Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
3 Rue Maurice Audin
69 518, Vaulx en Velin cedex, France

Probabilités

Notes de cours et Exercices

Première année

Chapitre 1

Modélisation des phénomènes aléatoires. Espaces probabilisés

1 Introduction

L'objet de la théorie des probabilités est l'analyse mathématique des phénomènes dans lesques intervient le **hasard**. Ce sont les phénomènes aléatoires.
Un phénomène est dit **aléatoire** si, reproduit maintes fois dans des conditions identiques, il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible. Voici quelques exemples.

Expérience	Résultat observable
Lancer d'un dé	Un entier $k \in \{1, ..., 6\}$
Prélèvement de n objets en sortie d'une chaîne de production	Nombre d'objets défectueux dans l'échantillon
Questionnaire à 100 questions	Suite ω de 100 réponses $\omega \in \{oui, non\}^{100}$
Lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile	Un entier $k \in \mathbb{N}$: le temps d'attente du premier succès
Mise en service d'une ampoule	Durée de vie $T \in \mathbb{R}$
Lancer d'une fléchette sur une cible	Point d'impact
Mouvement d'un grain de pollen dans un liquide	Une fonction continue : la trajectoire
Mélange de deux gaz	Répartition spatiale de deux types de molécules

Ces exemples présentent comme point commun des variations liées à la présence de facteurs extérieurs, influant sur le résultat de l'expérience, et que l'on ne sait pas contrôler. Cependant, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. Par exemple si on jette 6000 fois le dé, on s'attend à ce que le nombre d'apparitions de la face 3 soit voisin de 1000. Si on met en service 100 ampoules, leurs durées de vie observées seront concentrées autour d'une certaine valeur moyenne. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces considérations.

2 Langage des probabilités

2.1 Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** $\mathcal{E}$ une expérience qui reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne peut prévoir le résultat par avance.

2.2 Espace des réalisations

On note Ω **l'espace des réalisations** d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (encore appelé univers, espace fondamental ou espace des épreuves). Il représente l'ensemble de toutes les solutions envisagées de l'expérience.

Il est donc fonction de l'idée de modélisation a priori que l'on se fait de l'expérience. Considèrons par exemple l'expérience "lancer d'une pièce de monnaie", deux issues sont habituellement prises en compte "PILE" et "FACE" mais on pourrait en ajouter une troisième correspondant à "TRANCHE".

Exemples Voici quelques exemples d'espace des réalisations pour différentes expériences aléatoires.

1. On lance un dé et on regarde le chiffre de la face obtenue, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. On lance un dé, on regarde si la face obtenue est un chiffre pair ou impair, $\Omega = \{pair, impair\}$
3. On lance deux pièces alors $\Omega = \{(pile, face), (pile, pile), (face, face), (face, pile)\}$
4. Quel est le temps d'attente de Roméo qui attend Juliette qui a promis d'arriver entre minuit et une heure du matin ? $\Omega = [0, 1]$ (au plus 1 heure d'attente).

Remarques :

– L'univers dépend de l'observation qui est faite.
  Considérons par exemple le lancer deux dés alors l'espace des réalisations de l'expérience aléatoire qui regarde la somme des dés est différent de celui de l'expérience aléatoire qui regarde le produit. En effet
  $\Omega_{somme} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et
  $\Omega_{produit} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

– Il existe des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues.
  Exemple : Lors d'un contrôle sanguin, l'ensemble des résultats possibles si l'on s'intéresse

1. au groupe sanguin et au facteur rhésus d'un individu est

$$\Omega = \{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}$$

2. au nombre de globules blancs $\Omega = N^\star$
3. au taux de glycémie $\Omega = [0; 10]$

Ainsi pour une même épreuve, l'univers Ω peut être **fini** (toutes les éventualités sont connues : cas 1) ou **infini** (toutes les éventualités ne sont pas connues : cas 2 et 3). Dans ces deux derniers cas, l'univers peut être dénombrable si on peut numéroter les éventualités connues (cas 2) ou bien continu comme dans le cas du taux de glycémie (cas 3).

2.3 Evènements

On appelle **évènement** (associé à l'expérience $\mathcal{E}$) un sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Un évènement est donc une partie de Ω. Les **évènements élémentaires** sont les parties de Ω réduites à un seul élément (singleton) $\{w\}$.

a) Evènement réalisé

Soit $A \subset \Omega$ un évènement et $w \in \Omega$ une réalisation de l'expérience. On dit que l'évènement A est **réalisé** si $w \in A$ et ne s'est pas réalisé si $w \notin A$.

