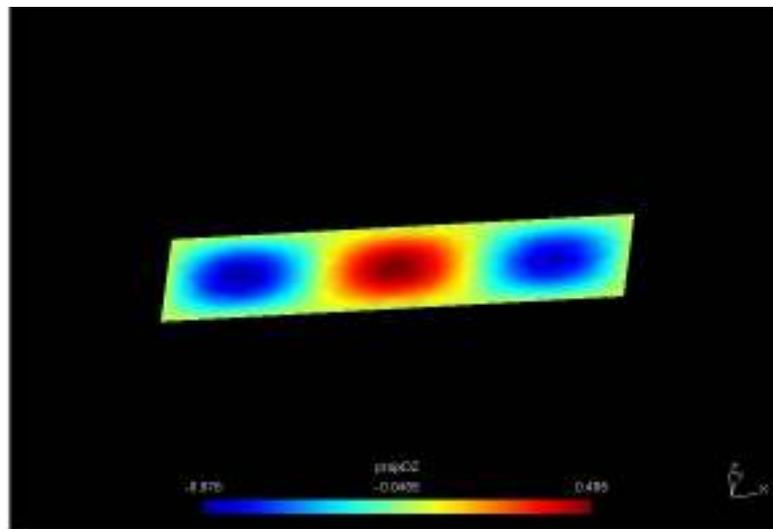


Éléments finis appliqués aux structures

Étude I : Voilement d'une plaque



Ce rapport comporte la rédaction de notre approche théorique, de nos manipulations ainsi que de nos interprétations. En pièce jointe du dossier compressé, vous pourrez trouver le fichier de maillage pour GMSH ainsi que le fichier de commande pour EFFICAS. Nous y avons également joint un fichier .resu et un fichier .pos.

Table des matières

A-	ETUDE THEORIQUE.....	3
B-	MAILLAGE DU MODELE SUR GMSH:.....	7
C-	MODÉLISATION DU VOILEMENT SELON LES DIMENSIONS DE LA PLAQUE.....	9
a-	1 ^{er} cas : c=1 - voile carré	9
b-	2 ^{ème} cas : c=2	10
c-	3 ^{ème} cas : c=3	10
d-	Conclusion :.....	11
D-	INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE SUR LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES :.....	12
a-	1 ^{er} cas : Maille de 0.2	12
b-	2 ^{ème} cas : Maille de 0.7	12
c-	3 ^{ème} cas : Maille de 0.05	13
d-	Conclusion :.....	14
E-	ANNEXE : Fichier de commande EFFICAS.....	16
F-	TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	18

A- ETUDE THEORIQUE

On considère le modèle décrit ci-dessous et on étudie le chargement critique de voilement, en fonction des dimensions L et b de la plaque.

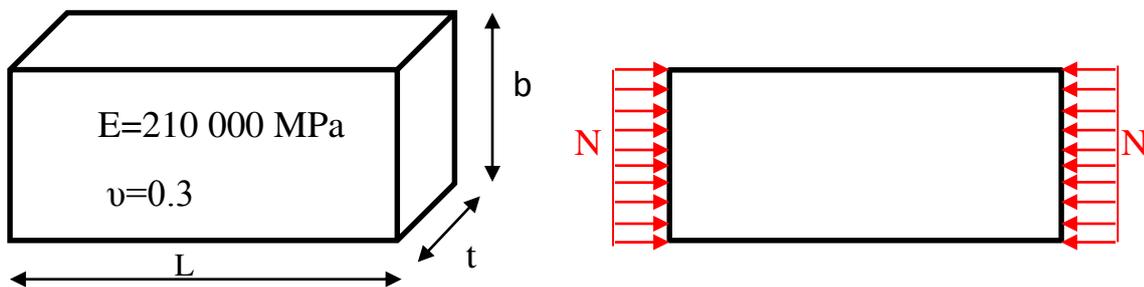


Figure 1: modèle considéré

La plaque reste plane jusqu'à ce que la charge appliquée atteigne une valeur critique, au-delà de laquelle elle flambe avec déplacements latéraux.

L'équation différentielle qui régit le flambement d'une plaque s'écrit comme suit (Brian, 1891).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Avec la rigidité en flexion de la plaque :

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

Et $w(x, y)$ la déformation de la plaque.

