Pelap mat

Comportement des Matériaux (DS 1h30)

NB : on utilisera les conventions de la mécanique des sols (contraction, compression et diminution de volume positives)

On considère une expérience sur un échantillon parallélépipède rectangle ($l_1*l_2*l_3$) de matériau élastique linéaire isotrope (module « E » et coefficient de Poisson « ν ») (cf figure 1) qui est libre de se déformer latéralement (cf figure 2). Un écrasement avec une force F est appliqué sur la face supérieure par l'intermédiaire d'une plaque infiniment rigide (cf figure 2). Cette plaque est également soumise à une force « T » dans la direction 2 (cf figure 2).

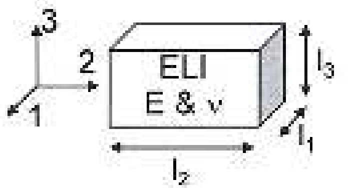


Figure 1: échantillon considéré

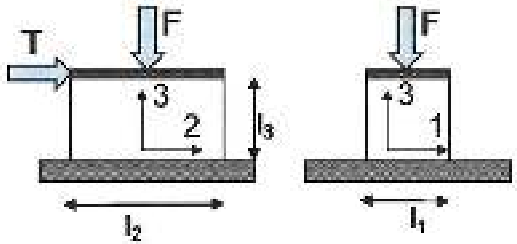


Figure 2: essai réalisé

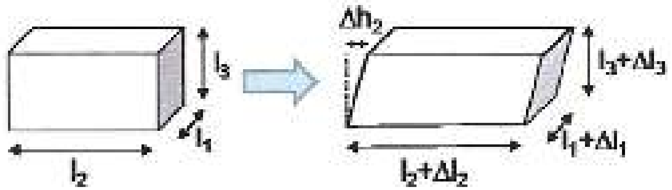


Figure 3: forme prise par l'échantillon (qui reste homogène)

Les forces de gravité sont négligeables. Lors de cet essai on mesure les forces « F » et « T » et les petites variations de longueur « Δl_1, Δl_2 et Δl_3 » ainsi que le petit déplacement de la plaque supérieure « Δh_2 » (cf figure 3).

1) Exprimer, en fonction des valeurs mesurées, les composantes des tenseurs de contraintes « $\underline{\sigma}$ » et de déformations « $\underline{\varepsilon}$ » au sein de l'échantillon qui se déforme de manière homogène (cf figure 3). **Donner uniquement les expressions littérales.**

2) Ecrire la loi de comportement élastique linéaire isotrope avec les paramètres : coefficient de Poisson « ν » et module d'Young « E ». En déduire les valeurs de ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{23}, ε_{13}, ε_{12} en fonction de E, ν, σ_{33} et σ_{23}. En déduire les relations entre Δl_1 et Δl_3. **Donner uniquement les expressions littérales.**

3) La taille de l'échantillon est telle que $l_2 = 2l_1 = 20$cm et $l_3 = 40$cm. Les courbes obtenues sont tracées figure 4. Quelles sont les valeurs du coefficient de Poisson « ν » et du module d'Young « E » ?

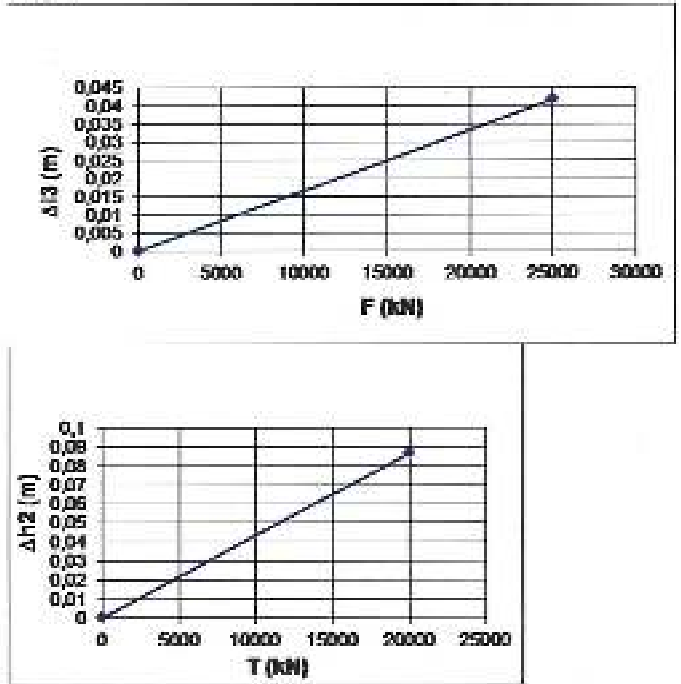


Figure 4: courbes expérimentales obtenues pour le matériau élastique linéaire isotrope

