

Table des matières

Chapitre 1 Théorie des poutres.....	3
1.1 Problème fondamental.....	3
1.2 Modélisation géométrique.....	4
1.3 Modélisation des actions	10
1.4 Modélisation des liaisons	14
1.5 Problème plan.....	17
1.6 Isostaticité Hyperstaticité	18
Chapitre 2 Les outils de la MMC.....	29
2.1 Les déformations	29
2.2 Les contraintes.....	31
2.3 Les Lois de Comportement	36
2.4 Les critères de limite élastique	39
Chapitre 3 Hypothèses fondamentales.....	47
3.1 Hypothèse des petites perturbations	47
3.2 Principe de NAVIER BERNOULLI	48
3.3 Principe de SAINT-VENANT	50
3.4 Hypothèse sur les contraintes	53
Chapitre 4 Caractéristiques géométriques	61
4.1 Aire d'une section	61
4.2 Moment statique.....	61
4.3 Centre de gravité	61
4.4 Moment et produit d'inertie	62
4.5 Théorème d'HUYGENS	63
4.6 Rayon de giration	64
4.7 Variation d'inertie	64
4.8 Variation d'inertie par rapport aux inerties principales	66
4.9 Représentation graphique.....	66
4.10 Matrice d'inertie.....	66
4.11 Ellipse centrale d'inertie.....	67
Chapitre 5 Sollicitations.....	73
5.1 Principe de superposition	73
5.2 Equations d'équilibre en sollicitations	73
5.3 Expression des sollicitations	75
5.4 Tracé direct des sollicitations.....	78
Chapitre 6 Répartition des contraintes normales	89
6.1 Traction et compression simple.....	89
6.2 Flexion simple.....	92
6.3 Flexion déviée	100
6.4 Flexion composée.....	102
6.5 Noyau central	107
Chapitre 7 Contraintes tangentes Effort tranchant.....	115
7.1 Propriétés des contraintes tangentes.....	115
7.2 Définition	116
7.3 Théorème de la coupure	117
7.4 Section massive	119
7.5 Profil mince fermé.....	125
7.6 Profil mince ouvert.....	133

Chapitre 8 Contraintes tangentes Torsion.....	149
8.1 Définition	149
8.2 Section circulaire ou annulaire	150
8.3 Profil mince fermé.....	154
8.4 Profil mince ouvert.....	157
Chapitre 9 Flambement	165
9.1 Déformations élémentaires.....	165
9.2 Equation différentielle de la déformée	165
9.3 Flambement d'une poutre bi articulée.....	168
9.4 Flambement d'une poutre bi encastree.....	170
9.5 Longueur de flambement	171
9.6 Elancement	171
9.7 Flambement et déformée initiale.....	171
9.8 Flambement et excentrement.....	173

Chapitre 1 Théorie des poutres

1.1 Problème fondamental

Une structure réelle, constituée de matériaux, suivant une géométrie, avec des conditions aux limites (en efforts et en déplacement), a des fonctions mécaniques à remplir :

1. Résistance
2. Déformabilité
3. Stabilité

Comment savoir si ces fonctions sont remplies ? Il existe deux classes de méthode :

- Empiriques (cathédrales)
- Modélisation + calcul (NAVIER 1830)

Théories disponibles pour le calcul : Mécanique des Milieux Déformables (MMD ou MMC). Le principe est de trouver un champ de déplacements et un champ de contraintes vérifiant la loi de comportement, les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

Ces problèmes d'équations aux dérivées partielles sont souvent complexes et il n'y a pas souvent de solutions analytiques. On doit donc faire appel à des solutions numériques (Méthode des Eléments Finis) ou à des solutions expérimentales (réalisation de prototype).

Il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices qui donnent les théories de la RDM. Une des hypothèses simplificatrices adaptée au Génie Civil concerne la géométrie des éléments étudiés : les poutres, poteaux ou arcs se modéliseront en une courbe.

Cette partie de la RDM, reposant sur une modélisation filaire des solides étudiés, est appelée : La théorie des poutres.

C'est cette théorie qui sera abordée dans ce cours.