Revenons à l'exemple sur les groupes sanguins

– l'évènement A : " l'individu est de rhésus positif" est représenté par $A = \{A^+, B^+, AB^+, O^+\}$. A est réalisé si le typage de l'individu donne l'un des 4 groupes sanguins.

– Il est possible qu'un évènement ne soit constitué que d'un seul évènement élémentaire. Par exemple, soit B : "l'individu est un donneur universel" alors $B = \{O^-\}$.

Remarque

Toute partie de Ω n'est pas forcément un évènement. Si l'expérience aléatoire est le lancer de deux dés alors :
$A =$\{la somme des dés est inférieure à 4\} est un évènement,
$B =$\{le résultat du premier dé lancé est inférieur à 4\} n'en n'est pas un si Ω ne contient que les résultats non ordonnés du tirage.

Les évènements étant des ensembles, afin de décrire diverses réalisations d'évènements, on fait appel à la théorie des ensembles.

b) Evènements remarquables

– L' évènement **impossible** correspond à l'ensemble vide $\emptyset$, c'est l'évènement qui ne peut être réalisé quel que soit le résultat de l'expérience.

– L'espace Ω représente l'évènement **certain**, c'est l'évènement qui est toujours réalisé quel que soit le résutat de l'expérience, il est consitué de toutes les éventualités.
– L'évènement **contraire** ou complémentaire d'un évènement A est noté A^c ou $\overline{A}$ est l'évènement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas. Ainsi,

$$w \in \overline{A} \iff w \notin A$$

$\overline{A}$ correspond à la négation logique $non(A)$.

Revenons à l'exemple sur les groupes sanguins alors $\overline{A} = \{A^-, B^-, AB^-, O^-\}$

Quelques propriétés : $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$

c) Opérations sur les évènements

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les évènements. Il modélise l'information qui peut être obtenue à partir des résultats de l'expérience. On considère simultanément la réalisation de deux évènements A et B.

– On appelle **intersection** de deux évènements A et B, l'évènement noté $A \cap B$ qui est réalisé si et seulement si A ET B le sont. Il est donc constitué des éventualités appartenant à la fois à A et B. Ainsi, $w \in (A \cap B) \iff w \in A\, et\, w \in B$

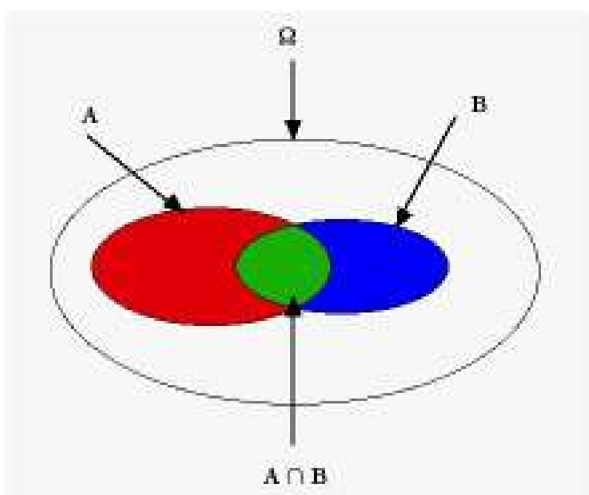

FIGURE 1.1 – L'intersection des deux évènements A et B est la zone verte, l'évènement A est la zone rouge et verte, l'évènement B est la zone bleue et verte et l'évènement complémentaire $\overline{A}$ est formé des parties bleue et blanches

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'évènement A : "l'individu est de rhésus positif" , on ajoute l'évènement B : "l'individu possède l'allèle B ", l'intersection de ces deux évènements donne : $A \cap B = \{B^+, AB^+\}$

Généralisation : Soit $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ est l'ensemble des w qui sont dans chacun des A_i. C'est l'évènement qui correspond à la réalisation de chacun des A_i.

