Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
3 Rue Maurice Audin
69 518, Vaulx en Velin cedex, France

Probabilités

Notes de cours et Exercices

Première année

Chapitre 1

Modélisation des phénomènes aléatoires. Espaces probabilisés

Chapitre 2

Conditionnement et Indépendance

1 Probabilités conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte le fait qu'une information supplémentaire concernant l'expérience modifie la vraisemblance que l'on accorde à l'évènement étudié. Par exemple, si on lance deux dés, la probabilité de l'évènement "la somme est supérieure ou égale à 10" vaut

- $1/6$ sans information supplémentaire,
- $1/2$ si l'on sait que le résultat d'un des dés est 6,
- 0 si l'on sait a priori que le résultat d'un des dés est 2.

1.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé et B un évènement de $\mathscr{T}$ tel que $P(B) > 0$. L'application notée $P(.|B)$ de $\mathscr{T}$ dans $[0, 1]$ qui à $A \in \mathscr{T}$ associe $P(A|B)$ avec

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

définit une probabilité sur Ω, appelée **probabilité conditionnelle** sachant B.

Remarque

1. $P(.|B)$ est bien une probabilité. En effet :
   - on a bien $P(\emptyset|B) = 0$ et $P(\Omega|B) = 1$.
   - Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles, il en est de même de la suite $(B \cap A_n)_{n\geq 1}$. Alors, en utilisant la définition de $P(.|B)$ et la σ-additivité de P on a

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) = \frac{P\Big(B \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\Big)}{P(B)}$$

   soit encore

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n))}{P(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$$

2. P et $P(.|B)$ sont différentes sauf dans le cas trivial où $P(B) = 1$.
3. Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, on a

$$P(A|B)P(B) = P(A\,B) = P(B|A)P(A).$$

Exemple 1

– Dans une famille qui comporte deux enfants, l'un est une fille. On cherche la probabilité que l'autre soit un garçon. On choisit $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ où par exemple FG signifie que l'aîné des enfants est une fille et le second un garçon. Cet espace est muni de la probabilité uniforme. On note
$A = $ {un des enfants est un garçon} = $\{FG, GF, GG\}$
$B = $ {un des enfants est une fille} = $\{FF, FG, GF\}$.
On a $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3}{4}$. Comme $A \cap B = \{FG,\ GF\}$, $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$.
La probabilté recherchée est donc :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

– On suppose maintenant que l'aîné des enfants est une fille. On veut alors connaître la probabilité pour que l'autre soit un garçon. En reprenant la démarche ci-dessus, on obtient que cette probabilité vaut $1/2$.

Exemple 2

– Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend successivement deux pièces au hasard dans le lot (sans remise). Quelle est la probabilité pour que les deux pièces soient correctes.
On note A_1 l'évènement la première pièce est correcte et A_2 l'évènement la seconde pièce est correcte. Comme, au départ, il y a 6 pièces correctes sur 10, $P(A_1) = 6/10 = 3/5$. Lorsque l'on a retiré une pièce correcte, il reste 5 pièces correctes sur 9. D'où $P(A_2|A_1) = 5/9$. On conclut que la probabilité cherchée est

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

– On peut retrouver ce résultat en munissant l'espace
$\Omega = $ {sous-ensembles comportant 2 pièces de l'ensemble des 10 pièces}
de la probabilité uniforme. L'évènement dont on cherche la probabilité est
$A = $ {sous-ensembles comportant 2 pièces de l'ensemble des 6 pièces correctes}.
On a alors

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{6!8!2!}{10!4!2!} = \frac{1}{3}$$

Exemple 3

– Une urne contient 90 boules noires, 9 boules blanches et 1 boule rouge. On tire une boule au hasard : quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ? La réponse est $P(B) = 9/100$

– On tire une boule au hasard : quelle est la probabilité qu'elle soit blanche, sachant que la boule tirée n'est pas noire ? Si on note A l'évènement "la boule tirée n'est pas noire ", on a donc $P(A) = 1/10$ et la réponse est $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = P(B)/P(A) = 9/10$.