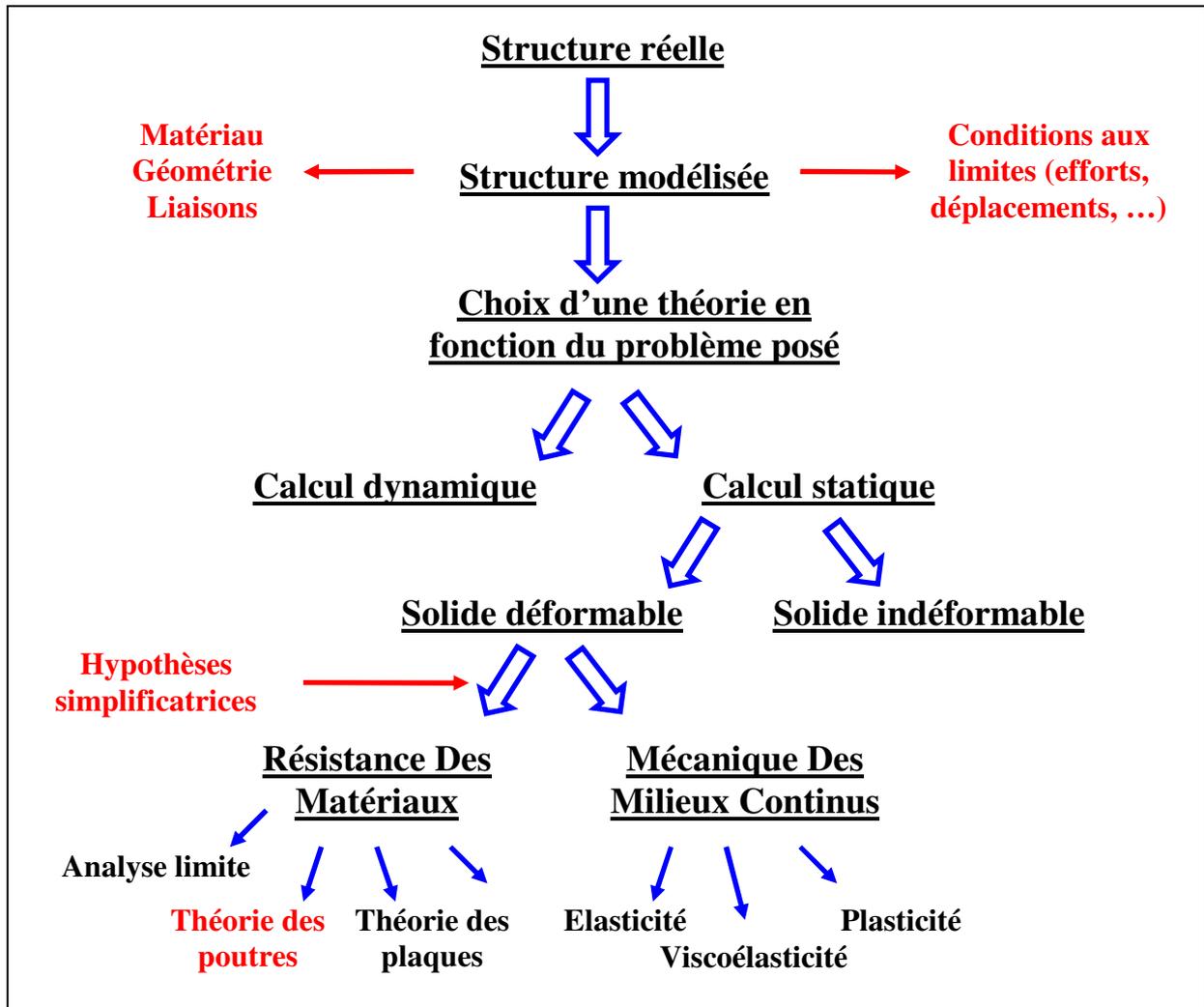


Fig. 1.1 - Théorie des poutres

Le passage d'une structure réelle à une structure modélisée se fera à l'aide d'une modélisation à quatre niveaux :

1. Modélisation de la géométrie.
2. Modélisation des actions.
3. Modélisation des liaisons.
4. modélisation du matériau.

1.2 Modélisation géométrique

1.2.1 Définitions

Définition 1 : Milieu curviligne ou poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane Σ , dont le centre de gravité G décrit une courbe Γ orientée, le plan Π de Σ restant normal à Γ .

Les dimensions de Σ doivent être petites par rapport à celle de Γ .

Ces définitions sont explicitées sur la Fig. 1.2

Remarques :

1. L'orientation de la courbe Γ permet de définir ainsi un sens de parcours de la poutre ; ce sens n'ayant rien d'implicite, il devra nécessairement être précisé que ce soit pour une résolution analytique ou informatique. Néanmoins, pour l'étude analytique d'une poutre unique et horizontale, le choix d'une origine à gauche pourra être implicite.
2. Soient A et B, l'origine et l'extrémité de la courbe Γ , par abus de langage, on identifie la poutre à la courbe Γ et on pourra parler de la poutre AB.

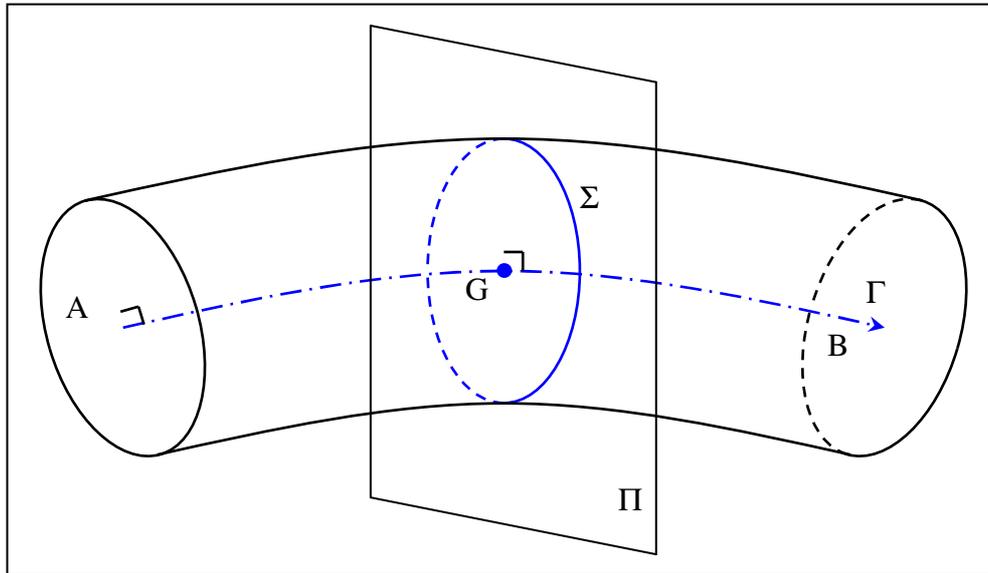


Fig. 1.2 – Section droite et fibre moyenne

Définition 2 : Section droite.