- Deux évènements A et B sont **incompatibles** ou disjoints, s'ils ne peuvent être réalisés simultanément. On a alors : $A \cap B = \emptyset$

- On appelle **réunion** de deux évènements A et B, l'évènement noté $A \cup B$ qui est réalisé si et seulement si A OU B le sont. Il est donc constitué des éventualités appartenant soit à A soit à B. Ainsi, $w \in (A \cup B) \iff w \in A \, ou \, w \in B$

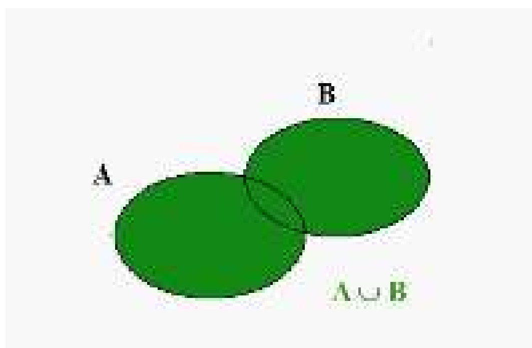

FIGURE 1.2 – L'union des deux évènements A et B est la zone verte

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'évènement A : "l'individu est de rhésus positif " , on ajoute l'évènement B : "l'individu possède l'allèle B ", l'union de ces deux évènements donne : $A \cup B = \{A^+, B^+, B^- AB^+, AB^-, O^+\}$

Généralisation : Soit $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ est l'ensemble des w qui sont dans au moins un des A_i. C'est l'évènement qui correspond à la réalisation d'au moins un des A_i.

- On dit que l'évènement A est **inclus** dans l'évènement B si la réalisation de A implique celle de B. On a alors $A \subset B$.

Exemple : Soit une urne contenant des billes rouges unies et des billes vertes unies et striées. Si l'on note A : "obtenir une bille striée " et B : " obtenir une bille verte", la réalisation de A implique la réalisation de B car A est inclus dans B.

Exemple de modélisation :
Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle (Alice commence). Le gagnant est le premier à obtenir un "six ". On veut décrire les trois évènements suivants
- A = victoire d'Alice,
- B = victoire de Bruno,
- D = Il n'y a pas de vainqueur.

Pour ce faire, on introduit des évènements plus simples :
- F_n = {fin de la partie au n-ième lancer}, $n \in \mathbb{N}^*$,

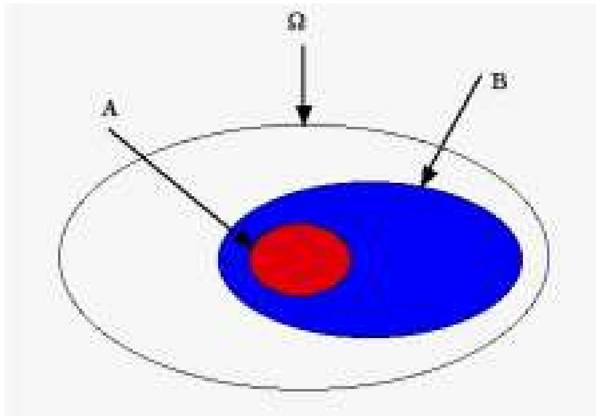

FIGURE 1.3 – Inclusion de l'évènement A en rouge dans l'évènement B en bleu

– S_j = {le j-ème lancer donne un "six"}, $j \in \mathbb{N}^*$,

Commenęns par D. Il est clair que D se réalise si et seulement si le "six" n'apparaît à aucun lancer, autrement dit si et seulement si quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\overline{S}_j$ est réalisé. D'où :

$$D = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \overline{S}_j$$

Puisque Alice commence, elle ne peut gagner la partie que lors d'un lancer de rang impair soit à l'un des lancers $1, 3, 5, ..., 2k + 1, ...$ et à condition que la partie se termine par l'un de ces lancers. En appliquant le même raisonnement pour Bruno, on a ainsi :

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{2k+1}, \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} F_{2k}$$

Enfin, pour $n \geq 2$, chaque F_n se réalise si et seulement si d'une part chacun des $n - 1$ premiers lancers donne autre chose qu'un "six" (c'est à dire si pour $1 \leq j \leq n - 1$), $\overline{S}_j$ se réalise et d'autre part, le n-ième lancer donne "six" (c'est à dire S_n se réalise). On a donc

$$F_1 = S_1, \; F_n = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} \overline{S}_j \right) \cap S_n, \; n > 1$$

Ceci permet d'exprimer A et B suivant

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{2k} \overline{S}_j \right) \cap S_{2k+1} \right), \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{2k-1} \overline{S}_j \right) \cap S_{2k} \right)$$

2.4 Probabilité : approche intuitive

A chaque évènement $A \in \mathcal{A}$, on cherche à associer un nombre $P(A)$ appelé probabilité de A qui mesure le degré de vraisemblance qu'on accorde à priori à A, avant la réalisation de l'expérience. Il est choisi entre 0 et 1 et est d'autant plus près de 1 que l'évènement est vraisemblable.

