 Résolution par la méthode de programmation linéaire

Le système d'équations des contraintes est

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{6} x_{i,j} = 1, \forall i \in \mathcal{X} \\ \\ \sum_{i=1}^{6} x_{i,j} = 1, \forall j \in \mathcal{X} \end{cases} \tag{4}$$

Ce système de 12 équations à 36 inconnues (correspondantes à toutes les possibilités $x_{i,j}$ lorque $i \in \mathcal{X}$ et $j \in \mathcal{X}$) est de la forme $A.x = b$ où, en notant δ_6 la matrice identité de dimension 6,

$$A = \begin{pmatrix} (1) & (0) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (1) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (1) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (1) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (0) & (1) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (0) & (0) & (1) \\ \delta_6 & \delta_6 & \delta_6 & \delta_6 & \delta_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$x = \left(x_{i,j}, i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{X} \right) \tag{6}$$

soit encore

$$x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{2,1} & \cdots & x_{3,1} & \cdots & x_{4,1} & \cdots & x_{5,1} & \cdots & x_{6,1} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

2.1 Détermination du rang de A

Nous savons que pour une matrice A rectangulaire à n lignes et p colonnes, $rg(A) \leq \min(n, p)$. Nous en déduisons donc $rg(A) \leq 12$.

Nous pouvons alors facilement remarquer que la première ligne est une combinaison linéaire des onze autres. Notons L_i la ligne i de la matrice A. Nous obtenons alors

$$L_1 = \sum_{i=7}^{12} L_i - \sum_{i=2}^{6} L_i \tag{8}$$

Donc $rg(A) \leq 11$.

Montrons que $rg(A) = 11$. Pour cela, montrons ques les onze dernières lignes de A forment une famille libre i.e. que si $\sum_{i=2}^{12} \lambda_i L_i = 0$ alors $\forall i \in [\![2, 12]\!], \lambda_i = 0$.

Nous obtenons alors un système de 36 équations à 11 inconnues, que nous pouvons facilement résoudre :

$$\begin{cases} \lambda_7 = 0 \\ \lambda_8 = 0 \\ \lambda_9 = 0 \\ \lambda_{10} = 0 \\ \lambda_{11} = 0 \\ \lambda_{12} = 0 \\ \forall i = 2..6, j = 1..6, \lambda_i + \lambda_{6+j} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Nous avons bien, en résolvant (9), $\lambda_i = 0, \forall i \in [\![2, 12]\!]$.

Conclusion :

$$\boxed{rg(A) = 11}$$

2.2 Sous-déterminants de matrices issues de A

Notons n la dimension du sous-déterminant issu de la matrice A définie précédemment. Notons aussi D_n ce sous-déterminant. Par récurrence sur l'entier n, montrons que

$$\forall n \in [\![2, 11]\!], det(D_n) \in \{-1, 0, 1\} \tag{10}$$

Si n=2, alors les sous-déterminants possibles d'ordre 2, contenant seulement des 1 et des 0. La valeur des sous-déterminants est donc bien -1, 0 ou 1.

Soit $n \geq 2$ tel que $det(D_n) \in \{-1, 0, 1\}$.

On somme toutes les colonnes du sous-déterminant créé. Plusieurs cas se présentent

Si la colonne somme contient un ou plusieurs zéro(s), alors le sous-détreminant contient une ligne de zéros : son déterminant est nul.

Si la colonne somme contient un ou plusieurs 1, on développe le déterminant selon la ligne correspondante. On a donc $det(D_{n+1}) = (-1)^{i+j}\Delta_n \in \{-1, 0, 1\}$. $\Delta_n \in \{-1, 0, 1\}$ (d'après l'hypothèse de récurrence) est le mineur associé au 1 de coordonnées (i,j) dans le sous-déterminant D_{n+1}.

Au vu de la matrice A, et de la taille maximale $11 * 11$ des sous-déterminants, il n'y a pas de cas où la colonne somme ne contient pas de 0 ou de 1.

La proposition est ainsi démontrée.

Notons par ailleurs que tous les sous-déterminants issus de A, et dont l'ordre est supérieur ou égal à 7, sont nuls.

2.3 Caractérisation des solutions du problème

Au vu des valeurs des déterminants, l'inversion des matrices pour obtenir la solution conduit à des valeurs de $x_{i,j}$ soit de 0 soit de 1. En effet, nous savons que pour D, matrice de déterminant non nul, et donc égal à 1 ou -1 ici, $A^{-1} = \frac{1}{det(D)} * {}^t com(D)$.