La solution générale de cette équation est :

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_i, n_j} \sin\left(\frac{m_i \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_j \pi y}{b}\right) \quad (1.3)$$

$$a_{m_i, n_j} \in \mathbb{R} \text{ et } (m_i, n_j) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

L'écriture et l'égalisation de ΔW , le potentiel interne de la plaque, et de ΔT , le travail des forces extérieures, fournit que l'effort normal critique N_c est la plus faible valeur du rapport :

$$N_c = \min \left\{ \frac{\pi^2 L^2 D \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_i, n_j}^2 \left(\frac{m_i^2}{L^2} + \frac{n_j^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m_i^2 a_{m_i, n_j}^2} \right\} \quad (1.4)$$

On montre que le minimum de ce rapport s'obtient en prenant tous les a_{m_i, n_j} nuls sauf un, d'où :

$$N_c = \min \left\{ \frac{\pi^2 L^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right\} \quad (1.5)$$

On trouve $n=1$ pour avoir le minimum.

Ceci signifie que le voilement de la plaque peut comporter plusieurs demi-ondes dans le sens de la compression mais une seule demi-onde dans le sens perpendiculaire ($n=1$).

D'où :

$$N_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(m \frac{b}{L} + \frac{1}{m} \frac{L}{b} \right)^2 \quad (1.6)$$

Avec m tel que $\left(m \frac{b}{L} + \frac{1}{m} \frac{L}{b} \right)$ soit minimal.

On peut donc étudier la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{a}x + \frac{a}{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ dont la dérivée est

$$f' : x \rightarrow \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} \text{ et qui s'annule pour } x = a, \text{ soit } m = \frac{L}{b}.$$

On peut aussi écrire,

$$N_c = k \left(\frac{L}{b} \right) \frac{\pi^2}{b^2} D \quad (1.7)$$

$$\text{avec } k \left(\frac{L}{b} \right) = \left(m \frac{b}{L} + \frac{1}{m} \frac{L}{b} \right)^2$$

La figure suivante donne la valeur de $k \left(\frac{L}{b} \right)$ en fonction du rapport $\frac{L}{b}$:

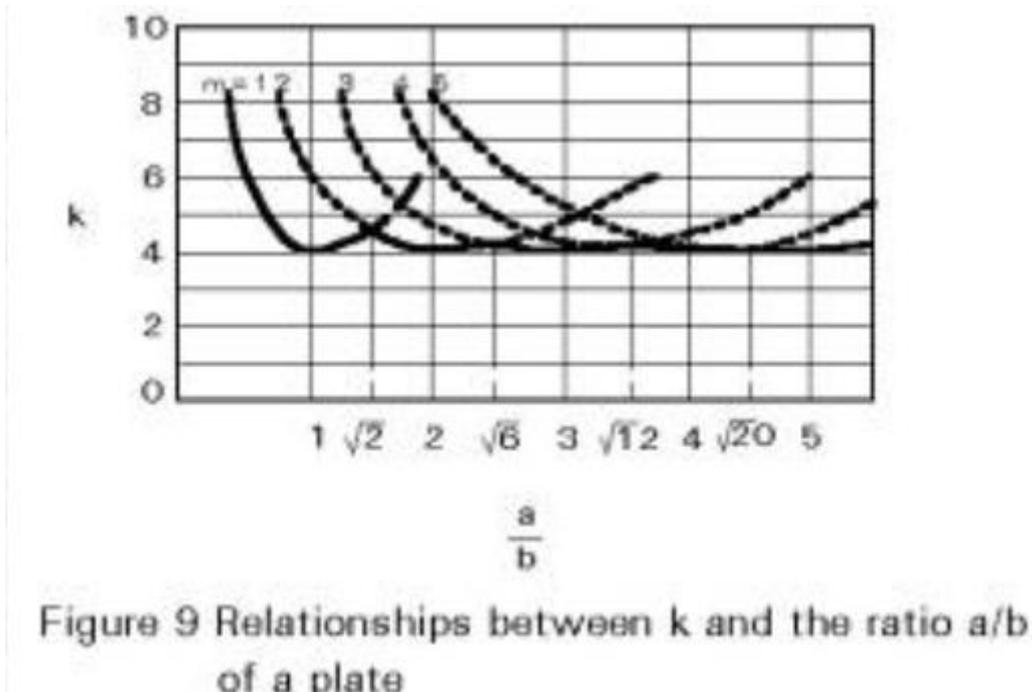


Figure 2: Relations entre k ET le ratio a/b

Si la plaque flambe en une demi-onde, alors on a $m=1$ ($b=L$) et k a comme valeur sa valeur minimale, $k=4$.

De la même manière pour $m=2$, la plaque flambe en deux demi-ondes avec $L=2b$ et k est toujours égal à 4.

Remarque : On choisit un chargement $Q_{aster} = \frac{\pi^2}{b^2} D$ pour la simulation avec code ASTER afin de pouvoir retrouver ou se rapprocher du coefficient 4. Ce chargement apparait comme le plus judicieux car il sera le même pour les différents cas que l'on va étudier et facilite donc nos simulations.