On peut imaginer la probabilité comme limite de fréquences. Pour estimer la probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 lors d'un lancer d'un dé à 6 faces, i.e. la probabilité de l'évènement $A = \{5, 6\}$ que l'on notera $P(A)$, on effectue un grand nombre, N, de lancers du même dé, et on compte le nombre $N(A)$ de fois où le résultat est 5 ou 6. La fréquence empirique des succès, $N(A)/N \approx 1/3$ (si le dé n'est pas biaisé), est une bonne approximation de $P(A)$ et on peut observer que la fréquence empirique $N(A)/N$ "converge" vers $1/3$ quand N augmente. On verra dans le chapitre sur les théorèmes limites comment justifier cette approximation à l'aide de la loi forte des grands nombres. De cette approche intuitive, on peut induire des relations satisfaites par la probabilité P. Comme $N(\Omega) = N$ et $N(\emptyset) = 0$, on doit donc avoir $P(\Omega)$ =1 et $P(\emptyset) = 0$. Si on considère des évènements disjoints (incompatibles) A et B, on a $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$, il est donc naturel d'imposer $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. Cependant, ces propriétés ne sont pas suffisantes dans le cas où Ω n'est pas fini.

De plus, dans la suite, on va vouloir calculer la probabilité de certaines parties de l'espace des réalisations Ω. Malheureusement, sauf lorsque Ω sera fini ou dénombrable, on ne pourra pas s'intéresser à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω, celui-ci étant en quelque sorte "trop gros". On se restreindra donc à un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, qui constituera l'ensemble des parties dont on peut calculer la probabilité. Afin d'obtenir un modèle aussi cohérent que possible, $\mathscr{T}$ doit satisfaire certaines conditions de stabilité : par union, intersection, passage au complémentaire, etc. C'est pour celà qu'on introduit la notion de tribu.

3 Définition générale d'une probabilité

3.1 Tribu

a) Rappels sur les ensembles dénombrables

Un ensemble E est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire si ses points peuvent être énumérés en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$, ni des intervalles $[a, b]$ lorsque $a < b$.

b) Définition d'une tribu

Une **tribu d'évènements** est une famille $\mathscr{T}$ de parties de l'univers Ω qui satisfait les propriétés suivantes :
- $\emptyset \in \mathscr{T}$ et $\Omega \in \mathscr{T}$
- $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire, $A \in \mathscr{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{T}$
- $\mathscr{T}$ est stable par réunion et intersection dénombrables, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{T}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont dans $\mathscr{T}$.

Notons que $\mathscr{T}$ est alors stable par réunion et intersection finie mais que la dernière propriété n'entraîne pas que $\mathscr{T}$ soit stable par réunion ou intersection infinie non dénombrable.

c) Tribu engendrée

Si $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **tribu engendrée** par C la plus petite tribu contenant C.

d) La tribu borélienne

Si $\Omega = \mathbb{R}$, on appelle **tribu borélienne** la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Exemples. Voici trois exemples classiques de tribus :
– La tribu triviale : $\mathscr{T} = \emptyset, \Omega$.
– La tribu engendrée par une partie A de Ω : $\mathscr{T} = \emptyset, A, \overline{A}, \Omega$.
– La tribu pleine $\mathscr{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

En pratique, lorsque Ω est fini ou dénombrable, on considère en général la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$. C'est le cas par exemple si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ensemble des résultats possibles du lancer d'un dé, ou si $\Omega = \mathbb{N}^*$, date d'apparition du premier Pile dans une succession de lancers d'une pièce (lorsqu'on exclut le cas improbable où Pile n'apparaît jamais). Si Ω n'est pas dénombrable, comme c'est le cas dans l'exemple d'une suite infinie de lancers ($\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, on ne considérera pas la tribu $\mathscr{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ mais une tribu plus petite.

L'espace des réalisations et la tribu des évènements étant définis, on obtient un couple $(\Omega, \mathscr{T})$ appelé **espace probabilisable**. On va maintenant donner la définition générale d'une probabilité.