Nous pouvons même être sûr que seules six valeurs $x_{i,j}$ seront non nulles et donc égales à 1. On peut mieux comprendre cela en disant que soit on fait le trajet de i vers j ($x_{i,j} = 1$) soit non ($x_{i,j} = 0$).

Démontrons maintenant la propriété suivante : $x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j = \sigma(i)$.

Comme nous sommes dans le cas d'un circuit hamiltonien (on ne passe qu'une seule fois par chaque ville), il y aura seulement six $x_{i,j}$ non nuls donc égaux à 1. On peut traduire cela en disant que pour i donné, un seul j existe pour que $x_{i,j} = 1$.

– Si $x_{i,j} = 1$ alors on va de i vers j, soit que $\sigma(i) = j$.

– Si $\sigma(i) = j$, alors dans la tournée globale on effectue le trajet de i vers j soit $x_{i,j} = 1$

La démonstration est achevée.

2.4 Résolution du programme linéaire

On utilise pour ce faire le solveur Excel. Les trois premières pages d'annexes contiennent les calculs. La première page contient l'initialisation du problème, la seconde, le résultat après résolution et enfin les paramètres du solveur en page 3.

Comme on ne peut pas attribuer la valeur infinie à des variables dans le solveur Excel, nous avons attibué aux $x_{i,i}$ une valeur très importante pour s'assurer qu'elles ne seront pas calculées.

Enumérons d'abord les seules valeurs $x_{i,j}$ non nulles. Nous trouvons alors

$$x_{1,2} = x_{2,4} = x_{4,1} = 1 \tag{11}$$

et

$$x_{3,5} = x_{5,6} = x_{6,3} = 1 \tag{12}$$

On note aussi que le solveur fournit le coût de cette tournée minimale : 15.

Il est alors aisé de remarquer que la tournée nécessite alors deux véhicules pour parcourir les 6 six villes selon un circuit hamiltonien :

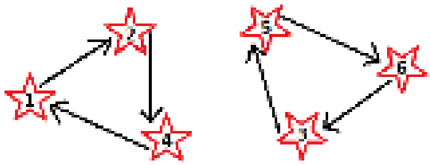

Figure 1 – Circuit hamiltonien du Problème du voyageur de commerce

Nous allons maintenant voir comment il est possible de résoudre ce problème par la méthode de séparation.

3 Résolution par la méthode de séparation

Dans l'exemple de l'énoncé, où $\sigma(A) = E$ et $\sigma(C) = B$, nous aurons en effet nécessairement $x_{A,E} = x_{C,B} = 1$. Cela vient de l'expression des contraintes et même de l'équivalence démontrée en 2.3. Qualitativement, cela revient à dire que le seul successeur de A est E, et que le seul successeur de C est B.

Nous allons maintenant effectuer la séparation par les lignes, où nous choisissons arbitrairement A comme ville de départ.

– Si le circuit contient le parcours $(A - B)$. Le tableau de l'énoncé devient donc :

x \ y	A	B	C	D	E	F
A	∞	3	∞	∞	∞	∞
B	9	∞	7	4	12	10
C	15	∞	∞	9	1	8
D	2	∞	15	∞	8	9
E	20	∞	12	8	∞	2
F	7	∞	3	9	7	∞

(13)

Appliquons alors le solveur, en conservant la structure 2.4.
Il vient alors le résultat suivant :

$$x_{1,2} = x_{2,4} = x_{4,1} = x_{3,5} = x_{5,6} = x_{6,3} = 1 \tag{14}$$

Le problème est donc le même que celui résolu en 2.4.

– Si le circuit contient le parcours $(A - C)$. Le tableau de l'énoncé devient donc :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
{}_{x}\diagdown^{y} & A & B & C & D & E & F \\
\hline
A & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty \\
B & 9 & \infty & \infty & 4 & 12 & 10 \\
C & 15 & 9 & \infty & 9 & 1 & 8 \\
D & 2 & 12 & \infty & \infty & 8 & 9 \\
E & 20 & 10 & \infty & 8 & \infty & 2 \\
F & 7 & 6 & \infty & 9 & 7 & \infty
\end{array} \tag{15}
$$

Appliquons alors une nouvelle fois le solveur
Il vient alors le résultat suivant :

$$x_{1,3} = x_{2,4} = x_{4,1} = x_{3,5} = x_{5,6} = x_{6,2} = 1 \tag{16}$$

On trouve cette fois ci un circuit hamiltonien unique :

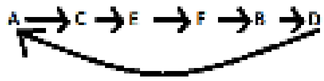

Figure 2 – Circuit hamiltonien du Problème du voyageur de commerce contenant A-C

Le coût de cette tournée est plus élevé que précédemment, égal à 23.