On fixe :

$$\begin{aligned} t &= 0.1 m \\ b &= 2 m \\ c &= \frac{L}{b} \end{aligned} \tag{1.8}$$

On a pris t et b afin de satisfaire la condition de la théorie des plaques :

$$\frac{t}{L} = \frac{t}{c.b} = \frac{0.1}{2.c} = \frac{0.05}{c} < \frac{1}{10} \quad \forall c \in \mathbb{N}^*$$

ABDOULHADI Pierre

RUELLET Constantin

TOQUE Thomas

EFAS

On a donc en théorie selon les différents paramètres c :

c	1	2	3
$B(m)$	2	2	2
$t(m)$	0.1	0.1	0.1
$L(m)$	2	4	6
$N_{c_th} (MN)$	189.8001	189.8001	189.8001
$Q_aster (MN)$	47.45	47.45	47.45

Figure 3: Tableau récapitulatif de la théorie

B- MAILLAGE DU MODELE SUR GMSH:

Pour le code du maillage sur GMSH, nous avons inséré les paramètres t,L,b et p afin de pouvoir étudier plus facilement plusieurs cas. Ainsi on peut faire varier L/b et la précision du maillage p. Par défaut, le logiciel GMSH génère des mailles triangulaires.

```
//Parametre
t=0.1; //epaisseur
L=2; //longeur
b=2; //largeur
p=0.2; //parametre de maillage

//Geometrie
Point(1) = {0.0,0.0,0.0,p};
Point(2) = {L,0.0,0.0,p};
Point(3) = {L,b,0.0,p};
Point(4) = {0,b,0.0,p};

Line(5) = {1,2};
Line(6) = {2,3};
Line(7) = {4,3};
Line(8) = {1,4};

Line Loop(9) = {7,-6,-5,8};
Plane Surface(10) = {9};

//Physical
Physical Line(11) = {5};
Physical Line(12) = {6}; //Force linéique à appliquer
Physical Line(13) = {7};
Physical Line(14) = {8}; //Force linéique à appliquer
Physical surface(15)={10};
```

Figure 4: Script du maillage sur GMSH

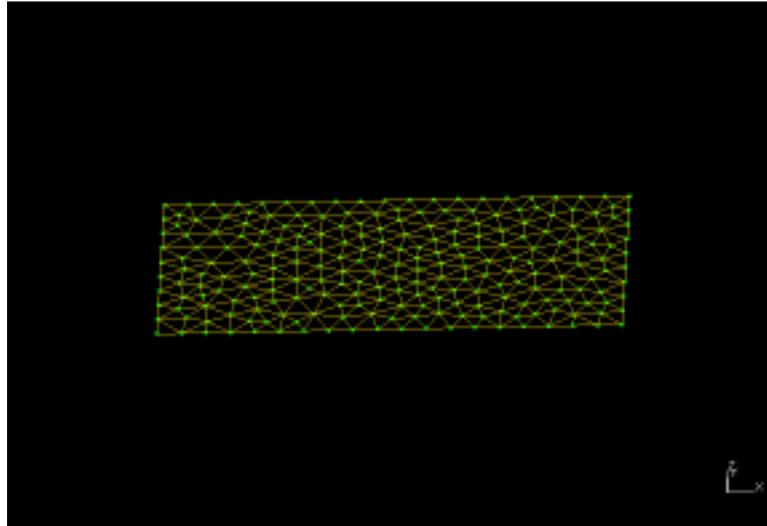


Figure 5 Apercu du maillage pour $L=4$, $b=2$, $p=0,2$.

On peut également améliorer le maillage et prendre un paramètre p plus petit pour affiner.

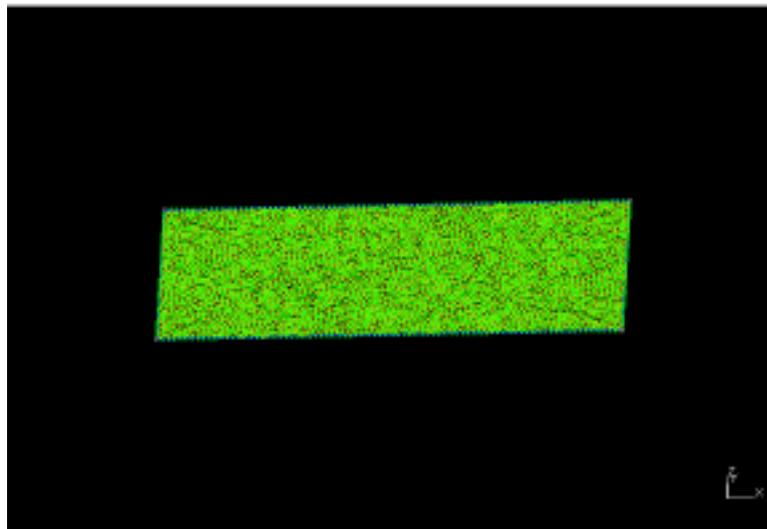


Figure 6: Apercu du maillage pour $L=4$, $b=2$, $p=0,05$.