3.2 Probabilité sur une tribu d'évènements

On appelle **probabilité** sur une tribu $\mathscr{T}$ toute application $P : \mathscr{T} \to [0, 1]$ qui satisfait les propriétés suivantes :
– $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$

– Pour toute suite (dénombrable) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

La deuxième propriété est appelée "axiome de σ-additivité".

3.3 Propriétés d'une probabilité

Tous les évènements considérés dans les relations suivantes appartiennent à la tribu $\mathscr{T}$ sur laquelle la probabilité est définie.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. En particulier, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
3. Dans le cas général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Plus généralement encore, on a la *formule du crible ou de Poincaré* :

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

5. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$
6. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante, $P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

On appelle le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ **un espace probabilisé**. C'est un espace mesuré au sens de la théorie de la mesure. La modélisation probabiliste consiste donc à décrire une expérience aléatoire par la donnée d'un espace probabilisé.

4 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. La donnée d'une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ équivaut à la donné d'une fonction $p : \Omega \to [0,1]$ telle que $\sum_{w\in\Omega} p(w) = 1$.
La correspondance se fait de la manière suivante :
- Lorsque P est donné, on définit p par les relations $p(w) = P(\{w\})$,
- lorsque p est donné, on définit P par les relations, $P(A) = \sum_{w\in A} p(w)$, pout tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Plus particulièrement, **pour un ensemble fini** $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$, la donnée d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ équivaut à celle d'une suite finie $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ de réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

et des n égalités

$$P(\{w_i\}) = p_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

4.1 La probabilité uniforme

Lorsque Ω est fini, la faşon la plus simple de construire une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est de choisir $p_i = 1/n$ pour tout i avec $Card\,\Omega = n$. On parle alors d'**équiprobabilité ou de probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. C'est la modélisation qui s'impose naturellement lorsqu'on n'a pas de raison de penser *a priori* qu'un résultat élémentaire de l'expérience soit favorisé ou défavorisé par rapport aux autres.
Dans ce cas, **et uniquement dans ce cas**, la probabilité d'un évènement A est donné par la formule

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

qui se déduit de $P(A) = \sum_{w\in A} \frac{1}{n}$.
Cette relation s'exprime en énonçant que la probabilité d'un évènement est le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

Remarque :

La situation est radicalement différente lorsque Ω est infini dénombrable (par exemple $\mathbb{N}$ ou une suite infinie d'éléments distincts). Sur un tel ensemble, il ne peut pas y avoir d'équiprobabilité. Imaginons que l'on veuille tirer une boule au hasard dans une urne contenant une infinité de boules ayant chacune un numéro entier distinct (et une boule par entier). Soit w_i l'évènement : "tirage de la boule numérotée i ($i \in \mathbb{N}$) et p_i sa probabilité. Par σ-additivité, on doit toujours avoir :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1.$$

Mais si tous les p_i sont égaux, la série ci-dessus contient une infinité de termes tous égaux à p_0. Sa somme vaut alors $+\infty$ si $p_0 > 0$ ou 0 si $p_0 = 0$, il y a donc une contradiction.

Probabilité uniforme sur la droite et dans le plan

1. Soit Ω un compact de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle. La probabilité uniforme sur Ω modélise le choix "au hasard" d'un point dans Ω. Cette probabilité P associe à tout évènement $A \subset \Omega$ le nombre $P(A) = \dfrac{longueur(A)}{longueur(\Omega)}$.
2. Soit Ω un compact du plan d'aire non nulle. La probabilité uniforme sur Ω modélise le choix "au hasard" d'un point dans Ω. Cette probabilité P associe à tout évènement $A \subset \Omega$ le nombre $P(A) = \dfrac{aire(A)}{aire(\Omega)}$.

4.2 Analyse combinatoire

On appelle **dénombrement** l'ensemble des techniques qui permettent de déterminer le cardinal d'une partie finie.

a) Cardinaux

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il est en bijection avec un ensemble $\{1, ..., n\}$ pour un certain entier $n \geq 1$. Un tel n est alors unique et est appelé **cardinal** de E (notation card E). Par convention le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Proposition :

1. Soient $E_1, ..., E_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup ... \cup E_n$ est un ensemble fini et
$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card\, E_i$$
En particulier, si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ alors
$$card(E_1 \cup E_2) = card\, E_1 + card\, E_2$$
sinon
$$card(E_1 \cup E_2) = card\, E_1 + card\, E_2 - card(E_1 \cap E_2).$$