– Si le circuit contient le parcours $(A - D)$. Le tableau de l'énoncé devient donc :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
{}_{x}\diagdown^{y} & A & B & C & D & E & F \\
\hline
A & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & \infty \\
B & 9 & \infty & 7 & \infty & 12 & 10 \\
C & 15 & 9 & \infty & \infty & 1 & 8 \\
D & 2 & 12 & 15 & \infty & 8 & 9 \\
E & 20 & 10 & 12 & \infty & \infty & 2 \\
F & 7 & 6 & 3 & \infty & 7 & \infty
\end{array} \tag{17}
$$

Appliquons alors une nouvelle fois le solveur
Il vient alors le résultat suivant :

$$x_{1,4} = x_{2,3} = x_{4,1} = x_{3,5} = x_{5,6} = x_{6,2} = 1 \tag{18}$$

On retrouve le cas où il y a besoin de deux tournées pour parcourir toutes les villes une seule fois en un coût minimum :

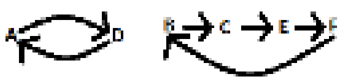

Figure 3 – Circuit hamiltonien du Problème du voyageur de commerce contenant A-D

Le coût de cette tournée est plus élevé que précédemment, égal à 28.

– Si le circuit contient le parcours $(A - E)$. Le tableau de l'énoncé devient donc :

x \ y	A	B	C	D	E	F
A	∞	∞	∞	∞	7	∞
B	9	∞	7	4	∞	10
C	15	9	∞	9	∞	8
D	2	12	15	∞	∞	9
E	20	10	12	8	∞	2
F	7	6	3	9	∞	∞

(19)

Appliquons alors une nouvelle fois le solveur
Il vient alors le résultat suivant :

$$x_{1,5} = x_{2,4} = x_{4,1} = x_{3,2} = x_{5,6} = x_{6,3} = 1 \tag{20}$$

On retrouve le cas où il y a besoin de deux tournées pour parcourir toutes les villes une seule fois en un coût minimum :

Figure 4 – Circuit hamiltonien du Problème du voyageur de commerce contenant A-E

Le coût de cette tournée est égal à 27.

– Si le circuit contient le parcours $(A - F)$. Le tableau de l'énoncé devient donc :

x \ y	A	B	C	D	E	F
A	∞	∞	∞	∞	∞	9
B	9	∞	7	4	12	∞
C	15	9	∞	9	1	∞
D	2	12	15	∞	8	∞
E	20	10	12	8	∞	∞
F	7	6	3	9	7	∞

(21)

Appliquons alors une nouvelle fois le solveur
Il vient alors le résultat suivant :

$$x_{1,6} = x_{2,4} = x_{4,1} = x_{3,5} = x_{5,2} = x_{6,3} = 1 \tag{22}$$

On retrouve le cas où il y a besoin de deux tournées pour parcourir toutes les villes une seule fois en un coût minimum :

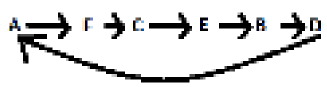

Figure 5 – Circuit hamiltonien du Problème du voyageur de commerce contenant A-F

Le coût de cette tournée est égal à 29.

Dressons maintenant le bilan de cette séparation :

Chemin imposé	Nombre de boucles	Coût
A - B	2	15
A - C	**1**	**23**
A - D	2	28
A - E	1	27
A - F	1	29

(23)

Il apparaît donc clair que la la solution optimale de ce problème linéaire est d'imposer $A - C$. En effet, il y a une seule "boucle" et un coût de 23, le plus petit possible dans la recherche du circuit hamiltonien.

Deuxième partie

Programmation linéaire en nombres entiers

1 Evaluation par le programme linéaire à valeurs réelles

Supposons que l'on trouve x, la solution du (PL). Nécessairement, la solution du programme linéaire en nombres entiers, notons la x_1, est majorée par x. Si ce n'était pas le cas, alors x_1 serait la solution du programme linéaire à valeurs réelles, contredisant que x soit solution de (PL).

En reprenant la définition de l'évalution et en passant au max, on vérifie alors que $x_{(PL)} \geq x_{(PLE)}$ (en notant x la solution soit de (PL) soit de (PLE)).