L'aire plane Σ est appelée section droite, c'est l'intersection d'un plan Π perpendiculaire à la fibre moyenne et de la poutre.

Sections droites particulières :

Section origine : section droite dont le centre de gravité est l'origine de la courbe Γ .

Section extrémité : section droite dont le centre de gravité est l'extrémité de la courbe Γ .

Section médiane : section droite dont le centre de gravité est le milieu de la courbe Γ .

Définition 3 : Fibre moyenne.

La courbe Γ est appelée fibre moyenne, c'est l'ensemble des centres de gravité des sections droites.

Conventionnellement, la poutre est représentée par sa fibre moyenne. Les actions mécaniques appliquées à une poutre doivent donc être ramenées à la fibre moyenne ; elles seront donc ponctuelles ou linéaires.

Poutres particulières :

Poutre droite : fibre moyenne droite.

Poutre plane : fibre moyenne plane.

Poutre gauche : fibre moyenne gauche.

Poutre à section variable ou à section constante : la section varie ou non le long de la poutre.

Poutre à plan moyen : poutre plane symétrique par rapport à un plan contenant la fibre moyenne.

Remarques :

1. La théorie des poutres est adaptée aux structures de génie civil, car une dimension des éléments est prépondérante par rapport aux deux autres.
2. La philosophie de la théorie des poutres consiste à concentrer chaque section droite en un point : on perd de l'information mais on simplifie le problème (calcul unidimensionnel).

Définition 4 : Structure

Une structure est un assemblage de poutres.

Structures particulières :

Structure plane : l'ensemble des fibres moyennes sont dans un plan.

Structure plane à plan moyen : structure plane à plan de symétrie (a fortiori, toutes les poutres de la structure sont donc des poutres planes à plan moyen).

Définition 5 : Nœud

Dans une structure, les extrémités et origines des poutres s'appellent nœuds, ils sont à la jonction entre poutres ou entre une poutre et l'extérieur. Une structure se décompose en poutres et nœuds.

1.2.2 Domaine de validité

1. Les dimensions transversales doivent être petites par rapport aux dimensions longitudinales. $\frac{1}{40} < \frac{h}{\ell} < \frac{1}{5}$ ($\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{15}$ en bâtiment)
2. La section doit être suffisamment massive. $b < h < 10b$
3. Pas de variation brusque de courbure $R > 5h$
4. Pas de variation brusque de dimensions transversales.

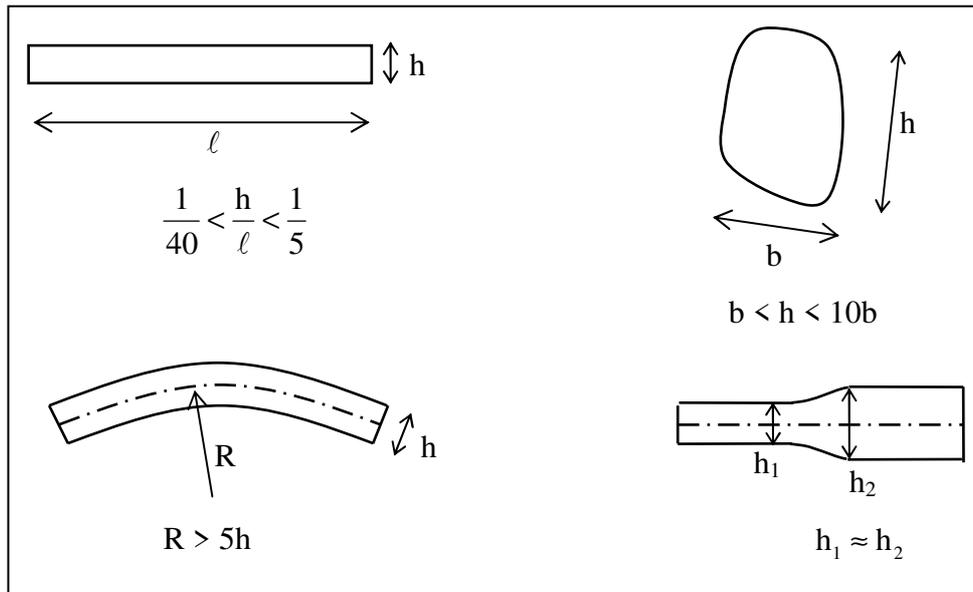


Fig. 1.3 – Domaine de validité

1.2.3 Repère global

Afin de définir une structure, nous devons préciser les différents nœuds constitutifs de la structure.

Les coordonnées des nœuds sont données dans un repère global (à la structure).