2. Soient $E_1, ..., E_n$ n ensembles finis alors

$$card(E_1 \times ... \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} card\, E_i$$

3. Si $cardE = n$ et $cardF = p$, l'ensemble F^E des applications de E dans F est fini et a pour cardinal p^n, autrement dit

$$card(F^E) = (cardF)^{cardE}$$

   D'autre part, comme $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1\}$ des applications de E dans $\{0, 1\}$, on a

$$card\mathcal{P}(E) = 2^n = 2^{cardE}$$

b) Arrangement

Soit E un ensemble de cardinal n, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on appelle **arrangement** de k éléments de E, toute suite ordonnée de k éléments distincts de E.
Le nombre d'arrangements de k éléments de E est : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Exemples.

1. Le nombre de possibilités de générer un code à 4 chiffres différents parmi 10 chiffres est : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$
2. Dans une assemblée de 17 personnes, le nombre de manières d'élire un bureau composé d'un président, dun trésorier et d'un secrétaire est $A_{17}^3 = 4080$.

c) Permutation

Dans la définition précédente, si $k = n$ alors on parle de **permutation** de E. Le nombre de permutations de E est $A_n^n = n!$.

Exemples.

1. Sur une carte, le nombre de façons de colorier 6 régions avec 6 couleurs différentes est $6!$
2. Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. Ces jetons sont tir/'es successivement sans remise, on a alors $7! = 5040$ tirages possibles.
3. On souhaite placer 10 livres sur les étagères d'une bibliothèque parmi lesquels 4 sont des livres de maths, 3 sont des livres de chimie, 2 sont des livres d'histoire et 1 est un livre de linguistique.
   On peut ranger les livres de n'importe quelle façon mais en les gardant grouper par matière. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
   Supposons que les matières soient ordonnées d'une certaine façon alors il y a $4!$ façons de ranger les livres de maths, $3!$ façons de ranger les livres de chimie, $2!$ façons de ranger les livres d'histoire. D'autre part, il y a $4!$ possibilités pour l'ordre des matières donc au total $4!4!3!2!1! = 6912$ possibilités.

d) Combinaison

On appelle **combinaison** de k éléments de E, toute partie de cardinal k de E. Une combinaison a tous ses éléments distincts comme un arrangement mais l'ordre d'écriture n'a pas d'importance.
Le nombre de combinaisons de k él/'ements de E est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples :

1. Le nombre de choix pour désigner 5 places visiteurs dans un parking de 31 places est $C_{31}^5 = 169911$
2. Le nombre de groupes de 3 lettres que l'on peut constituer à partir des lettres A, B, C, D, E est $C_5^3 = 10$. On ne tient pas compte de l'ordre.

Propriétés des coefficients C_n^k

1. Formule du binôme de Newton
   Pour tous nombres réels ou complexes x et y,
   $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1, \;\; C_n^p = C_n^{n-p} \quad pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$
3. Triangle de Pascal :
   $$C_n^p - C_{n-1}^p = C_{n-1}^{p-1}$$

e) Arrangement avec répétition

Soient $E = \{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble à $n \geq 1$ éléments, $p \in \mathbb{N}$ et $(r_1, ..., r_n)$ une suite d'entiers tels que $\sum_{k=1}^n r_k = 1$. On appelle **arrangement avec répétition** de longueur p et d'ordre $(r_1, ..., r_n)$ toute suite ordonnée de longueur p dont les termes sont des éléments de Ω où pour tout $1 \leq k \leq n$, chaque e_k figure r_k fois.
Le nombre de ces arrangements est $\dfrac{p!}{r_1!...r_n!}$.
Cela correspond au nombre de p-tirages avec remise dans une population de taille n, pour lesquels le $k$ième individu de la population apparaît r_k fois en tenant compte de l'ordre d'apparition.

Le nombre total de tous les arrangements avec répétition de p objets parmi n est n^k.