2 Question 1

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\overline{x}$ soit solution de (PL_+) et de (PL_-). En reprenant les notations de l'énoncé, les égalités

$$M(x_k) < x_k < P(x_k) \tag{24}$$

montrent que $\overline{x}$ ne peut satisfaire aux contraintes de chacun des problèmes. En effet, dans (PL_+), il faut assurer $x_k \geq P(x_k)$ et dans (PL_-) il faut $x_k \leq M(x_k)$.

Clairement, $\overline{x}$ n'est ni solution de (PL_+) ni de (PL_-).

Il est aussi clair que l'union des domaines réalisables des programmes linéaires en valeurs réelles inclus le domaine réalisable de PNE. En effet, (PL_+) est le programme qui va faire croître chaque variable non entière obtenue après résolution de PL. Le programme (PL_-) est quant à lui responsable de la réduction des variables non entières. Les solutions apportées à chaque séparations précisent les variables, les faisant converger vers des variables entières (en un nombre fini d'itérations sans quoi cette technique serait bien inutile). De plus, comme il s'agit d'un problème de maximisation sous contraintes, il y a un plafond que les variables ne pourront pas dépasser. Donc, apèrs les séparations, et que chaque variable est entière soit dans (PL_+) soit dans (PL_-), il nous reste plus qu'à réunir les solutions et trouver le bon vecteur x des variables satisfaisant à PNE.

Le dernier point résulte de la réponse au paragraphe précédent. En effet, il arrive un moment où dans la résolution de (PL_+) ou de (PL_-) des variables deviennent entières, ce qui en effet réduit le domaine réalisable en variable réelles. Le fait que le nombre d'itération soit fini lorque le domaine réalisable de PNE est bornée résulte des contraintes lors de la maximisation.

2.1 Question 2

Résolvons le programme linéaire en nombres entiers proposé dans l'énoncé, à l'aide du solveur intégré d'Excel.

Pour cela, on effectue d'abord l'initialisation dans le tableur (Figure 6.)

Varibles	x1	x2
Valeur initiale	0	0
Valeur après résolution		

	Expression	Valeur
Fonction Objectif initialisée	10*x1+9*x2	0
Fonction objectif après résolution		0

	Expression	Contrainte	
Première contrainte	7*x1+4*x2	≤	42
Seconde Contrainte	3*x1+8*x2	≤	48
Troisième Contrainte	x1	Entier naturel	
Quatrième contrainte	x2	Entier naturel	

Figure 6 – Initialisation de la résolution du PLE

Maintenant, programmons le solveur qui permet aussi de poser des contraintes pour qu'un nombre soit entier naturel. Puis nous effctuons la résolution et obtenons les résultats données dans la figure 7.

Les résultats obtenus vérifient bien les contraintes. Il vient alors $x_1 = 4$ et $x_2 = 3$. Dans la résolution du programme linéaire en valeurs réelles, les valeurs obtenues pour x_1 et x_2 ne sont en effet pas entières et valent respectivement $4,2727...$ et $3,772727....$ En page 09 de l'annexe, se trouve le résultat de la programmation linéaire à valeurs réelles.

Varibles	x1	x2
Valeur initiale	0	0
Valeur après résolution	4	3

	Expression	Valeur
Fonction Objectif initialisée	10*x1+9*x2	0
Fonction objectif après résolution		67

	Expression	Contrainte	
Première contrainte	7*x1+4*x2	≤	42
Seconde Contrainte	3*x1+8*x2	≤	48
Troisième Contrainte	x1	Entier naturel	
Quatrième contrainte	x2	Entier naturel	

Figure 7 – Obtention de la solution du (PLE)

Troisième partie
Ordonnancements complexes avec contraintes

1 Préliminaires : Détermination de la méthode de résolution informatique

1.1 Redondance des équations des contraintes

Nous disposons des deux équations de contraintes suivantes :

$$\sum_{h \in Succ(s)} x_{sh} = n - 1 \tag{1}$$

$$\sum_{k \in Pred(i)} x_{ki} - \sum_{h \in Succ(i)} x_{ih} = 1, \forall i \neq s \tag{2}$$

Montrons que (3) ⇒ (2).

C'est très simple : (3) signifie que pour chaque sommet i, il y a un plus long chemin qui aboutit à i. Mais lorsque l'on s'intéresse au point s, nous savons que chaque plus long chemin pour arriver à chacun des points i possède s pour point de départ, puis nécessairement un arc $s \longrightarrow succ(s)$. Comme il reste $n-1$ tâches en retirant s, cela nous donne l'équation (2) par sommation.