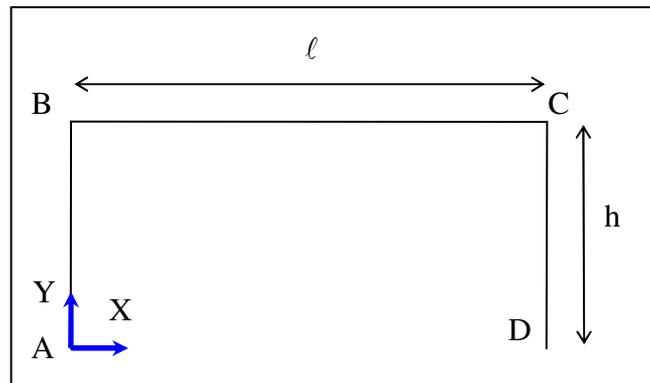


Fig. 1.4 – Repère global dans une structure

Dans l'exemple de la Fig. 1.4, les coordonnées des nœuds dans le repère global sont respectivement :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} \ell \\ h \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2.4 Repère local

1.2.4.1 Définitions

Le but de la RDM étant de valider en tout point la structure étudiée, il est nécessaire de repérer chaque point de la structure.

Repérage de la poutre dans la structure : une poutre sera repérée par son nœud origine et son nœud extrémité ; les coordonnées de ces nœuds étant exprimées dans le repère global.

Repérage d'une section dans une poutre : une section sera repérée par son abscisse curviligne à partir de l'origine de la poutre.

Repérage d'un point dans une section : un point sera repéré par ses coordonnées dans un repère associé à la section droite, appelé repère local.

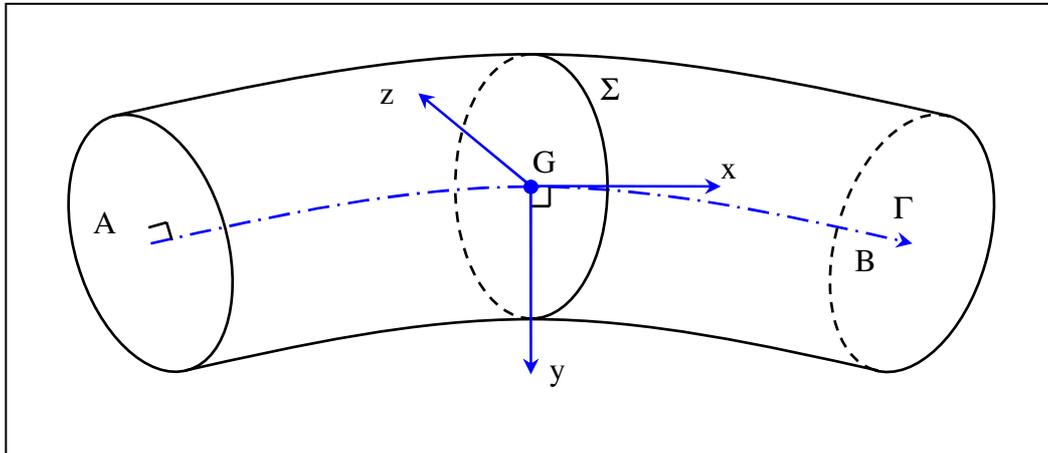


Fig. 1.5 – Repère local – Définition

Définition 6 : Repère local

Le repère local associé à une section droite Σ a pour origine le centre de gravité G de la section droite, l'axe x est tangent à Γ et dans le sens défini par Γ , les axes y et z sont des axes principaux d'inertie (cette notion sera abordée au paragraphe 4.7 Variation d'inertie)

Remarque :

1. Il n'est pas nécessaire de développer cette notion pour l'instant, et de se servir de la propriété suivante : tout axe de symétrie est axe principal d'inertie (ce qui est le cas dans la plupart des sections droites des poutres rencontrées en génie civil).
2. Dans la mesure du possible, l'axe y est dirigé vers le bas.

Définition 7 : Repère courant

Dans le cas des poutres droites à section constante, tous les repères locaux se déduisent les uns des autres par une translation sur la fibre moyenne, il suffit donc de représenter un seul repère local sur une section intermédiaire ; ce repère est appelé repère courant.

A l'aide du repère local, nous pouvons définir les fibres extrêmes.

Définition 8 : Fibre supérieure et inférieure

Dans une poutre, le lieu des points où y est minimum (resp. maximum) est appelé fibre supérieure (resp. fibre inférieure).

