Département Génie Civil et Bâtiment

Voie d'approfondissement Génie Civil
Cours de Méthodes Numériques
Examen Final — Mardi 16 décembre 2014
Première partie : Éléments finis
Durée conseillée : 1 heure

Remarques préliminaires : *Chacune des trois parties de l'examen doit faire l'objet d'une rédaction séparée. Toute partie de l'examen non traitée se traduira par la remise d'une copie blanche précisant l'intitulé de cette partie.*

Une poutre horizontale de longueur L et de section rectangulaire d'aire S, encastrée à son extrémités $x = 0$, est soumise, dans la direction horizontale et sur toute sa longueur, à la densité linéique de forces f indépendante de x, tandis qu'un effort horizontal F est appliqué à son extrémité $x = L$. Le matériau constituant cette poutre est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope et non pesant, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$.

Le déplacement horizontal $u(x)$, $x \in [0, L]$, des sections droites de la poutre est alors solution du problème aux limites à deux points suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} (ESu'(x))' + f = 0 & x \in]0, L[\\ u(0) = 0 & \\ ESu'(L) = F & \end{array} \right.$$

1. Donner, en fonction de E, S, L, f et F, la solution analytique de (P).
2. Donner la formulation faible (P_v) de (P).
3. Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0, L]$ à l'aide de 4 éléments finis linéaires d'égale longueur $L/4$. On donnera l'expression des valeurs nodales $u_h(L/4)$, $u_h(L/2)$, $u_h(3L/4)$ et $u_h(L)$ du déplacement en fonction de E, S, L, f et F.
4. Comparer les valeurs approchées $u_h(x)$ du déplacement obtenues à la question précédente avec la solution analytique $u(x)$ de la première question. Conclusion ?
5. Résoudre (P_v) en discrétisant l'intervalle $[0, L]$ à l'aide d'un unique élément de Lagrange de degré 2. Le résultat obtenu était il prévisible ?

~~Thomas Patrick~~

Lucas Pelapnat

Mardi 16 Decembre 2014

Méthode numerique

(1)

20/20

$$(P)\begin{cases}(ES\,u'(x))'+f=0 & x\in]0,L[\\ u(0)=0\\ ES\,u'(L)=F\end{cases}$$

1) Solution analytique de (P) en fonction de E, S, L, f et F

On suppose que E, S, L et F sont constants et non nuls, il vient que (P) est equivalant au problème suivant

$$(P)\begin{cases}u''(x)=-\dfrac{f}{ES} & x\in]0,L[\\ u(0)=0\\ u'(L)=\dfrac{F}{ES}\end{cases}$$

il vient que $u'(x)=-\dfrac{f}{ES}x+u_0'$

avec $u'(L)=\dfrac{F}{ES} \Rightarrow u'(L)=-\dfrac{fL}{ES}+u_0'=\dfrac{F}{ES}$

donc $u_0'=\dfrac{1}{ES}(fL+F)$

$$u'(x) = \frac{1}{ES}\left(-bx + bL + F\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{ES}\left[-\frac{1}{2} b x^2 + (bL+F)x\right] + u_0$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u_0 = 0$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{ES}\left[-\frac{1}{2} b x^2 + (bL+F)x\right]}$$

2

2) Soit $x \in]0,L[$ si u solution de (P)

$$u''(x) = -\frac{b}{ES}$$

d'où $u''(x)\,v(x) = -\frac{b}{ES} v(x)$ $\forall v \in V$ et $\forall x \in]0,L[$ où

$$V = \{ v \in H^1([0,L]) \mid v(0) = 0 \}$$

en integrant sur $[0,L]$ on obtient

$$\int_0^L u'' v(x)\,dx = -\int_0^L \frac{b}{ES} v(x)\,dx \quad \forall v \in V$$

une intégration par partie donne

$$\left[v u'\right]_0^L - \int_0^L u'v' = -\int_0^L \frac{b}{ES} v(x)\,dx$$

avec $v(0) = 0$ il vient que

$$\int_0^L u'v' = \int_0^L \frac{b}{ES} v(x)\,dx + u'(L)\,v(L)$$

La formulation faible est donc (3)

$$(P_V) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_0^L u'v' = \int_0^L \frac{b}{ES} v + \frac{F}{ES} v(L) \\ \qquad \forall v \in V \end{cases}$$