Avec la formule suivante, on va maintenant voir que les probabilités conditionnelles fournissent une méthode générale pour calculer une probabilité d'intersection.

1.2 Formule des probabilités composées

Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie d'évènements tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$, on a :

$$P(\cap_{1 \leq k \leq n}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A1 \cap A_2)........P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence. Si $n = 2$, la formule des probabilités composées correspond à la définition de la probabilité conditionnelle. Supposons qu'elle soit vraie pour $n-1$, et soit $B = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}$. D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a $P(B \cap A_n) = P(B)P(A_n|B)$. En remplaçant $P(B)$ par sa valeur donnée par l'hypothèse de récurrence avec $n-1$, on obtient la formule des probabilités composées pour n.

Exemple

Soit une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement au hasard et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la deuxième et la troisième noires ?
Pour $1 \leq i \leq 3$, on note N_i l'évènement " la *ième* boule tirée est noire ". On cherche $P(\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3)$. En appliquant la formule des probabilités composées et en supposant que tous les tirages sont équiprobables, on obtient :

$$P(\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(\overline{N}_1)P(N_2|\overline{N}_1)P(N_3|\overline{N}_1 \cap N_2) = \frac{6}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8} = \frac{1}{10}.$$

Les probabilités conditionnelles permettent aussi de calculer la probabilité d'un évènement en conditionnant par tous les cas possibles.

1.3 Théorème des probabilités totales

a) Système complet d'évènements

On appelle **système complet d'évènements**, toute suite finie ou infinie $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements deux à deux incompatibles tels que $\cup_{n \geq 1} A_n = \Omega$.

b) Système presque complet d'évènements

– On appelle **système presque complet d'évènements**, toute suite finie ou infinie $(A_n)_{n \geq 1}$ d'évènements deux à deux incompatibles tels que $P(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) = 1$.
En particulier, un système complet d'évènements est un système presque complet d'évènements.

– Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système presque complet d'évènements alors pour tout évènement B, on a $P(B) = \sum_{n\geq 1} P(A_n \cap B)$

c) Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système presque complet d'évènements tels que $P(A_n) > 0$ pour tout $n \geq 1$, alors, pour tout évènement B, on a

$$P(B) = \sum_{n\geq 1} P(B|A_n)P(A_n).$$

En pratique, on utilise très souvent cette formule des probabilités totales en conditionnant successivement par un évènement et son contraire, c'est-à-dire en prenant tout simplement un système d'évènements de type $(A, \overline{A})$, ce qui donne :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}).$$

Exemple : Urne de Polya

Ce type de tirage est issu de modèles médicaux de propagation des agents infectieux

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. Une boule est tirée au hasard puis on la replace dans l'urne ainsi que 3 autres boules de la même couleur que celle-ci (de sorte qu'il y a alors 13 boules dans l'urne). On tire alors une nouvelle boule au hasard dans l'urne.

1. On s'intéresse à la probabilité que la seconde boule tirée soit blanche. Notons B_i (respectivement N_i) l'évènement : "La boule tirée au i-ème tirage est blanche (respectivement noire)." Le but est donc de calculer la probabilité $P(B_2)$. On conditionne par ce qui s'est passé au premier tirage, c'est le principe de la formule des probabilités totales qui donne :

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{7}{13} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{13} \times \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$$

2. Etant donné que la seconde boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première soit noire ?

$$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2 \cap N_1)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{6}{13}$$

3. Généralisation : on considère le même procédé avec initialement B boules blanches, N noires et un ajout de c boules supplémentaires. En généralisant l'équation obtenue à la première question, la probabilité que la seconde boule tirée soit blanche est

$$P(B_2) = \frac{B+c}{B+N+c} \times \frac{B}{B+N} + \frac{B}{B+N+c} \times \frac{N}{B+N} = \frac{B}{B+N}$$

1.4 Formule de Bayes

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système presque complet d'évènements tels que $P(A_n) > 0$ pour tout $n \geq 1$, et B un évènement de probabilité non nulle, alors, pour tout $k \geq 1$,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{n\geq 1} P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Remarque
Si l'on considère que les (A_k) sont une énumération des hypothèses possibles (évènements probabales) suite à une expérience $\mathcal{E}$, cette formule permet de connaître l'influence relative de ces différentes hypothèses dans les réalisations d'un évènement B. C'est pourquoi on appelle aussi cette formule, formule des probabilités des causes.