Exemples :

1. On veut ranger sur un rayon 10 ouvrages comprenant 5 livres de chimie, 3 livres de maths et 2 livres de physique. Le nombre de rangements possibles est celui des arrangements avec rpétition d'ordre $(5, 3, 2)$ de 10 objets parmi 3 qui vaut $\dfrac{10!}{5!3!2!} = 2520$
2. Dans une compétition, le nombre de classements où figurent 3 français, 4 anglais et 2 allemands est celui des arrangements avec répétition d'ordre $(3, 4, 2)$ de 9 objets parmi 3 qui vaut $\dfrac{9!}{3!4!2!} = 1260$

f) Combinaison avec répétition

Soient $E = \{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble à n éléments et $k \geq 1$. Une **combinaison avec répétition** de k éléments de E est un n-uplet $(k_1, ..., k_n)$ d'entiers naturels tel que $k_1 + ... + k_n = k$, k_i étant le nombre de fois où l'élément e_i est choisi.
Le nombre total de combinaisons avec répétition de k éléments pris parmi n est noté K_n^p et vaut $K_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{p+n-1}^{n-1}$

Exemples :

1. On peut répartir 10 voix entre 3 candidats de $K_3^{10} = 66$ façons.
2. On choisit avec/sans remise k éléments dans une urne composée de n boules distinctes, numérotées de 1 à n en tenant/ne tenant pas compte de l'ordre de tirage des boules.

	sans remise	avec remise
avec ordre	A_n^k	n^k
sans ordre	C_n^k	C_{n+k-1}^k

4.3 Modèles d'urnes

Dans ce paragraphe, différents "modèles d'urnes" que l'on peut également voir comme des modèles de prélèvement d'échantillons dans une population au cours d'un sondage sont présentés.
Le modèle général est le suivant : une urne contient N boules de k couleurs différentes, réparties en N_1 boules de couleur 1, N_2 boules de couleur 2,...,N_k boules de couleur k. On note $p_i = N_i/N$ la proportion de boules de couleur i. On tire au hasard n boules de cette urne, $n \leq N$, et on s'intéresse à la répartition des couleurs dans l'échantillon obtenu. On note $P_{n_1,n_2,...,n_k}$ la probabilité d'obtenir n_1 boules de couleur 1, n_2 boules de couleur 2,..., n_k boules de couleur k, avec bien sûr $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

a) Tirage avec remise

Les tirages sont successifs. On replace la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant. On peut donc tirer plusieurs fois la même boule. L'ensemble Ω est alors l'ensemble de tous les n-uplets d'éléments de l'urne. Toutes les répétitions étant possibles, $card(\Omega) = N^n$. On munit Ω

de sa probabilité uniforme. Le nombre de façons de déterminer les places des k couleurs parmi n est égal au nombre de façons de partager n en k parties de taille n_i, à savoir $\dfrac{n!}{n1!n2!...nk!}$. Une fois la place des couleurs choisies, il y a N_i possibilités pour chaque boule de couleur i. Le nombre de n-uplets de répartition $n_1, n_2, ..., n_k$ est alors égal à $\dfrac{n!}{n1!n2!...nk!}N_1^{n_1}...N_k^{n_k}$. Nous avons donc finalement

$$P_{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n1!n2!...nk!}\frac{N_1^{n_1}...N_k^{n_k}}{N^n}$$

Cette probabilité est appelée une **distribution multinomiale**. Dans le cas particulier où $k = 2$, $p1 = p = N_1/N$ et $p2 = 1 - p$, la probabilité définie par

$$P_{n_1,n-n_1} = C_n^{n_1} p^{n_1}(1-p)^{n-n_1}$$

sera appelée **loi binomiale** de paramètres n et p.

b) Tirage sans remise

On tire maintenant successivement les boules de l'urne, mais sans les replacer dans l'urne après tirage. L'ensemble Ω est alors l'ensemble des suites de n éléments distincts parmi N et le nombre de cas possibles sera $N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$. En raisonnant comme dans le cas avec remise, on peut montrer que le nombre de cas favorables vaut $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}A_{N_1}^{n_1}...A_{N_k}^{n_k}$, ce qui finalement donne pour probabilité

$$P_{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{C_{N_1}^{n_1}...C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Cette distribution s'appelle la distribution polygéométrique. Dans le cas de deux couleurs, elle vaudra

$$P_{n_1,n-n_1} = \frac{C_{N_1}^{n_1}...C_{N-N_1}^{n-n_1}}{C_N^n}$$

qui est appelée **distribution (ou loi) hypergéométrique**.

Exercices

Exercice 1
Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles :

1. On lance un dé.
2. On lance 2 dés.
3. On tire trois cartes dans un jeu.
4. On place les 5 lettres qui forment PROBA au hasard sur une réglette de Scrabble.
5. On place les 6 lettres qui forment ERREUR au hasard sur une réglette de Scrabble.