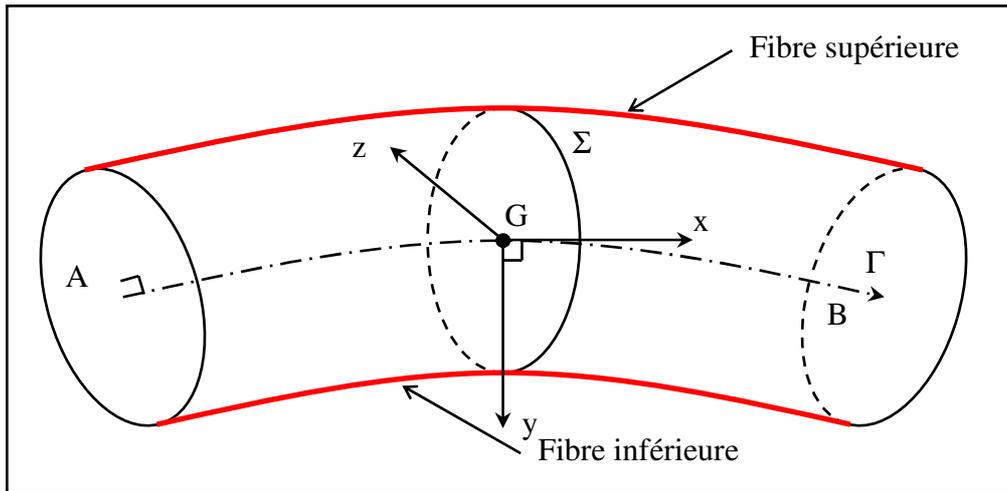


Fig. 1.6 – Fibre supérieure et inférieure

1.2.4.2 Représentation dans une section droite

Lorsque l'on représente une section droite en plan, on la positionne tel que l'axe x vienne vers soit.

L'axe z se déduit donc de l'axe y par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

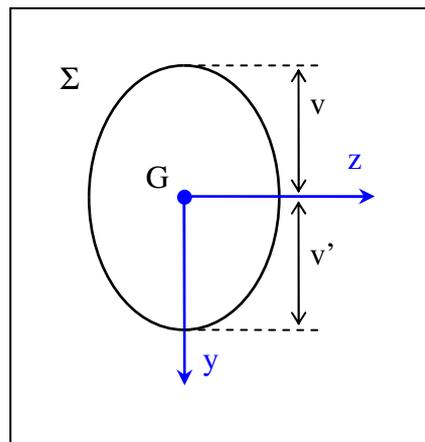


Fig. 1.7 – Repère local dans une section droite

Remarque :

La fibre supérieure se situe à $y = -v$

La fibre inférieure se situe à $y = v'$

1.2.4.3 Représentation dans une structure plane à plan moyen

Dans une structure plane à plan moyen, on choisit les axes y des différentes poutres dans le plan de symétrie ; lorsque l'on représente cette structure, on positionne les axes z fuyant.

L'axe y se déduit donc de l'axe x par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens horaire.

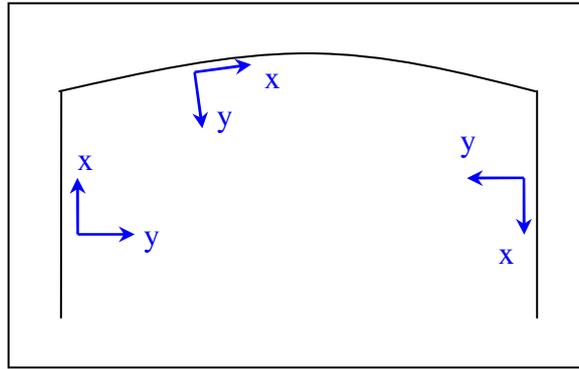


Fig. 1.8 – Repère locaux dans une structure

1.3 Modélisation des actions

1.3.1 Les actions mécaniques

Les actions mécaniques sont par définition la cause de toute modification du mouvement ou du repos d'un corps.

On distingue dans les actions mécaniques, celles qui communiquent un mouvement de translation (les forces) et celles qui communiquent un mouvement de rotation (les couples).

1.3.1.1 Les forces

Une force \vec{F} est caractérisée par un vecteur et un point d'application.

La droite engendrée par le point d'application et le vecteur associé à la force se nomme droite d'action de la force \vec{F} .

L'intensité de la force est la norme du vecteur associé noté F , elle s'exprime en N (Newton).

On peut décomposer une force \vec{F} en deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 si elles ont même point d'application que \vec{F} et si $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

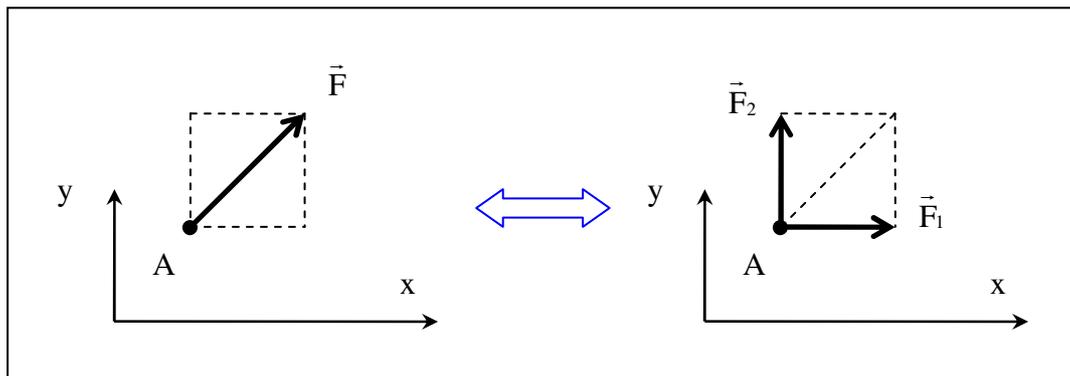


Fig. 1.9 – Forces – Décomposition

1.3.1.2 Les couples

Un couple \vec{C} est caractérisé par un vecteur et un point d'application.

L'intensité d'un couple est la norme du vecteur associé.

L'axe de rotation est l'axe du vecteur.