Preuve. Par définition, $P(A_k|B) = P(A_k \cap B)/P(B)$. Il suffit alors d'appliquer la formule des probabilités composées au numérateur et le théorème des probabilités totales au dénominateur pour obetenir le résultat.

Exemple 1
L'inspecteur chargé d'une enquête criminelle est à un certain stade convaincu à 60% de la culpabilité d'un suspect. Une nouvelle pièce à conviction permet soudain d'affirmer que le criminel est gaucher. Or 7% des individus dans la population sont gauchers. Comment l'inspecteur doit-il réapprécier la culpabilité du suspect, s'il se trouve que le suspect est gaucher ?
On note C : "suspect coupable", I : "suspect innocent" et G : "suspect gaucher". D'après l'énoncé, $P(C) = 1 - P(I) = 0.6$, $P(G|C) = 1$ et $P(G|I) = 0.07$. D'après la formule de Bayes, la probabilité pour que le suspect soit coupable sachant qu'il est gaucher est

$$P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G|C)P(C) + P(G|I)P(I)} = 0.955$$

Ainsi, si le suspect est gaucher, l'inspecteur peut tabler sur sa culpabilité avec moins de 5% de chances de se tromper.

Exemple 2
Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ? Soient les évéenements :
T_A : "le tableau est entré par A",
$T_B = \overline{(}T_A)$: " le tableau est entré par B",
F : " le tableau comporte des fautes".
D'après le théorème de Bayes,

$$P(T_A|F) = \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} = \frac{0.052 \times 1/3}{0.052 \times 1/3 + 0.067 \times 2/3} = 0.279$$

2 Indépendance

La notion d'indépendance intervient de façon constante en probabilités. Intuitivement, deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un "n'a aucune influence" sur la réalisation ou non de l'autre. Le but de cette section est de préciser ceci mathématiquement et de l'étendre à plus de deux évènements.

2.1 Indépendance de deux évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabailisé, deux évènements A et B de cet espace sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque

– Cette notion est une notion liée au choix de la probabilité P et n'est pas une notion ensembliste. Cela n'a en particulier rien à voir avec le fait que A et B soient disjoints (incompatibles) ou non.
  En effet, deux évènements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'eux est presque impossible. En effet, soit A et B deux évènements incompatibles. Alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff 0 = P(A)P(B) \iff P(A) = 0 \, ou \, P(B) = 0.$$

  Rappel : Un évènement A est dit presque certain si $P(A) = 1$ et presque impossible si $P(A) = 0$.

– Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff P(A|B) = P(A) \iff P(B|A) = P(B).$$

Exemple

– Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les évènements :
  A : "tirage d'un nombre pair", B : "tirage d'un multiple de 3".
  L'espace probabilisé qui s'impose naturellement ici est $\Omega = \{1, ..., 12\}$ muni de l'équiprobabilité P. Les évènements A et B s'écrivent :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \; B = \{3, 6, 9, 12\}, \; A \cap B = \{6, 12\}.$$

  Dans ce cas, on a

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \; P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \; P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

  donc A et B sont indépendants.