C- MODÉLISATION DU VOILEMENT SELON LES DIMENSIONS DE LA PLAQUE

Nous avons rédigé le code sur EFICAS, dont le fichier de commande est en annexe. Nous avons donc étudié l'influence du critère c défini plus haut. Le fichier .resu nous retourne la valeur de k , c'est-à-dire le coefficient à appliquer à la charge que l'on a rentré dans la modélisation afin d'obtenir le véritable chargement critique. En toute logique si la théorie n'est pas mauvaise et le fichier de commande correct, on devrait retrouver un **coefficient proche de la valeur 4**.

De plus, la simulation nous retourne un fichier .pos qui nous est possible de lire avec GMSH afin d'observer le flambement du voile.

Il est pertinent de noter que le signe moins que l'on trouve dans le fichier .resu est lié à une convention ASTER.

a- 1^{er} cas : $c=1$ - voile carré

NUMERO_ORDRE	NUME_MODE	CHAR_CRIT	ERREUR
1	1	-3.59588D+00	2.62087D-12

Figure 7: fichier .resu pour $L=b$

On obtient donc un coefficient **k égal à 3.60**, ce qui n'est pas trop éloigné de 4, le résultat est donc cohérent. On a tout de même 10% de différence avec la théorie. De plus l'erreur due au calcul est de l'ordre de 10^{-12} , ce qui est tout à fait tolérable.

On trouve ainsi un chargement critique $N_{cr-simulation-c=1} = 170.62 MN$

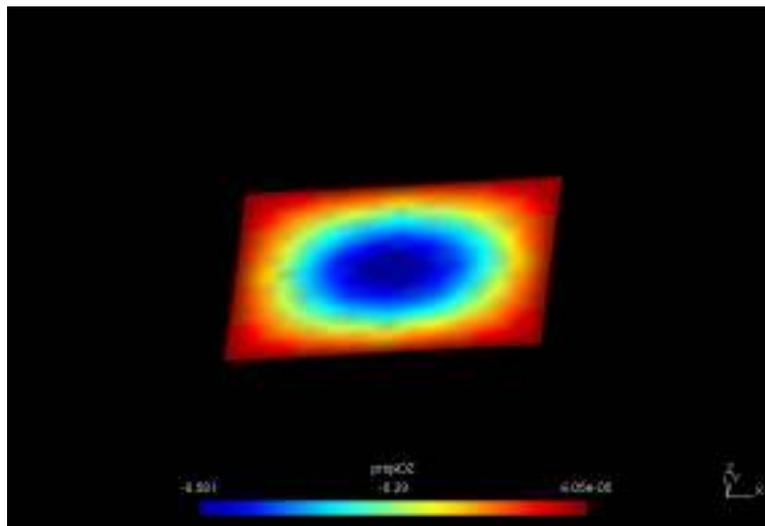


Figure 8: fichier .pos pour $L=b$ sur GMSH

On observe donc comme ce qu'on pouvait imaginer, le flambement de la plaque en **une seule demi-onde**.

b- 2ème cas : c=2

NUMERO_ORDRE	NUME_MODE	CHAR_CRIT	ERREUR
1	1	-3.71724D+00	3.45599D-12

Figure 9: fichier.resu pour L=2b

Le coefficient k est encore plus proche de 4, ce résultat colle un peu plus que le précédent à la théorie. On a cette fois si **7% de différence avec le calcul théorique**. Une fois encore le résultat est acceptable.

$$N_{cr-simulation-c=2} = 176.38MN$$

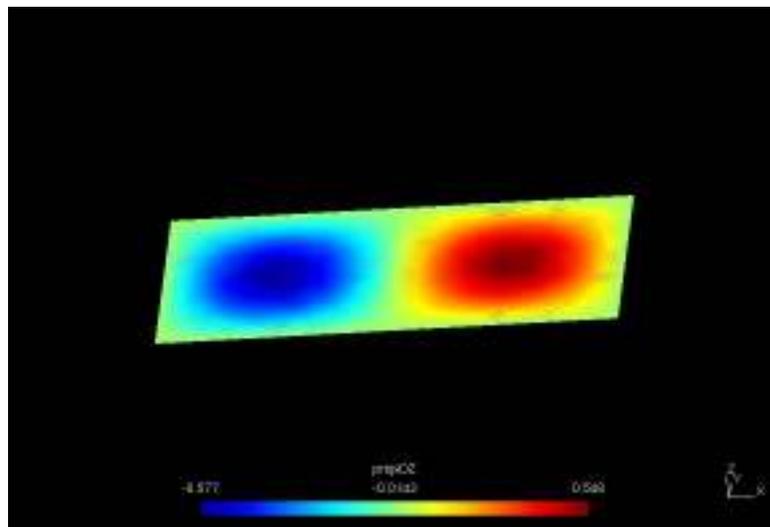


Figure 10: fichier .pos pour L=2b sur GMSH

Cette fois ci on observe un flambement en **2 demi-ondes**. Cela recoupe toujours la théorie que l'on a développée au début.