La composante d'un couple sur son axe sera positive si la rotation est trigonométrique, négative dans le cas contraire ; les composantes sur les autres axes sont nulles.

Un couple peut se décomposer avec les mêmes règles que les forces.

La représentation d'un couple doit se différencier de celle de la force ; on utilise couramment une flèche courbe ou d'autres symboles présentés ci-après.

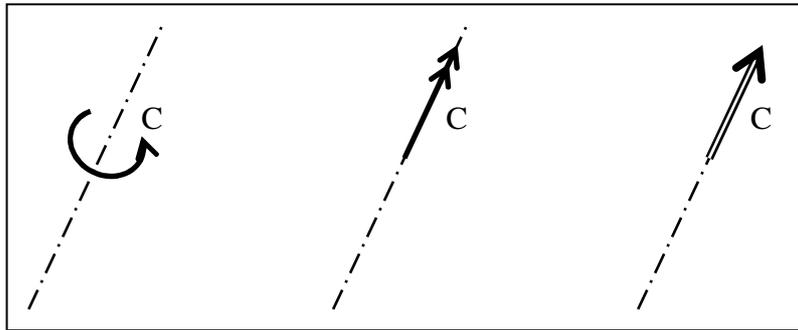


Fig. 1.10 – Couples - Représentation

1.3.1.3 Principe d'action réaction

Lorsque deux solides S_1 et S_2 sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre des actions de contact. Les actions de S_1 sur S_2 ont les mêmes directions et intensité, mais sont de sens contraire par rapport aux actions de S_2 sur S_1 .

Exemple : dans le cas où le contact permet la transmission d'une force et d'un couple, nous avons : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{C}_{1/2} = -\vec{C}_{2/1}$

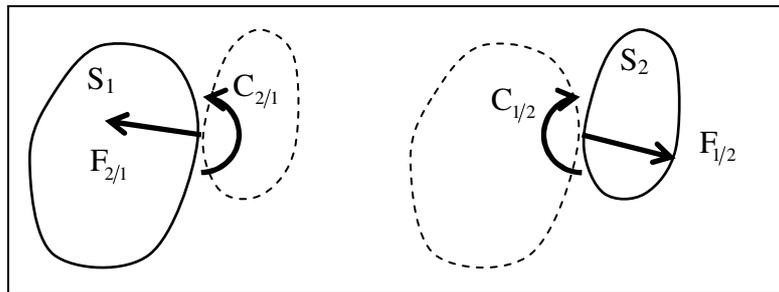


Fig. 1.11 – Exemple principe d'action réaction

Remarque : afin qu'il n'y est aucune ambiguïté, il ne faut isoler qu'un seul des deux solides S_1 ou S_2 pour représenter les actions de contact.

1.3.1.4 Moments

Le moment vectoriel d'une force \vec{F} appliquée en A par rapport à un point B est défini par :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}.$$

Ce moment peut se projeter sur trois axes orthogonaux.

Considérons l'axe Δ de vecteur unitaire \vec{k} perpendiculaire aux vecteurs \vec{BA} et \vec{F} suivant la Fig. 1.12

Soit d la distance entre la droite d'action de \vec{F} et l'axe Δ est appelé bras de levier.

Nous avons :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \pm BA.F \sin \alpha \vec{k} = \pm Fd \vec{k}$$

Dans cette expression, le signe est positif si la force tend à engendrer une rotation dans le sens trigonométrique par rapport au vecteur unitaire \vec{k} , négatif dans le cas contraire.

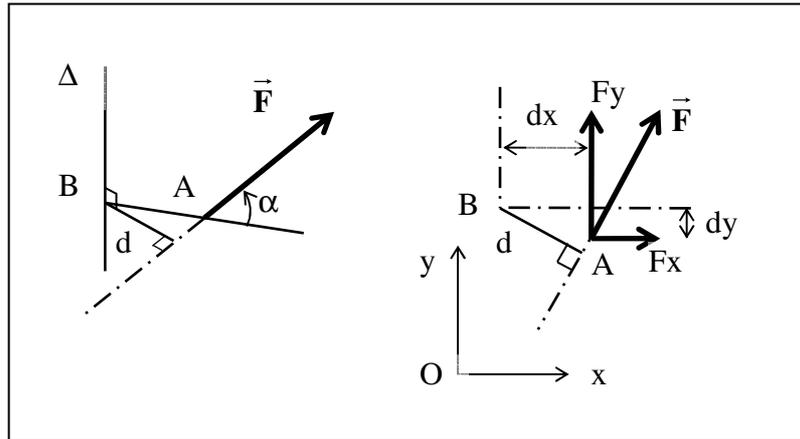


Fig. 1.12 – Moments – Bras de levier

Dans le cas où tout le problème est défini dans un plan (O, x, y) , l'axe Δ est de direction z , le moment vectoriel n'a une composante non nulle que sur l'axe z ; cette composante est appelée moment algébrique par rapport au point B ou moment (tout simplement) noté M_B .

On peut calculer ce moment de deux façons :

Par le bras de levier : $M_B(\vec{F}) = \pm Fd$

Par la décomposition de la force : $M_B(\vec{F}) = \pm F_x d_y \pm F_y d_x$

Dans ces expressions, le signe est positif si la force tend à engendrer une rotation dans le sens trigonométrique, négatif dans le cas contraire.