– On rajoute maintenant dans l'urne une boule numérotée treize et on recommence l'expérience. Les évènements A et B restent les mêmes, mais le modèle a changé. On a maintenant l'équiprobabilité P' sur $\Omega' = \{1, ..., 13\}$ et

$$P'(A) = \frac{6}{13},\ P'(B) = \frac{4}{13},\ P'(A \cap B) = \frac{2}{13},$$

mais

$$P'(A)P'(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq \frac{2}{13}$$

donc A et B ne sont plus indépendants.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même pour :
– les évènements A et $\overline{B}$;
– les évènements $\overline{A}$ et B ;
– les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$;

Preuve. Pour le premier résultat, on a :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

et on applique maintenant l'indépendance de A et B :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

ce qui prouve l'ind/'ependance de A et de $\overline{B}$. On procède de même pour les autres items.

2.2 Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements. On dit qu'ils sont :

– 2 **à** 2 **indépendants** si pour tout couple (i, j) d'indices distincts, A_i et A_j sont indépendants,
– **mutuellement indépendants** si pour tout ensemble fini d'indices distincts $(i_1, ..., i_k)$, on a

$$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times ... \times P(A_{i_k}).$$

Cas particulier

Trois évènements A, B, C sont dits mutuellement indépendants lorsqu'ils vérifient les quatre conditions :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(C)P(A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Remarque

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant : on lance un dé deux fois de suite. Soit A l'évènement : "Le premier lancer donne un nombre pair" et B l'évènement : "Le second lancer donne un nombre pair". L'univers naturel est $\Omega = \{(i,j), 1 \leq i, j \leq 6\}$, ensemble à 36 éléments muni de l'équiprobabilité. Il est clair que $P(A) = P(B) = 1/2$ et que $P(A \cap B) = 1/4 = P(A)P(B)$. Si on note C : "la somme des deux lancers est paire ". On a donc $P(C) = 1/2$. On vérifie que les évènements (A, B, C) sont 2 à 2 indépendants, mais que :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

ce qui prouve que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

2.3 Indépendance d'une suite d'évènements

Une suite infinie d'évènements est dite indépendante si toute sous-suite finie est formée d'évènements mutuellement indépendants.

2.4 Schéma de Bernouilli. Indépendance et modèle binomial

On considère une suite de n épreuves réalisées dans les mêmes conditions expérimentales et indépendantes. Par exemple tirages avec remise dans la même urne, lancers successifs d'un dé,... Il est alors raisonnable de supposer que les résultats de tout sous-ensemble fini d'épreuves n'ont aucune influence sur ceux des autres épreuves.
Chaque épreuve a deux issues possibles appelés :
- "succès" avec la probabilité $p \in]0, 1[$
- "échec" avec la probabilité $q = 1 - p$

Alors le nombre de succès au cours de ces n épreuves suit la loi binomiale de paramètre n et p (cf Chap1). En d'autres termes, la probabilité d'obtenir k succès dans ce modèle est

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

En effet, par indépendance, toute séquence de n épreuves comportant k succès est de probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$. Or, il y a exactement C_n^k séquences deux à deux incompatibles de ce type, d'où le résultat.

Exemple

Soit $n \geq 2$. On s'intéresse aux différentes répartitions possibles des sexes des enfants dans une famille ayant n enfants et on admet que toutes les répartitions sont /'equiprobabales. On considère les évènements A : "la famille a des enfants des deux sexes" et B : "la famille a au plus une fille". Alors, il existe un unique n pour lequel les évènements A et B sont ind/'ependants.

En effet, l'ensemble des répartitions Ω_n est de cardinal 2^n et il n'est pas difficile de voir que $Card(A) = 2^n - 2$, $Card(B) = n + 1$ et $Card(A \cap B) = n$. On a alors :

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) = \frac{2^{n-1} - n - 1}{2^{2n-1}}$$

, quantité qui est nulle si $n = 3$.

Exercices

Exercice 1
Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte, d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 2

1. On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la deuxième blanche et la troisième noire ?
2. On vous donne 5 cartes au hasard d'un jeu de 52. Quelle est la probabilité que vous ayez une couleur à Pique (i.e. 5 cartes de Pique) ? Quelle est la probabilité que vous ayez une couleur ?