c- 3ème cas : c=3

NUMERO_ORDRE	NUME_MODE	CHAR_CRIT	ERREUR
1	1	-3.75555D+00	4.34415D-12

Figure 11: fichier .resu pour L=3b

Pour ce cas-là, on trouve un coefficient k proche à **6%** de la valeur théorique désirée. Le résultat est toujours acceptable.

$$N_{cr-simulation-c=3} = 178.20 \text{ MN}$$

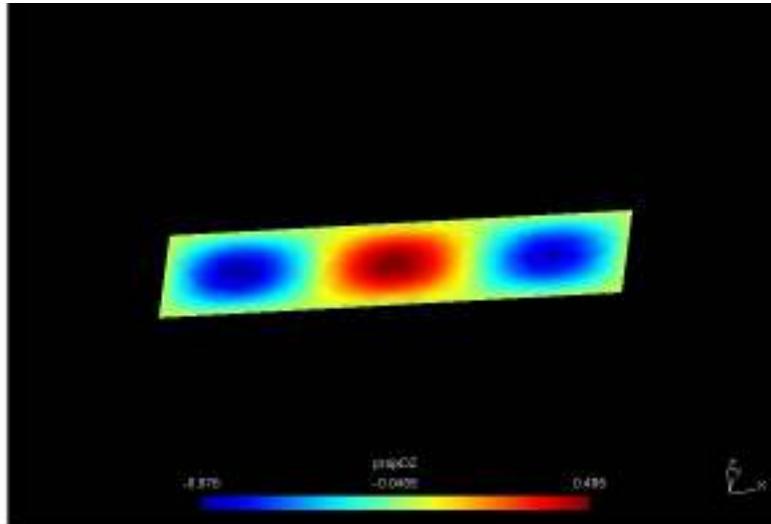


Figure 12: fichier.pos pour L=3b sur GMSH

On observe un flambement un **3 demi-ondes** dans ce cas-là.

d- Conclusion :

Les différents résultats sont répertoriés dans le tableau suivant.

c	1	2	3
B(m)	2	2	2
t(m)	0.1	0.1	0.1
L(m)	2	4	6
N_{c_th} (MN)	189.8001	189.8001	189.8001
Q_aster (MN)	47.45	47.45	47.45
k_{simu}	3.60	3.71	3.75
$N_{cr-simulation}$ (MN)	170.62	176.38	178.20

Figure 13: tableau récapitulatif des résultats obtenus

On remarque donc que la théorie colle très bien avec la simulation. Déjà d'un point de vue numérique, les valeurs trouvées par le CODE ASTER et celles attendues sont assez proches pour être considérées comme acceptables. Mais également d'un point de vue « physique », c'est-à-dire que l'on observe bien les flambements en plusieurs demi-onde selon les cas considérés.

On peut considérer notre modélisation comme appropriée au problème.

Cependant, il nous reste un paramètre que l'on n'a pas fait varier et qui joue un rôle important dans la précision des résultats. Il s'agit du paramètre de maille p, que l'on définit lors du maillage sur GMSH. C'est l'objet de l'étude suivante.

D- INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE SUR LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES :

Nous allons étudier l'influence du maillage sur deux critères : la durée du calcul et sur la précision du résultat.

On considère la plaque du 2ème cas, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}c &= 2 \\b &= 2 \text{ m} \\L &= 4 \text{ m} \\t &= 0.1 \text{ m}\end{aligned} \tag{1.9}$$

a- 1^{er} cas : Maille de 0.2

Pour rappel, il s'agit du cas observé ci-dessus. On observe donc un temps de calcul de **13 secondes** ainsi qu'un coefficient égal à **-3.717**.