1.2 Trois autres contraintes sur les x^i_{kl}

La première contrainte supplémentaire consiste à affirmer qu'en partant du point de départ, s, il existe un et un seul arc partant de ce point vers l'un de ses successeur et qui appartient au plus long chemin de s vers i.

$$\sum_{h \in Succ(i)} x^i_{sh} = 1 \tag{3}$$

La seconde contrainte permet de caractériser un point qui appartient ou non au plus long chemin. En effet, si un point que l'on note l, appartient au plus long chemin de s vers i, alors il possède un unique prédecesseur et aussi un unique successeur dans ce plus long chemin (ce qui donne $1-1=0$). A l'inverse, si ce point l n'appartient pas au plus long chemin de s vers i, alors il n'a pas de prédecesseur ni de successeur dont les chemins entre eux appartiennent au plus long chemin de s vers i (ce qui donne cette fois $0-0=0$). Il en résulte donc la formule :

$$\sum_{k \in Pred(l)} x^i_{kl} - \sum_{h \in Succ(l)} x^i_{lh} = 0 \tag{4}$$

Enfin, la troisième et dernière contrainte que l'on peut ajouter est facile. En effet, il est clair que pour le plus long chemin allant de s à i, et en notant h un successeur de i, l'arc (i,h) ne peut pas appartenir à ce plus long chemin. On a ici $\sum_{h \in Succ(i)} x^i_{ih} = 0$. Il y a par ailleurs un et un seul prédécesseur de i noté k tel que le chemin (k,i) appartienne au plus long chemin de s à i d'où $\sum_{k \in Pred(i)} x^i_{ki} = 1$. Il en résulte la contrainte suivante :

$$\sum_{k \in Pred(i)} x^i_{ki} - \sum_{h \in Succ(i)} x^i_{ih} = 1 \tag{5}$$

Le fait que $x_{k,l}$ résulte de l'équation (11) de l'énoncé vient de ce que l'objectif revient à maximiser chacun des plus long chemin individuellement en tenant compte de la contrainte (3) qui rappelons-le conduit à (2). Il en résulte bien que exactement $n-1$ variables $x_{k,l}$ seront non nulles. Le fait qu'il n'y ait qu'une contrainte dans l'énoncé est simplement le résultat des démonstrations précédentes : l'équation numéroté (3) ici entraîne toutes les autres.

2 Question 1 : Ordonnancement simple, application de la méthode Potentiel-Tâche

Déterminons d'abord pour chacunes des tâches, leurs prédécesseurs et successeurs.

Tâche	Prédécesseurs	Successeurs
A	$\emptyset$	B, C
B	A	E, F
C	A	D, E
D	C	G
E	B, C	G, H
F	B	H
G	E, D	I
H	E, F	I
I	G, H	$\emptyset$

(6)

Nous pouvons alors résumer toutes les infomations du tableau de l'énoncé dans un schéma.

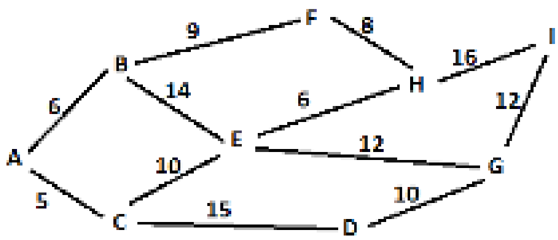

FIGURE 1 – Schéma de la méthode Potentiel-Tâche

2.1 Résolution manuelle

Nous appliquons maitenant l'algorithme de Bellman pour la résolution de ce problème. Il vient alors pour le calcul des longueurs des plus longs chemins joignants le sommet *Début*=A au sommet i :

$$\begin{aligned}
\Pi(A) &= 0 \\
\Pi(B) &= 6 \\
\Pi(C) &= 5 \\
\Pi(D) &= \Pi(C) + 7 + 8 = 20 \\
\Pi(E) &= Max\left\{\Pi(B) + 6 + 8; \Pi(C) + 8 + 2\right\} = Max\left\{20; 15\right\} = 20 \\
\Pi(F) &= \Pi(B) + 6 + 3 = 15 \\
\Pi(G) &= Max\left\{\Pi(E) + 6 + 6; \Pi(D) + 10\right\} = Max\left\{32; 30\right\} = 32 \\
\Pi(H) &= Max\left\{\Pi(E) + 6; \Pi(F) + 8\right\} = Max\left\{23; 26\right\} = 26 \\
\Pi(I) &= Max\left\{\Pi(G) + 5 + 7; \Pi(H) + 10 + 6\right\} = Max\left\{42; 44\right\} = 44
\end{aligned}$$

La durée minimale du projet est ainsi de 44 jours. Les dates au plus tôt sont données par les Π_i.