Exercice 3
Dans une usine, la machine A fabrique 60$\%$ des pièces, dont 2$\%$ sont défectueuses. La machine B fabrique 30$\%$ des pièces, dont 3$\%$ sont défectueuses. La machine C fabrique 10$\%$ des pièces, dont 4$\%$ sont défectueuses.

1. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ? par la machine B ? par la machine C ?

Exercice 4
Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Exercice 5
Lors de la Coupe du Monde de football 2010, avant chacune des 7 rencontres de l'équipe allemande (3 matchs de poule, huitième, quart, demi et "petite finale") ainsi qu'avant la finale (Espagne contre Pays-Bas), Paul le Poulpe avait le choix entre 2 récipients contenant sa nourriture préférée, chacun à l'effigie de l'un des deux adversaires. Le pronostic correspondait au choix du récipient où l'animal allait se nourrir. Il se trouve que les 8 pronostics se sont avérés exacts.

1. Quelle est la probabilité d'un pronostic correct pour un match de poule ? Et pour un match avec élimination directe ?

2. En déduire la probabilité qu'avait Paul le Poulpe de "tomber juste" sur l'ensemble des rencontres ?

Indication : Pour un match de poule, le résultat peut être victoire, défaite ou match nul. Le poulpe ne peut pas pronostiquer un match nul.

Exercice 6

1. Une urne U_1 contient 2 boules rouges et 4 boules noires, une urne U_2 contient 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire aléatoirement (équiprobabilité) une boule dans l'urne U_1 ou U_2 et on sort une boule rouge. Quelle est la probabilité que la boule sorte de l'urne U_2 ?
2. Même question si la probabilité de tirer dans l'urne U_2 est α et si l'urne U_1 contient une proportion de p_1 boules rouges, l'urne U_2 une proportion de p_2 boules rouges.

Exercice 7
Un dépistage systématique concernant un éventuel trouble de l'audition est effectué à la naissance. On sait que 2% des nouveaux-nés présentent des troubles de l'audition. Ce dépistage commence par un test donnant 95% de résultats positifs pour les nouveaux-nés atteints de ces troubles et 6% de résultats positifs pour les bébés indemnes de ces troubles.

1. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test a donné un résultat positif ?
2. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pris au hasard soit indemne de ces troubles sachant que le test a donné un résultat négatif ?

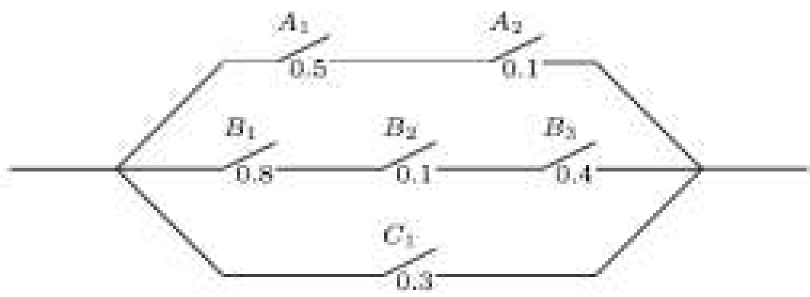
Exercice 8
On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les évènements : "le chiffre du premier dé est pair ", "le chiffre du deuxième dé est pair" et "les deux chiffres ont même parité".

1. Montrer que les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 9
Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut $0,3$. Par contre s'il fume un jour donné, la probabilité de ne pas fumer le lendemain vaut $0,9$. On note p_n la probabilité qu'il ne fume pas le $n$ième jour.

1. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
2. En déduire p_n et $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 10
On considère le circuit électrique ci-dessous. Chaque relais est en position ouverte ou fermée, la probabilité qu'il soit ouvert étant indiquée sur la figure et les relais se comportant de façon



totalement indépendante. Quelle est la probabilité que le courant passe, c'est-à-dire qu'il existe au moins une branche sur laquelle tous les relais sont fermés ?