Toujours dans les problèmes plans :

Le moment algébrique d'un couple \vec{C} d'intensité C de direction \vec{k} est : $M_B(\vec{C}) = \pm C$; le signe est positif si le couple est de sens trigonométrique, négatif dans le cas contraire.

Remarque : on peut encore dire que le moment d'un couple c'est lui-même ; par abus de langage, on nommera moment ce qui en fait est un couple.

1.3.1.5 Torseurs

Une action mécanique peut s'exprimer à l'aide d'un torseur (appelé torseur statique).

Ce torseur est défini par un vecteur force, un vecteur moment et un point de réduction autour duquel on calcule le moment vectoriel.

Torseur d'une force ponctuelle :

$${}_A\{T\} = \left\{ \vec{F} \quad \vec{M}_A(\vec{F}) \right\} \quad \text{Dans les problèmes plans : } {}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & M_A(\vec{F}) \end{array} \right\}$$

Torseur d'un couple ponctuel :

$${}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} \quad \text{Dans les problèmes plans : } {}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}$$

1.3.1.6 Force globalement équivalente

Les forces définies au paragraphe 1.3.1.1 sont dites ponctuelles (avec un point d'application) mais leur mode d'application peut être réparti : linéique, surfacique ou volumique. Nous allons être amenés à les considérer de façon globale.

Définition 9 : force globalement équivalente

Une force globalement équivalente à une force répartie est une force ponctuelle égale à la résultante des forces répartie, dont le moment par rapport à un point est le même que celui des forces réparties.

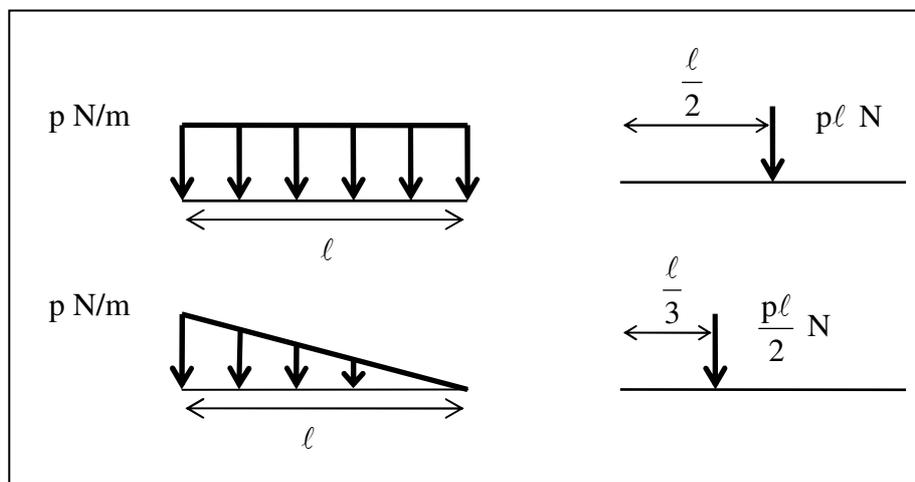


Fig. 1.13 – Forces répartie – Forces globalement équivalentes

Le poids est une force répartie volumique, elle est de plus uniforme.

Soit ρ la masse volumique du solide étudié, le poids volumique vaut : $\rho \vec{g}$, la force globalement équivalente est le poids total $\rho V \vec{g} = \gamma \vec{g}$ (γ est le poids volumique du solide étudié), son point d'application est le centre de gravité du solide étudié.

1.3.2 Actions normalisées

Les intensités des actions exercées sur une structure sont définies par des normes qui se basent sur des mesures statistiques et fournissent des valeurs nominales, ces actions extérieures données sont appelées charges.

Remarque : certaines lettres sont réservées pour dénommer les charges :

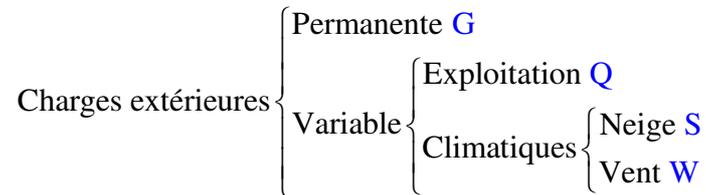
- Charges permanentes : G
- Charges d'exploitation : Q
- Charge de vent : W
- Charge de neige : S

Ces lettres seront en majuscule pour des charges concentrées et en minuscule pour des charges réparties.

On distinguera les charges permanentes, qui seront présentes durant toute la vie de l'ouvrage, des actions variables.

On distingue dans les actions variables les charges d'exploitation et les charges climatiques.

On distingue dans les charges climatiques les charges de vent et les charges de neige.



Exemple de charge permanente :

Eurocode 1

Poids volumique du béton armé : $g = 25 \text{ kN/m}^3$

Exemple de charge d'exploitation :

Eurocode 1

Charge dans une salle de classe : $q = 300 \text{ daN/m}^2$

Charge dans une bibliothèque : $q = 750 \text{ daN/m}^2$

Exemple de charge climatique :

Eurocode 1

Neige à LYON : $s = 45 \text{ daN/m}^2$

Définition 10 : Cas de charge

Un cas de charge est une combinaison d'actions correspondant à un problème réel.