Calculons maintenant les longueurs des plus longs chemins joignants le sommet i au sommet *fin=I* :

$$\begin{aligned}
\eta(I) &= 0\\
\eta(H) &= 16\\
\eta(G) &= 12\\
\eta(F) &= \eta(H) + 8 = 24\\
\eta(E) &= Max\,\{\eta(H) + 6; \eta(G) + 12\} = Max\,\{22; 24\} = 24\\
\eta(D) &= \eta(G) + 10 = 22\\
\eta(C) &= Max\,\{\eta(D) + 15; \eta(E) + 10\} = Max\,\{37; 34\} = 37\\
\eta(B) &= Max\,\{\eta(E) + 14; \eta(F) + 9\} = Max\,\{38; 33\} = 26\\
\eta(A) &= Max\,\{\eta(B) + 6; \eta(C) + 5\} = Max\,\{42; 44\} = 44
\end{aligned}$$

Il faut maintenant donner les tâches critiques et la marge des autres tâches.
Nous calculerons $t'_i = t_{Fin} - t_i$.

Tâche	t_i	η_i	t'_i	m_i
A	0	44	0	0
B	6	38	6	0
C	5	37	7	2
D	20	22	22	2
E	20	24	20	0
F	15	24	20	5
G	32	12	32	0
H	26	16	28	2
I	44	0	44	0

Les tâches A, B, E, G et I sont donc critiques.

Dressons un premier tableau enumérant les arcs empruntés lors des différents chemins de A vers un sommet i, puis un second comptant pour chaque arc le nombre de fois où il figure dans un plus long chemin de A vers i.

Chemins	Arcs (i,j) utilisés
(A,B)	(A,B)
(A,C)	(A,C)
(A,D)	(A,C), (C,D)
(A,E)	(A,B), (B,E)
(A,F)	(A,B), (B,F)
(A,G)	(A,B), (B,E), (E,G)
(A,H)	(A,B), (B,E), (E,H)
(A,I)	(A,B), (B,E), (E,G), (G,I)

Arcs	$x_(i,j)$	$d_{i,j} * x_{i,j}$
(A,B)	6	36
(A,C)	2	10
(B,E)	4	56
(B,F)	1	9
(C,D)	1	15
(C,E)	0	0
(D,G)	0	0
(E,G)	2	24
(E,H)	1	6
(F,H)	0	0
(G,I)	1	12
(H,I)	0	0

En vue de la comparaison avec la résolution informatique, le calcul de la somme des $d_{i,j} * x_{i,j}$ donne 168. Passons donc maintenant à la résolution informatique pour comparer les deux méthodes.

2.2 Résolution informatique par le solveur Excel

Nous avons décidé de procéder à la résolution de ce problème simple à l'aide du solveur, d'excel, comme utilisé dans les partie précédentes. En effet, cette méthode de résolution des programmes linéaires nous apparaît très simplificatrice et accessible.

Plaçons dans un premier tableau les arcs existants, ainsi que le coût calculé de chaque arc (noté $d_{i,j}$). Aussi, nous placons une colonne contenant les $x_{i,j}$ pour définir les variables pour le solveur. Enfin dans la dernière colonne nous calculons des produits $d_{i,j} * x_{i,j}$ pour enfin créer un cellule somme de ces produits, définissant ainsi la fonction objectif. L'initialisation et la forme de résolution sont donnés en figure 2 ci-après.

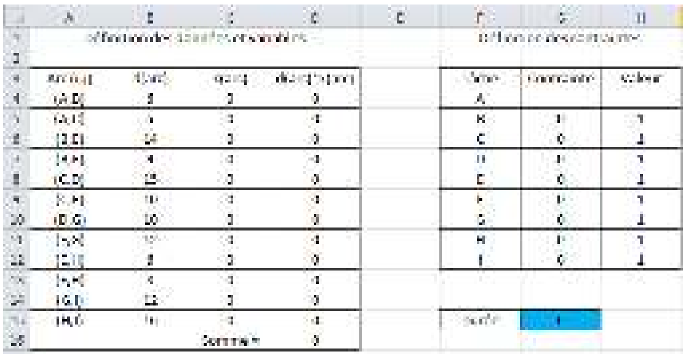

FIGURE 2 – Initialisation de la résolution du programme linéaire

Préparons ensuite le solveur en remplissant les différentes fonctions et contraintes. En figure 3 se trouve le solveur complété.