Exercice 2
Supposons que les faces d'un dé sont truquées de telle manière que les numéros impairs ont chacun la même chance d'apparaître, chance qui est deux fois plus grande que pour chacun des numéros pairs. On jette le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ?

Exercice 3
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.

1. Soit A et B deux ensembles de $\mathscr{T}$. Montrer qu'il en est de même des ensembles suivants : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite dénombrable d'évènements de $\mathscr{T}$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice 4
On lance une pièce une infiniteé de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note : A_i = le i-ème lancer donne Pile.

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{\infty} A_i,\ E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{\infty} A_i\right),\ E_3 = \bigcup_{i=5}^{\infty} A_i$$

2. Ecrire à l'aide des A_i l'évènement : “On obtient au moins une fois PILE après le n-ième lancer”.
3. Ecrire à l'aide des A_i les évènements
   – B_n : “On n'obtient plus que des PILE à partir du n-ième lancer”.
   – B : “ On n'obtient plus que des PILE à partir d'un certain lancer”.

Exercice 5 Inégalité de Bonferroni
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé et A_1, ..., A_n des évènements.

1. Si $P(A_1) = 0,9$ et $P(A_2) = 0,8$, montrer que $P(A_1 \cap A_2) \geq 0,7$.

2. Montrer que pour tous événements A_i et A_j,

$$P(A_i \cap A_j) \geq P(A_i) + P(A_j) - 1.$$

3. Généraliser :

$$\forall A_1, ..., A_n \in \mathscr{T}, P(A_1 \cap .... \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Exercice 6
$n-2$ voitures se garent au hasard sur un parking disposant de n places alignées, $(n \geq 3)$. Quelle est la probabilité que les deux places libres soient côte à côte ?

Exercice 7
On veut choisir dans un club comptant 10 membres un président, un secrétaire et un trésorier (le cumul est interdit). De combien de manières peut-on attribuer ces postes si :
- Aucune restriction n'est imposée ;
- A et B refusent d'officier ensemble ;
- C et D officieront ensemble ou pas du tout ;
- E doit avoir une charge ;
- F n'accepte que la charge de président

Exercice 8
Un parachutiste est largué sur une île de superficie $s\,km^2$ et atterit en un point situé au hasard sur cette île. Calculer la probabilité que la distance du point d'atterrissage à la côte soit inférieure à $x\,km$ dans chacun des cas suivants :
- l'île est carrée
- l'île est circulaire

Exercice 9
1. Parmi 20 étudiants de votre promotion à l'ENTPE, quelle est la probabilité qu'au moins deux aient leur anniversaire le même jour (on ignore les années bissextiles) ? Quel effectif minimal faudrait-il dans la promotion pour que cette probabilité soit supérieure à $0,5$? Que vaut cette probabilité pour une promotion de 50 étudiants ?
2. Combien devrait-il y avoir d'étudiants pour qu'avec plus d'une chance sur deux, au moins un autre étudiant ait son anniversaire le même jour que vous ?

Exercice 10
Une personne veut placer 20000 dollars sur 4 affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier de milliers de dollars et il existe un engagement minimum pour chaque affaire qui est respectivement de $2,\ 2,\ 3$ et 4 milliers de dollars. Combien de stratégies d'investissement y a-t-il si :
- Un investissement doit être fait sur chaque affaire ;
- Au moins 3 des 4 affaires doivent être couvertes ?

Exercice 11
Pour désigner celui qui tondra la pelouse, Albert et Bernard adoptent la règle suivante : on tire au hasard sans remise deux boules dans une urne qui contient r boules rouges et v boules vertes. Si les deux boules sont de même couleur, Albert tondra la pelouse. Sinon ce sera à Bernard de le faire.

1. Quelle est la probabilité qu'Albert tonde la pelouse ?
2. Dans quel cas cette règle est équitable ?

Exercice 12
Dix haltérophiles sont engagés dans une compétition par équipe. L'équipe américaine compte 3 champions, l'équipe russe 4, l'équipe chinoise 2 et le dernier athlète est canadien. Le score publié n'indique que la nationalité des haltérophiles, sans leur nom.

– Dans ce cas, combien y a t-il de listes possibles ?
– Combien y en a-t-il si les Etats-Unis ont un concurrent placé dans les trois meilleurs et deux dans les trois derniers.