4) En fait le matériau est élastique parfaitement plastique et respect le critère de Von Mises d'équation : $f = (I2sig)^{0.5} - K = 0$
Où I2sig est un invariant de contrainte : $I2sig = trace(\underline{s}^2)$ avec $\underline{s} = \underline{\sigma} - 1/3\ trace(\underline{\sigma})\underline{1}$
La rupture à lieu pour F=0 et T_R= 25456 kN
Quelle est la valeur du paramètre K ?
Quelle serait la valeur de la force de rupture F_R si T=0 ?

5) On suppose que le matériau est standard (f=g). Quelle relation existe-il en rupture plastique entre $d\varepsilon_{33}$ et $d\varepsilon_{11}$, d'une part et entre $d\varepsilon_{33}$ et $d\varepsilon_{11}$, d'autre part, si T=0 et F=F_R de valeur positive? (d indique une « petite » variation)

6) tracer les courbes obtenues dans les axes $\sigma_{33} - \varepsilon_{33}$ et $\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}$ lorsque l'on applique une sollicitation avec T=0 et F augmentant de 0 jusqu'à la rupture plastique et après que la rupture plastique ait eu lieu.

Lucas Pelaprat

Carnet (1)
Jean Claude
Test CM
09/12/14

20/20 TB

Test de Comportement des Matériaux

Question 1

On a une compression dans la direction 3 et un cisaillement dans le plan 2-3

On déduit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T/l_2 l_3 \\ 0 & T/l_2 l_3 & F/l_2 l_3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ car libre de contraintes selon les direction 1 et 2

$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ car pas de cisaillement selon ces plans

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta l_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta l_2}{l_2} & \frac{\Delta h_2}{2 l_3} \\ 0 & \frac{\Delta h_2}{2 l_3} & \frac{\Delta l_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{23} = \frac{\Delta h_2}{2 l_3}$ car il s'agit de la demi distorsion

Il n'y a pas de distorsion selon les autres plans donc $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0$

Question 2

Loi de comportement élastique linéaire isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} tr(\underline{\underline{\sigma}})\delta_{ij}$$

$$- \quad \varepsilon_{11} = \frac{-\nu}{E}\sigma_{33} \quad (1)$$

$$- \quad \varepsilon_{22} = \frac{-\nu}{E}\sigma_{33} \quad (2)$$

- $\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}$ (3)

- $\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$ (4)

On déduit de (1) et (2) que $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$

D'où $\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} \Rightarrow \boxed{\Delta l_1 = \Delta l_2 \times \frac{l_1}{l_2}}$

4/4

Question 3

$l_2 = 2l_1 = 20cm$ et $l_3 = 40cm$

- D'après (3), $\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}$

Soit $\frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{F}{l_1 l_2 E} \Rightarrow E = \frac{l_3}{l_1 l_2} \times \frac{F}{\Delta l_3}$

Pour connaître $F/\Delta l_3$, il suffit de prendre l'inverse de la pente du graphique (On prend comme point $F = 25\,000$ kN pour $\Delta l_3 = 0,042$m

A.N : $E = 11,90$ GPa

- D'après (4), $\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$

Soit $\frac{\Delta h_3}{2l_3} = \frac{1+\nu}{E}\frac{T}{l_1 l_2} \Rightarrow \nu = \frac{E l_1 l_2}{2 l_3} \times \frac{\Delta h_3}{T} - 1$

Pour connaître $\frac{\Delta h_3}{T}$, il suffit de prendre la ~~inverse~~ pente du 2ème graphique (On prend comme point $T = 20\,000$ kN pour $\Delta h_3 = 0,088$ m)