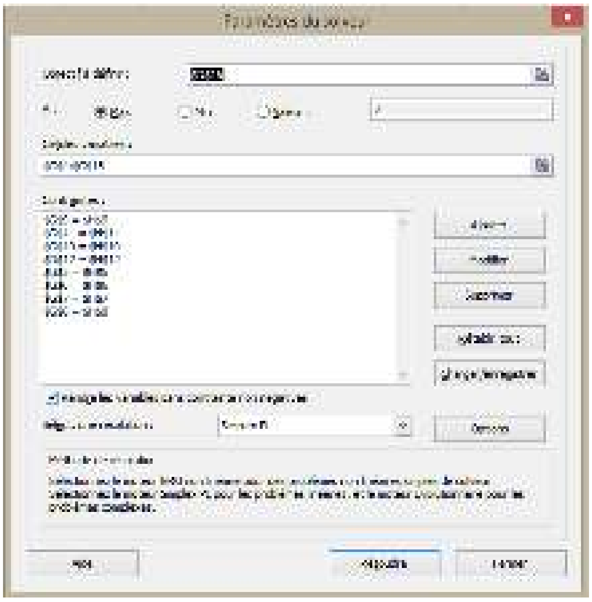

FIGURE 3 – Remplissage du solveur (avec les coordonnées du tableau en figure 2)

Nous lançons maintenant le solveur afin d'obtenir la solution du programme linéaire. Les résultats claculés par excel sont présentés dans la figure 4. Nous constatons alors qu'il y a bien seulement huit arcs dont $x_{k,l}$ est non nul. Par ailleurs, nous pouvons confronter le résultat manuel au résultat informatique.

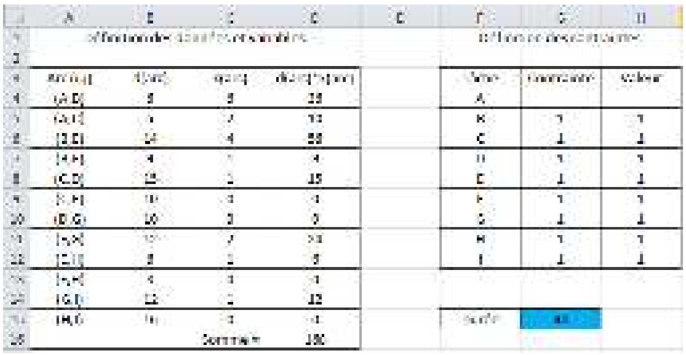

FIGURE 4 – Solution apportées par le solveur

Nous obtenons en effet les mêmes résultats que ceux que nous avoins établis manuellement dans la section précédente. Ce premier problème est donc résolu.

Pour conclure, nous pouvons dresser un schéma semblable à celui de l'énoncé pour synthétiser nos résultats.

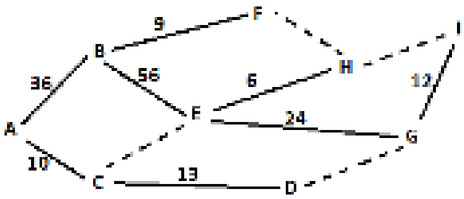

FIGURE 5 – Schéma bilan : On porte les valeurs de $x_{k,l}$ non nulles sur les traits pleins, les autres traits où $x_{k,l}$ est nulle sont en pointillés

Le plus long chemin de A vers I se lit facilement sur ce schéma et permet de déterminer aisément la durée minimale du projet (44 dans notre cas).

3 Question 2 : Tâches incompatibles

3.1 Justification de la différence avec l'ordonnancement simple

Les contraintes d'incompatibilités vont influencer directement en rallongeant la durée du projet. Ainsi, dans la question précédente, nous avons vu qu'il faut 44 jours pour réaliser l'intégralité du projet. Mais pour cela, les tâches B et C pouvaient se dérouler simultanément dès la fin de A moyennant 5 ou 6 jours. Or, en prenant maintenant en compte les incompatibilité de ces deux tâches, on a :

- Si l'on choisit de débuter B après la fin de A, alors la tâche C ne pourra débuter qu'après 12 jours (6 jours après la fin de A pour débuter B plus 6 jours pour effectuer B).
- Si l'on choisit de commencer par C après la fin de A, alors la tâche B ne pourra débuter que 13 jours après le début du projet (5 jours après la fin de A pour débuter C plus 8 jours pour effectuer B).