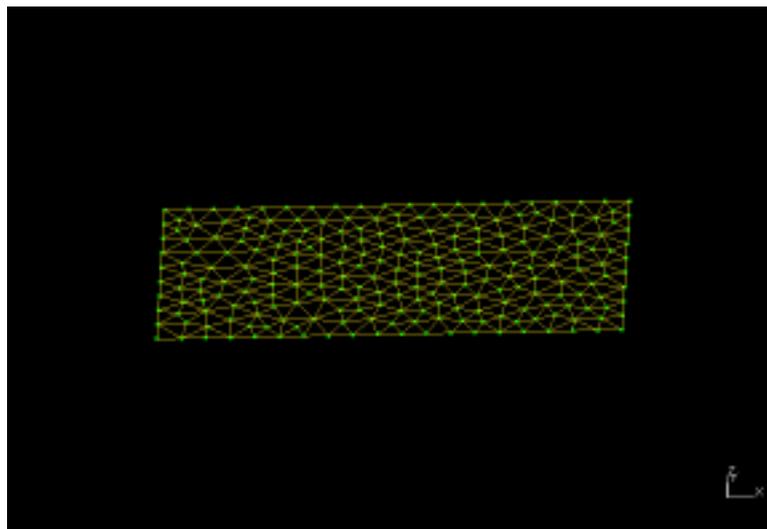


Figure 14: figure 5

b- 2ème cas : Maille de 0.7

On passe cette fois à un maillage plus grossier avec **p=0.7**. On voit sur la figure ci-dessous qu'il y a très peu de maille pour notre cas. C'est pour cette raison que notre calcul ne dure que **6s**. Néanmoins, ce qui est très intéressant est le fait que l'on trouve un coefficient égal à **-4.059** soit très proche de notre valeur théorique !

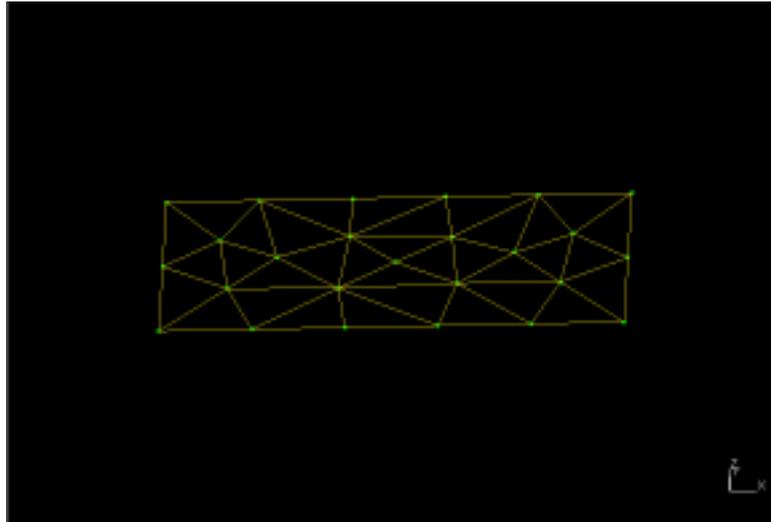


Figure 15: maillage $p=0.7$ $L=4$ et $b=2$

Cependant, le maillage est tellement grossier qu'il est difficile de visualiser quelque chose sur GMSH.

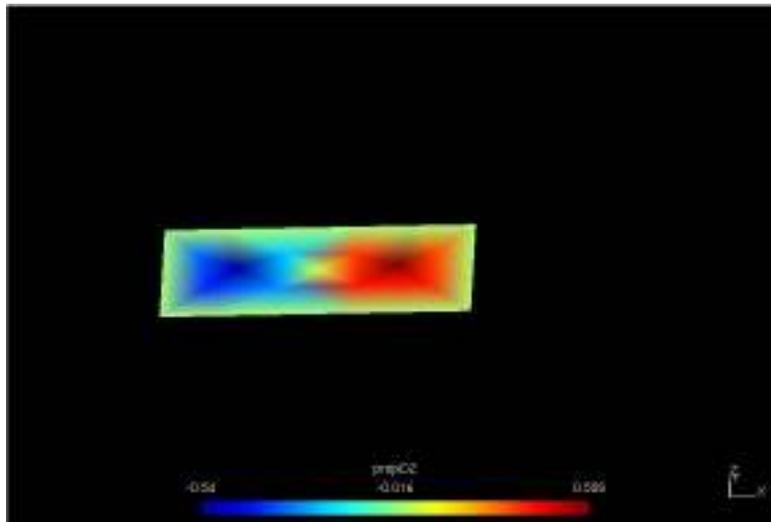


Figure 16: fichier.pos pour $p=0.7$ sur GMSH

On arrive à peine à distinguer les 2 demi-ondes.

c- 3^{ème} cas : Maille de 0.05

On a cette fois un maillage particulièrement fin avec $p=0.05$. Le calcul est donc beaucoup plus long, soit **454 secondes** (à peu près 7 minutes et 30 secondes). Le coefficient que l'on trouve est de **-3.715**, ce qui reste assez proche du maillage intermédiaire que l'on avait dans le premier cas.

