1. $(ESu'(x))' + f = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ESu'(x) = -fx + A \\ ESu'(L) = F \end{array}\right\} \Rightarrow ESu'(x) = f(L-x) + F$

Avec $u(0) = 0$ l'on a donc

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{ES}\left[f\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + Fx \right]}$$

2. Si $v(0) = 0$ l'on a

$$\int_0^L (ESu')'v\,dx = \left[ESu'v\right]_0^L - \int_0^L ESu'v'dx$$
$$= Fv(L) - \int_0^L ESu'v'dx.$$

$$(P_v)\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_0^L ESu'(x)v'(x)\,dx = \int_0^L f v(x)\,dx + Fv(L) \quad \forall v \in V \end{array}\right.$$

où $V = \{ v \in H^1[0,L],\ v(0) = 0 \}$

3. On a $K^1 = K^2 = K^3 = K^4 = \frac{4ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ainsi que.

$F^1 = F^2 = F^3 = \frac{Lf}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F^4 = \frac{Lf}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$

<u>Assemblage</u> :

$$K = \frac{4ES}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; F = \frac{Lf}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + F\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Résolution</u> :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{L^2 f}{32 ES}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{FL}{4ES}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u_1 = \frac{7}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{FL}{4ES} \; ; \; u_2 = \frac{5}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{FL}{4ES} + u_1 = \frac{12}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{FL}{2ES}$

$u_3 = \frac{3}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{FL}{4ES} + u_2 = \frac{15}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{3FL}{4ES}$

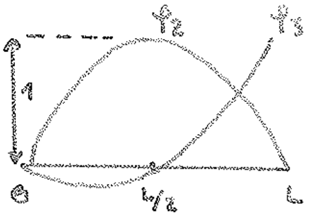
$u_4 = \frac{L^2 f}{32ES} + \frac{FL}{4ES} + u_3 = \frac{16}{32}\frac{L^2 f}{ES} + \frac{FL}{ES}$

4.

x	$u(x)$	$u_h(x)$
$\frac{L}{4}$	$\frac{7}{32}\frac{fL^2}{ES}+\frac{FL}{4ES}$	$\frac{7}{32}\frac{fL^2}{ES}+\frac{FL}{4ES}$
$\frac{L}{2}$	$\frac{3}{8}\frac{fL^2}{ES}+\frac{FL}{2ES}$	$\frac{3}{8}\frac{fL^2}{ES}+\frac{FL}{2ES}$
$\frac{3L}{4}$	$\frac{15}{32}\frac{fL^2}{ES}+\frac{3FL}{4ES}$	$\frac{15}{32}\frac{fL^2}{ES}+\frac{3FL}{4ES}$
L	$\frac{fL^2}{2ES}+\frac{FL}{ES}$	$\frac{fL^2}{2ES}+\frac{FL}{ES}$

On a :
$u_h(x) = u(x)\ \forall x \in \{0, \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}, L\}$

5.



$$\varphi_2(x) = \frac{4}{L^2}x(L-x) \qquad \varphi_2'(x) = \frac{4}{L^2}(L-2x)$$
$$\varphi_3(x) = \frac{1}{L^2}x(2x-L) \qquad \varphi_3'(x) = \frac{1}{L^2}(4x-L)$$

- $\int_0^L \varphi_2'^2(x)\,dx = \frac{16}{L^4}\int_0^L (L-2x)^2 dx = \frac{16}{L^4}\int_0^L (L^2-4Lx+4x^2)\,dx = \frac{16}{L}\left(1-2+\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3L}$

$\int_0^L \varphi_3'^2(x)\,dx = \frac{1}{L^4}\int_0^L (4x-L)^2 dx = \frac{1}{L^4}\int_0^L (L^2-8Lx+16x^2)\,dx = \frac{1}{L}\left(1-4+\frac{16}{3}\right) = \frac{7}{3L}$