On posant $a(u,v) = \displaystyle\int_0^L u'v'$

et $l(v) = \displaystyle\int_0^L \frac{b}{ES} v(x)\,dx + \frac{F}{ES} v(L)$

Il est clair que a est forme bilinéaire symétrique et que l est une forme linéaire

On a donc

$$(P_V) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

4

3) Comme $a(\cdot,\cdot)$ est linéaire également par rapport à sa première variable résoudre (P_V) équivaut à résoudre le système $KU = F$ où respectivement K et F sont une matrice et un vecteur que l'on définira ultérieurement

Notons Ω^e $e \in \{1, \ldots, 4\}$ les géométries élémentaires et ℓ_k^e $k \in \{1, 2\}$ les degrés de libertés qui correspondent aux evaluations aux noeuds. Determinons alors les fonctions φ_k^e pour que la propriété d'unisolvance soit verifiée, c'est a dire tel que $l_k^e(\varphi_j^e) = \delta_{kj}$

On a

$$\varphi_1^1 = \frac{L/4 - x}{L/4} \mathbb{1}[0, \frac{L}{4}] \quad \text{et} \quad \varphi_1^{1'} = -\frac{4}{L} \mathbb{1}[0, \frac{L}{4}]$$

$$\varphi_2^1 = \frac{x}{L/4} \mathbb{1}[0, \frac{L}{4}] \quad \text{et} \quad \varphi_2^{1'} = \frac{4}{L} \mathbb{1}[0; \frac{L}{4}]$$

$$\varphi_2^2 = \frac{x - L/4}{L/4} \mathbb{1}[\frac{L}{4}; \frac{L}{2}] \quad \text{et} \quad \varphi_1^{2'} = \frac{4}{L} \mathbb{1}[\frac{L}{4}\ \frac{L}{2}]$$

$$\varphi_1^2 = \frac{L/2 - x}{L/4} \mathbb{1}[\frac{L}{4}; \frac{L}{2}]$$

$$\varphi_1^3 = \frac{(3/4)L - x}{L/4} \mathbb{1}[\frac{L}{2}; \frac{3L}{4}]$$

$$\varphi_2^3 = \frac{x - L/2}{L/4} \mathbb{1}[\frac{L}{2}; \frac{3L}{4}]$$

$$\varphi_1^4 = \frac{L - x}{L/4} \mathbb{1}[\frac{3L}{4}; L]$$

$$\varphi_2^4 = \frac{x - (3/4)L}{L/4} \mathbb{1}[\frac{3L}{4}; L]$$

La matrice de connectivité est

\ e	1	2	3	4
1	–	1	2	3
2	1	2	3	4

Thomas

Déterminons les matrices élémentaires

On a $K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$K_{11}^1 = a(\varphi_1^1, \varphi_1^1) = \int_0^{L/4} \left(\frac{4}{L}\right)^2 = \frac{4}{L}$

$K_{22}^1 = K_{11}^1 = \frac{4}{L}$

$K_{12}^1 = a(\varphi_1^1, \varphi_2^1) = \int_0^{L/4} -\frac{4}{L} \times \frac{4}{L} = -\frac{4}{L}$

on a $K^1 = K^2 = K^3$ et la matrice globale K est

$$K = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$F^e = \begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{pmatrix}$ et $F_i^e = l(\varphi_i^e)$

$F_2^1 = \int_0^{L/4} \frac{b}{ES} \frac{4}{L} x \, dx = \frac{bL}{8ES}$

$F_1^1 = \int_0^{L/4} (L/4 - x) \frac{b}{ES} = \frac{bL}{8ES}$

On a $F^1 = F^2 = F^3$ et $F_1^4 = F_1^1$

aussi

$$F_2^4 = \int_0^L \varphi_2^4 \frac{f}{ES} dx + \frac{F}{ES} \varphi_2^4(L) =$$

$$\frac{fL}{8ES} + \frac{F}{ES}$$

D'après la table de connectivité :

$$F = \frac{1}{ES} \begin{bmatrix} \frac{fL}{4} \\ \frac{fL}{4} \\ \frac{fL}{4} \\ \frac{fL}{8} + F \end{bmatrix}$$

Résoudre (P_h) équivaut donc à résoudre

$$\frac{4}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{ES} \begin{bmatrix} fL/4 \\ fL/4 \\ fL/4 \\ fL/8 + F \end{bmatrix}$$