A.N : $\nu = 0,310$

3/3

Question 4

* $II_{s,\sigma} = Tr(\underline{s}^2)$ avec $\underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\underline{\sigma})\underline{I}$

La rupture a lieu pour $F = 0$ d'où $\sigma_{33} = 0$ et donc $tr(\underline{\sigma}) = 0 \Rightarrow \underline{s} = \underline{\sigma}$

D'où $\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_R/P_1P_2 \\ 0 & T_R/P_1P_2 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (T_R/P_1P_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (T_R/P_1P_2)^2 \end{pmatrix}$

On déduit $II_{s,\sigma} = 2\dfrac{T_R^2}{P_1^2 P_2^2}$

À la rupture, $\sqrt{II_{s,\sigma}} = K \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{2}\dfrac{T_R}{P_1P_2}}$

A.N $K = 1,8 \text{ GPa}$

* Si on suppose que $T = 0$, cette fois-ci, $tr(\underline{\sigma}) = \sigma_{33} = \dfrac{F}{P_1P_2}$

D'où $\underline{s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{F}{P_1P_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\frac{F}{P_1P_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\frac{F}{P_1P_2} \end{pmatrix}$ puis $\underline{s}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}\frac{F^2}{P_1^2P_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}\frac{F^2}{P_1^2P_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9}\frac{F^2}{P_1^2P_2^2} \end{pmatrix}$

À la rupture, $\sqrt{II_{s,\sigma}} = K \Rightarrow \boxed{F_R = K \times \dfrac{\sqrt{3}P_1P_2}{\sqrt{2}}}$

A.N $F_R = 44\,091 \text{ kN}$

3/3

On peut dire que le matériau résiste mieux à la compression qu'au cisaillement

⚠ Le critère de VON-MISES s'écrit normalement $f = \left(\dfrac{II_{s,\sigma}}{2}\right)^{1/2} - K = 0$ ce qui modifierait quelque peu le résultat !

On obtiendrait $K = 1,27 \text{ GPa}$
$F_R = 44\,091 \text{ kN}$

Question 5

Si $T=0$ et $F=F_{R_1}$ on est dans le cas d'une compression simple d'un matériau standard de Von-Mises

On suppose qu'il n'y a pas de phénomène d'écrouissage

On a donc $d\varepsilon_{33} + 2d\varepsilon_{11} = 0$

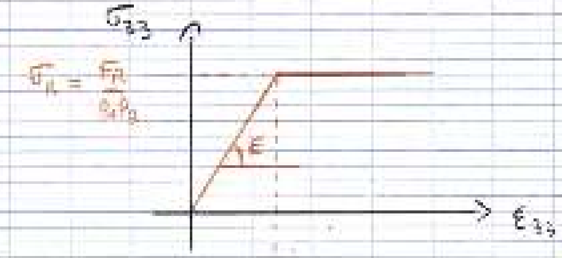
$$\hookrightarrow \quad d\varepsilon_{11} = -\frac{d\varepsilon_{33}}{2}$$

On aura aussi $d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{11}$

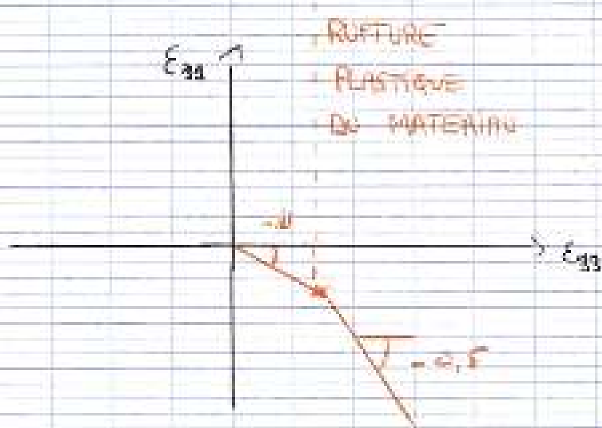
Question 6

On a une compression simple jusqu'à la rupture

La relation (3) reste vraie $\sigma_{33} = E\varepsilon_{33}$



On a une pente E jusqu'à la rupture puis une rupture plastique



La relation (4) et (3) donne $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{33}$ puis à la rupture, on a $d\varepsilon_{11} = -\frac{d\varepsilon_{33}}{2}$