$\int_0^L \varphi_2'(x)\varphi_3'(x)\,dx = \frac{4}{L^4}\int_0^L (L-2x)(4x-L)\,dx = \frac{4}{L^4}\int_0^L (-L^2+6Lx-8x^2)\,dx = \frac{4}{L}\left(-1+3-\frac{8}{3}\right) = \frac{-8}{3L}$

- $\int_0^L \varphi_2(x)\,dx = \frac{4}{L^2}\int_0^L x(L-x)\,dx = \frac{4}{L^2}\int_0^L (Lx-x^2)\,dx = 4L\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}L$

$\int_0^L \varphi_3(x)\,dx = \frac{1}{L^2}\int_0^L x(2x-L)\,dx = \frac{1}{L^2}\int_0^L (-Lx+2x^2)\,dx = L\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}L$

Assemblage :

$$K = \frac{ES}{3L}\begin{bmatrix}16 & -8\\ -8 & 7\end{bmatrix},\quad F = \frac{fL}{6}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Résolution

$$\underbrace{\begin{bmatrix}16 & -8\\ -8 & 7\end{bmatrix}}_{M}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \frac{fL^2}{2ES}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + \frac{3FL}{ES}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix}7 & 8\\ 8 & 16\end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix}36\\48\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix}8\\16\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

et l'on a donc $u_1 = \frac{3}{8}\frac{f L^2}{ES} + \frac{FL}{2ES}$ et $u_2 = \frac{f L^2}{2ES} + \frac{FL}{ES}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
u_h(x) &= u_1 \varphi_2(x) + u_2 \varphi_3(x) \\
&= \frac{f L^2}{ES}\left(\frac{3}{8}\varphi_2(x) + \frac{1}{2}\varphi_3(x)\right) + \frac{FL}{ES}\left(\frac{1}{2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x)\right) \\
&= \frac{f}{ES}\left(\frac{3}{2}x(L-x) + \frac{1}{2}x(2x-L)\right) + \frac{F}{LES}\left(2x(L-x) + x(2x-L)\right) \\
&= \frac{f}{ES}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{F}{ES}x \\
&= \frac{1}{ES}\left[f\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + Fx\right]
\end{aligned}
$$

et l'on a donc $u_h(x) = u(x) \quad \forall x \in [0, L]$

Département Génie Civil et Bâtiment

Voie d'approfondissement Génie Civil
Cours de Méthodes Numériques
Examen Final — Mardi 16 décembre 2014
Première partie : Éléments finis
Durée conseillée : 1 heure

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

Une poutre horizontale de longueur L et de section rectangulaire d'aire S, encastrée à son extrémités $x = 0$, est soumise, dans la direction horizontale et sur toute sa longueur, à la densité linéique de forces f indépendante de x, tandis qu'un effort horizontal F est appliqué à son extrémité $x = L$. Le matériau constituant cette poutre est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope et non pesant, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$.

Le déplacement horizontal $u(x)$, $x \in [0, L]$, des sections droites de la poutre est alors solution du problème aux limites à deux points suivant :

$$(P) \begin{cases} (ESu'(x))' + f = 0 & x \in]0, L[\\ u(0) = 0 \\ ESu'(L) = F \end{cases}$$

1. Donner, en fonction de E, S, L, f et F, la solution analytique de (P).
2. Donner la formulation faible (P_v) de (P).
3. Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0, L]$ à l'aide de 4 éléments finis linéaires d'égale longueur $L/4$. On donnera l'expression des valeurs nodales $u_h(L/4)$, $u_h(L/2)$, $u_h(3L/4)$ et $u_h(L)$ du déplacement en fonction de E, S, L, f et F.
4. Comparer les valeurs approchées $u_h(x)$ du déplacement obtenues à la question précédente avec la solution analytique $u(x)$ de la première question. Conclusion ?
5. Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0, L]$ à l'aide d'un unique élément de Lagrange de degré 2. Le résultat obtenu était il prévisible ?