Clairement, il sera désormais impossible, compte tenu d'autres incompatibilités de tâches, de tenir 44 jours.

3.2 Mise en oeuvre de la séparation et résolution

Les tâches B et C sont incompatibles. Il faut donc séparer deux cas : B est réalisée avant C et C est réalisée avant B. Par ailleurs, D, E et F sont aussi incompatibles. Plusieurs cas sont alors à séparer. Nous retrouverons les possibilités suivantes :

- $D \rightarrow E \rightarrow F$
- $D \rightarrow F \rightarrow E$
- $E \rightarrow D \rightarrow F$
- $E \rightarrow F \rightarrow D$
- $F \rightarrow D \rightarrow E$
- $F \rightarrow E \rightarrow D$

Nous retrouvons donc au total $6 * 2 = 12$ séparations nécessaires à la résolution complète du problème afin de trouver l'enchaînement idéal des tâches i.e. minimisant la durée du projet.

Pour résoudre le problème, il suffit à chaque séparation de rajouter des contraintes. Traitons un exemple dans son intégralité : considérons que B précède C et que les tâches D, E et F s'enchaînent selon $D \rightarrow E \rightarrow F$.

Ainsi, le tableau des contraintes devient le suivant :

Tâche	Durée	Contraintes
A	0	–
B	6	Fin(A)+6
C	8	Fin(A)+5 , Fin(B)
D	10	Fin(C)+7
E	6	Fin(B)+8 , Fin(A)+5 , Fin(D)
F	8	Fin(B)+5 , Fin(D)
G	5	Fin(E)+6 , Fin(D)
H	10	Fin(E) , Fin(F)
I	0	Fin(G)+7 , Fin(H)+6

Le coût du chemin $B \rightarrow C$ est donc de 6 (durée de B), celui de $D \rightarrow E$ est de 10 et celui de $E \rightarrow F$ est de 6.

Nous avons décidé de modifier le tableur afin que les séparations soient moins longues à effectuer. La page 10 de l'annexe montre comment nous avons procédé.

La résolution de ce problème, après modification des contraintes donne le tableur suivant.

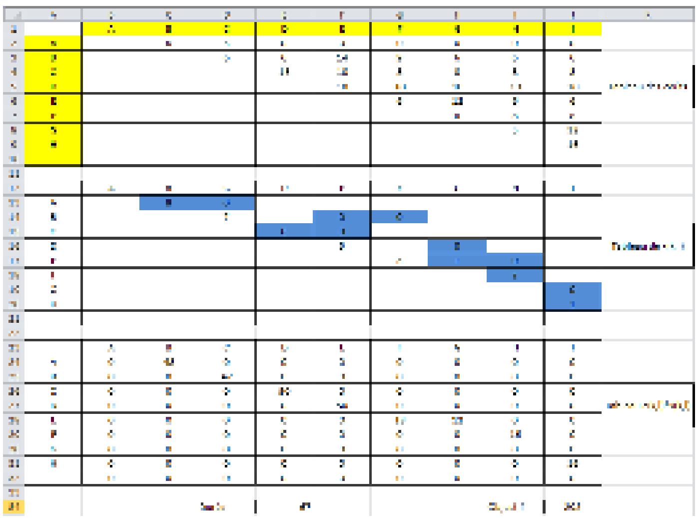

FIGURE 6 – Résultats par PL avec $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow E \rightarrow F$

La durée totale du projet est donc, dans notre cas, de 64 (en effet, pour aller de A à I on réalise successivement A, B, C, D, E, F, H, I).

Après résolution de l'ensemble des séparation, nous trouvons que le scénario minimisant la durée du projet est celle contenant les enchaînements $B \to C$ et $F \to E \to D$. En effet, la durée de ce projet est de 51.

4 Question 3 : Contraintes de moyens

Pour se ramener à la question précédente et procéder à une séparation, il faut identifier les tâches incompatibles.

Les tâches incompatibles sont :

- B et C
- D, E et F

Il n'y a pas d'autres incompatibilités. En effet, il apparaît clair à la vue du schéma en figure 1 de cette partie que, par exemple, même si B et D sont incompatibles, nous ne pourrons réaliser la tâche D sans que D soit achevée. Il en est de même pour toutes les autres incompatibilités que nous pouvons remarquer.

$$\boxed{\textit{La durée du projet est de } 51 \textit{ jours}}$$

Annexes