E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Projet de modélisation (1ère année)
Cadre de réalisation et mode d'évaluation

1 Objectifs pédagogiques

Le projet de modélisation vise deux objectifs essentiels. Le premier consiste à mettre en œuvre les connaissances (concepts, modèles, outils, ...) acquises dans les disciplines scientifiques du département "Mathématiques Informatique et Physique" pour proposer des solutions ou des réponses concrètes à un problème réel. Le second objectif est quant à lui de réaliser un travail en situation d'autonomie.

2 Cadre de réalisation

Le projet est réalisé par trinômes[1] et crédité d'un ECTS. Il ne fera l'objet d'aucun encadrement (travail en autonomie). Il devra se traduire par le rendu d'un rapport, au plus tard le 23 mai 2008. Des indications relatives à la rédaction de ce rapport sont données dans la section 3.1. Le projet fera ensuite l'objet d'une soutenance orale le 6 juin 2008. Conséquemment, aucun délai supplémentaire ne sera accordé pour le rendu du rapport. La soutenance n'aura lieu que si le rapport est rendu avant le 23 mai 2008. Les modalités de soutenance sont décrites dans la section 3.2.

3 Mode d'évaluation

Une note entière sur 20, fondée à la fois sur le rapport et sur la soutenance, sera attribuée à chaque élève. La validation du projet de modélisation requiert, comme pour toutes les disciplines de 1ère année, que cette note soit supérieure ou égale à 10. Dans le cas contraire, le projet fera l'objet d'un rattrapage.

3.1 Rapport

Le rapport doit être réalisé à l'aide d'un logiciel de traitement de texte[2] et comporter une dizaine de pages au format A4 (hors annexes), avec un interligne simple et une police de 10 points. Les illustrations graphiques ainsi que les sources des codes informatiques seront regroupées en annexes. Le rapport comportera une présentation du sujet, une description argumentée de la démarche, des méthodes et des outils employés ainsi qu'une analyse commentée et critique des résultats obtenus. Une attention particulière devra être portée à la cohérence de la rédaction. Le projet étant le même pour l'ensemble de la promotion, les rapports présentant des similitudes évidentes ne seront pas acceptés et conduiront à la non validation.

3.2 Soutenance

Les soutenances auront lieu le vendredi 6 juin 2008 au matin. La durée prévue de la soutenance est de 20 minutes, avec au maximum 15 minutes d'exposé et au minimum 5 minutes de discussion avec le jury. Les jurys seront composés de 2 enseignants issus de deux disciplines distinctes du département "Mathématiques Informatique et Physique". Les média utilisés pour l'exposé se limiteront à une dizaine de translucides ou de diapositives.

---

[1] Les trinômes sont ceux constitués pour les travaux pratiques.

[2] Les symboles et les formules mathématiques pourront toutefois être manuscrites, compte tenu de leur nombre et de la lourdeur de solutions logicielles telles que l'éditeur d'équations de Microsoft Word.

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Projet de modélisation ($1^{\text{ère}}$ année)
année scolaire 2007-2008

Problème : transformations finies d'une poutre viscoélastique en traction simple

1. Position du problème

L'objectif du projet est d'étudier et de modéliser les transformations finies et quasistatiques d'une poutre droite de section constante soumise, à partir de l'instant initial $t = 0$, à un essai de traction simple dans la direction horizontale Ox de sa fibre moyenne. Les actions mécaniques à distance ne sont pas prises en compte et l'extrémité gauche de la poutre, d'abscisse $x = 0$, reste fixe.

Le matériau déformable constituant la poutre est homogène et son comportement est régi par la relation :

$$\mathbf{D} \;=\; -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{obj}})\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{obj}} - \frac{\nu}{\eta}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{\eta}\boldsymbol{\sigma}$$

où $\mathbf{D}$ désigne le tenseur des taux de déformation, partie symétrique du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{obj}}$ une dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité du second ordre , $E > 0$ le module d'Young, $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$ le coefficient de Poisson et $\eta \in \{\mathbb{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}\}$ la viscosité. On désignera par $\tau = \frac{\eta}{E}$ le temps de relaxation du matériau.