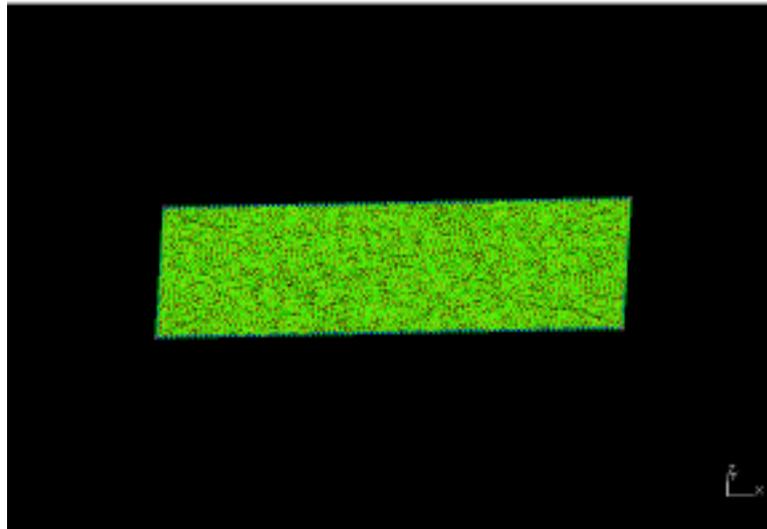


Figure 17: maillage $p=0.05$ $L=4$ et $b=2$

Par contre, au niveau de la visualisation sur GMSH, on obtient quelque chose de très précis où on peut vraiment distinguer les **2 demi-ondes**.

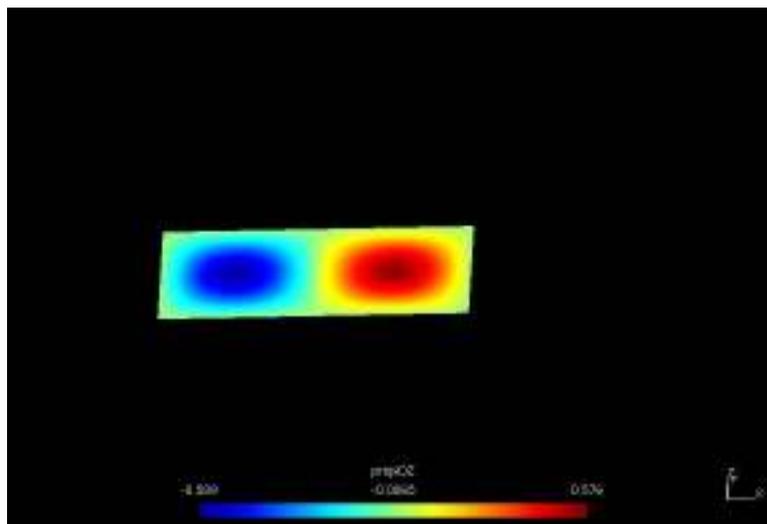


Figure 18: fichier.pos pour $p=0.05$ sur GMSH

d- Conclusion :

Le tableau suivant résume les résultats numériques obtenus :

p	0.05	0.2	0.7
Durée du calcul (s)	454	13	6
Coefficient	-3.715	-3.717	-4.059

Figure 19: tableau récapitulatif des résultats obtenus

La première évidence à laquelle on pouvait s'attendre est que plus le maillage est fin, plus le calcul est long. La seconde est que plus le maillage est fin, plus la valeur du coefficient diminue et semble atteindre une « limite » quand p est plus petit que 0.05. Dans le sens où, pour un maillage 4 fois plus

fin, la valeur du coefficient ne varie que de 10^{-3} . On peut donc considérer que pour un cas simple comme le nôtre un **paramètre de maille de 0.2 est suffisant**.

De plus, le résultat obtenu pour $p=0.7$ nous rappelle que la théorie présentée au début colle très bien avec les modèles grossiers. On peut donc considérer la théorie comme bonne pour les cas simples comme le nôtre, mais que pour des modèles plus complexes elle peut être limitée.