On trouve

$$U_1 = U_4(L/4) = \frac{7fL^2}{32ES} + \frac{FL}{4ES}$$

$$U_2 = U_4(L/2) = \frac{3}{8}\frac{fL^2}{ES} + \frac{FL}{2ES}$$

$$U_3 = U_4\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{15fL^2}{32ES} + \frac{3FL}{4ES}$$

(7)

$$u_4 = u_h(L) = \frac{bL^2}{2ES} + \frac{FL}{ES}$$

4) avec $u(x) = \frac{1}{ES}\left[-\frac{1}{2}bx^2 + (bL+F)x\right]$

$$u(L/4) = \frac{1}{ES}\left(-\frac{1}{2}b\frac{L^2}{16} + b\frac{L^2}{4} + \frac{FL}{4}\right)$$

$$u(L/4) = \frac{7}{32ES}bL^2 + \frac{FL}{4ES} = u_h(L/4)$$

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{ES}\left(-\frac{1}{2}b\frac{L^2}{4} + \frac{bL^2}{2} + \frac{FL}{2}\right) =$$

$$\frac{3bL^2}{8ES} + \frac{FL}{2ES} = u_h\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$u\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{ES}\left(-\frac{1}{2}b\frac{9L^2}{16} + b\times\frac{3L^2}{4} + \frac{F3L}{4}\right)$$

$$= \frac{15bL^2}{32ES} + \frac{3FL}{4ES} = u_h\left(\frac{3L}{4}\right)$$

$$u(L) = \frac{1}{ES}\left(-\frac{1}{2}bL^2 + (bL^2 + FL)\right) =$$

8 $$= \frac{bL^2}{2ES} + \frac{F}{ES} = u_h(L)$$

<u>Conclusion</u> u et u_h coïncident aux

2 noeuds mais ne sont pas identiques sur $[0,L]$ car u est polynomiale de degré 2 et u_h est affine par morceau sur $[0,L]$

5) Considérons donc les 3 degrés de libertés suivant

(8)

$q_1(v) = v(0)$

$q_2(v) = v(L/2)$

$q_3(v) = v(L)$

Les fonctions polynomiales φ_1, φ_2, φ_3 qui vérifient les propriétés d'unisolvance sont telles que

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1 \\ \varphi_1\left(\tfrac{L}{2}\right) &= 0 \\ \varphi_1(L) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1 \notin V$$

$\varphi_2(0) = 0$

$\varphi_2\left(\frac{L}{2}\right) = 1$ d'où $\varphi_2 \in V$ et $\varphi_2(x) = \frac{-4}{L^2} x(x-L)$

$\varphi_2(L) = 0$ $\qquad \varphi_2' = \frac{-4(2x-L)}{L^2}$

$\varphi_3(0) = 0$

$\varphi_3\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ $\qquad \varphi_3 \in V \quad \varphi_3(x) = \frac{2}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)x$

$\varphi_3(L) = 1$ $\qquad \varphi_3' = \frac{4x-L}{L^2}$

$$F_2 = \int_0^L \frac{b}{ES}\left[-\frac{4}{L^2} x(x-L)\right] dx = \frac{2}{3}\frac{bL}{ES}$$

$$F_3 = \int_0^L \frac{b}{ES} \cdot \frac{2}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right) x \, dx + \frac{F}{ES} = \frac{bL}{6ES} + \frac{F}{ES}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{bL}{ES} \\ \frac{bL}{6ES} + \frac{F}{ES} \end{pmatrix}$$

Thomas

$$K_{22} = \int_0^L \frac{16(2x-L)}{L^4} = \frac{16}{3L}$$

$$K_{23} = \int_0^L \frac{-4(2x-L)(4x-L)}{L^4} = -\frac{8}{3L}$$

$$K_{33} = \int_0^L \frac{(4x-L)^2}{L^4} = \frac{7}{3L}$$

$$KU = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{16}{3L} & -\frac{8}{3L} \\ -\frac{8}{3L} & \frac{7}{3L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{bL}{ES} \\ \frac{bL}{6ES} + \frac{F}{ES} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \frac{3}{8}\frac{bL^2}{ES} + \frac{1}{24}\frac{FL}{ES} = U_h(L/2)$$

$$U_2 = \left[\frac{bL^2}{2ES} + \frac{FL}{ES}\right] = U_h(L)$$

$$U = U_1 \varphi_2 + U_2 \varphi_3$$

U étant polynomiale de degré 2 on a $U \in Vect(\varphi_2, \varphi_3)$ donc la solution exacte est identique à celle de (P_N)

4