On traitera le problème pour les trois dérivées objectives suivantes de $\boldsymbol{\sigma}$:

1. Dérivée de Jaumann $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$$

   où $\mathbf{W}$ désigne le tenseur des taux de rotation, partie antisymétrique de $\mathbf{G}$.

2. Dérivée de Truesdell $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{G}.\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}.{}^{\mathrm{t}}\mathbf{G} + \boldsymbol{\sigma}\mathrm{div}_x(\mathbf{v})$$

   où $\mathbf{v}$ est le champ eulérien des vitesses.

3. Dérivée de Cotter-Rivlin $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{G} + {}^{\mathrm{t}}\mathbf{G}.\boldsymbol{\sigma}$$

2. Notations et indications

On désigne par l_0 la longueur initiale de la poutre, par $l(t)$ sa longueur à l'instant $t \geq 0$ et l'on pose $f(t) = \frac{l(t)}{l_0}$. La fonction $t \mapsto f(t),\ t \geq 0$, est continûment dérivable, croissante et telle que $f(0) = 1$. On désigne par s_0 l'aire initiale des sections droites de la poutre et par $s(t)$ leur aire à l'instant t. L'effort de traction appliqué à l'instant t à l'extrémité droite de la poutre, d'abscisse $x = l(t)$, est noté $P(t)$. Cet effort est supposé uniformément réparti dans chaque section droite, si bien que la transformation de la poutre est linéaire. La fonction $t \mapsto P(t),\ t \geq 0$, est continûment dérivable et telle que $P(0) = 0$.

2.1 Comportement hypoélastique : $\eta = +\infty$

Le problème peut être *a priori* abordé de deux façons exclusives l'une de l'autre :

1. L'essai est piloté en force : On se donne $t \mapsto P(t),\ t \geq 0$, continûment dérivable, croissante et telle que $P(0) = 0$.
2. L'essai est piloté en déplacement : On se donne $t \mapsto f(t),\ t \geq 0$, continûment dérivable, croissante et telle que $f(0) = 1$.

On traitera chacune des deux approches, l'objectif étant, dans un cas comme dans l'autre, de trouver les relations liant $P(t)$ et $f(t)$ afin d'obtenir, à chaque instant t, la transformation de la poutre, l'état de déformation et l'état de contrainte relatifs à cet instant. Pour chacune des trois dérivées objectives de $\boldsymbol{\sigma}$ précédemment définies, on représentera graphiquement les variations de ces diverses grandeurs physiques, ainsi que celle de la fonction $f \mapsto P(f)$, dont on aura préalablement prouvé l'existence et l'unicité.

Bien que simple d'un point de vue mécanique, le problème considéré nécessite d'être modélisé avec rigueur sous peine d'aboutir à des aberrations. On prouvera, par exemple, qu'avec la dérivée objective de Jaumann $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ l'effort $P(t)$ est borné dès que $\nu \neq 0$ (ce qui est loin d'être intuitif) et qu'avec la dérivée objective de Cotter-Rivlin $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ cet effort est borné $\forall \nu \in [0, \frac{1}{2}]$. En d'autres termes, pour ces deux dérivées objectives la première approche (essai piloté en force) est mal adaptée.

On analysera l'influence du coefficient de Poisson ν.

2.2 Comportement viscoélastique : $\eta \in]0, +\infty[$

En se limitant à la seconde approche (essai piloté en déplacement), on mettra en œuvre des méthodes numériques adaptées permettant d'obtenir des approximations des différentes grandeurs physiques, et notamment de $P(t)$. On représentera graphiquement les variations de ces grandeurs. On indiquera la précision des approximations obtenues et l'on prendra soin, le cas échéant, de justifier la convergence.