E- ANNEXE : Fichier de commande EFFICAS

```
DEBUT();
PRE_GMSH();
mail4=LIRE_MAILLAGE();
mail2=CREA_MAILLAGE(MAILLAGE=mail4,
LINE_QUAD=_F(TOUT='OUI',
PREF_NOEUD='NA',,));
mail=CREA_MAILLAGE(MAILLAGE=mail2,
MODI_MAILLE=_F(TOUT='OUI',
OPTION='TRIA6_7',
PREF_NOEUD='NF',,));
modele=AFFE_MODELE(MAILLAGE=mail,
AFFE=_F(TOUT='OUI',
PHENOMENE='MECANIQUE',
MODELISATION='COQUE_3D',,));
mater=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=210000000000.0,
NU=0.3,,));
chmat=AFFE_MATERIAU(MAILLAGE=mail,
AFFE=_F(TOUT='OUI',
MATER=mater,,));
caraelem=AFFE_CARA_ELEM(MODELE=modele,
COQUE=_F(GROUP_MA='GM15',
EPAIS=0.1,
ANGL_REP=(0.0,0.0,)),
A_CIS=0.833333,,));
charmeca=AFFE_CHAR_MECA(MODELE=modele,
DDL_IMPO=( _F(GROUP_MA=('GM12'),
DX=0,
DY=0,
DZ=0,)),
_F(GROUP_MA=('GM14'),
DY=0,
DZ=0,)),
_F(GROUP_MA=('GM11','GM13'),
DZ=0,)),
FORCE_ARETE=( _F(GROUP_MA='GM14',
FX=47450000,)),
_F(GROUP_MA='GM12',
FX=-47450000,)),);
resu=MECA_STATIQUE(MODELE=modele,
CHAM_MATER=chmat,
CARA_ELEM=caraelem,
EXCIT=_F(CHARGE=charmeca,,));
champ=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_SIEF_R',
OPERATION='EXTR',
RESULTAT=resu,
```

ABDOULHADI Pierre
 RUELLET Constantin
 TOQUE Thomas

EFAS

```

NOM_CHAM='SIEF_ELGA_DEPL',
TYPE_MAXI='MINI',
TYPE_RESU='VALE',);
matrA=CALC_MATR_ELEM(OPTION='RIGI_MECA',
MODELE=modele,
CHAM_MATER=chmat,
CARA_ELEM=caraelem,
CHARGE=charmeca,);
matrB=CALC_MATR_ELEM(OPTION='RIGI_GEOM',
MODELE=modele,
CARA_ELEM=caraelem,
SIEF_ELGA=champ,);
NUP1=NUME_DDL(MATR_RIGI=matrA,);
ASSE1=ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=matrA,

```

```

NUME_DDL=NUP1,);
ASSE2=ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=matrB,
NUME_DDL=NUP1,);
MOD=MODE_ITER_SIMULT(MATR_A=ASSE1,
MATR_B=ASSE2,
NMAX_ITER_SOREN=5000,
TYPE_RESU='MODE_FLAMB',
CALC_FREQ=_F(OPTION='PLUS_PETITE',
NMAX_FREQ=1,);
VERI_MODE=_F(STOP_ERREUR='OUI',,););
champ2=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='NOEU_DEPL_R',
OPERATION='EXTR',
RESULTAT=MOD,
NOM_CHAM='DEPL',);
champ3=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='NOEU_DEPL_R',
OPERATION='AFFE',
MAILLAGE=mail4,
AFFE=_F(TOUT='OUI',
NOM_CMP=('DZ','DY','DX','DRZ','DRY','DRX',),
VALE=(0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,)););
proj=PROJ_CHAMP(CHAM_NO=champ2,
CHAM_NO_REFE=champ3,);
DEFUFI(IMPRESSION=_F(NOM='ficdepla',
UNITE=55,));
IMPR_RESU(RESU=_F(FORMAT='GMSH',
CHAM_GD=proj,
NOM_CMP='DZ',
FICHIER='ficdepla',)););
IMPR_RESU(RESU=_F(RESULTAT=MOD,
TOUT_CHAM='NON',
TOUT_PARA='OUI',)););
FIN();

```

F- TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1: modèle considéré	3
Figure 2: Relations entre k et le ratio a/b	5
Figure 3: Tableau récapitulatif de la théorie	6
Figure 4: Script du maillage sur GMSH	7
Figure 5 :Aperçu du maillage pour $L=4, b=2, p=0,2$	8
Figure 6: Aperçu du maillage pour $L=4, b=2, p=0,05$	8
Figure 7: fichier .resu pour $L=b$	9
Figure 8: fichier . pos pour $L=b$ sur GMSH.....	9
Figure 9: fichier.resu pour $L=2b$	10
Figure 10: fichier .pos pour $L=2b$ sur GMSH.....	10
Figure 11: fichier .resu pour $L=3b$	10
Figure 12: fichier.pos pour $L=3b$ sur GMSH.....	11
Figure 13: tableau récapitulatif des résultats obtenus.....	11
Figure 14: figure 5	12
Figure 15: maillage $p=0.7$ $L=4$ et $b=2$	13
Figure 16: fichier.pos pour $p=0.7$ sur GMSH	13
Figure 17: maillage $p=0.05$ $L=4$ et $b=2$	14
Figure 18: fichier.pos pour $p=0.05$ sur GMSH	14
Figure 19: tableau récapitulatif des résultats obtenus	14