Remarque : pour des facilités de calcul, on peut envisager un cas de charge correspondant à une seule action ; on parle de cas de charge élémentaire. Un cas de charge réel peut donc être défini comme la combinaison de cas de charge élémentaires.

1.4 Modélisation des liaisons

1.4.1 Etude cinématique

L'étude d'une liaison entre deux solides S_1 et S_2 se fait en étudiant les mouvements possibles entre ces deux solides (c'est une étude cinématique).

Remarque : il s'agit bien de mouvements possibles et non réels étant entendu qu'en génie civil, peu de solides sont en mouvements par rapport à d'autres.

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à faire l'étude des liaisons planes (dans le plan) ; nous avons ainsi deux translations possibles (axe x et y) et une rotation possible (axe z) ; ces trois mouvements élémentaires envisagés s'appellent degré de liberté.

Définition 11 : liaisons internes et externes

Les liaisons peuvent être des liaisons entre poutres ou bien entre une poutre et l'extérieur ; elles seront dénommées respectivement liaisons internes et liaisons externes.

L'extérieur sera modélisé par le symbole : $\overline{\overline{\overline{\quad}}}$

Les poutres seront modélisées par leur fibre moyenne conformément à la Définition 3 page 5. Lorsqu'un degré de liberté est bloqué par la liaison, nous avons nécessairement une action mécanique appelée action ou effort de liaison dans la direction du degré de liberté bloqué.
 Remarque : Les symboles utilisés qui seront présentés dans les paragraphes suivants ne sont pas normalisés, mais ils sont couramment rencontrés.

1.4.1.1 Appui simple

Cinématique : une translation (axe x ou y) et une rotation autorisée.

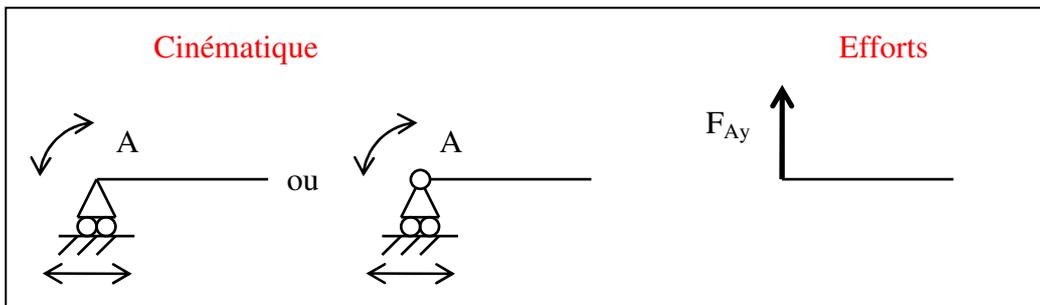


Fig. 1.14 – Appui simple – Modélisation

1.4.1.2 Articulation

Cinématique : une rotation autorisée.

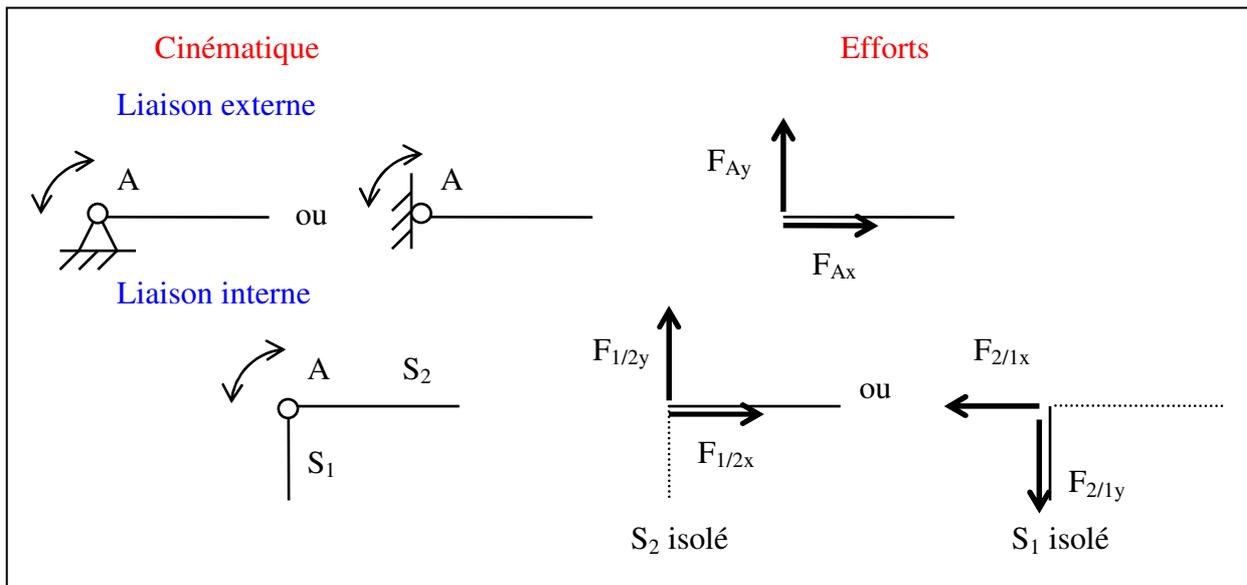


Fig. 1.15 – Articulation – Modélisation

1.4.1.3 Encastrement

Cinématique : aucun degré de liberté autorisé.

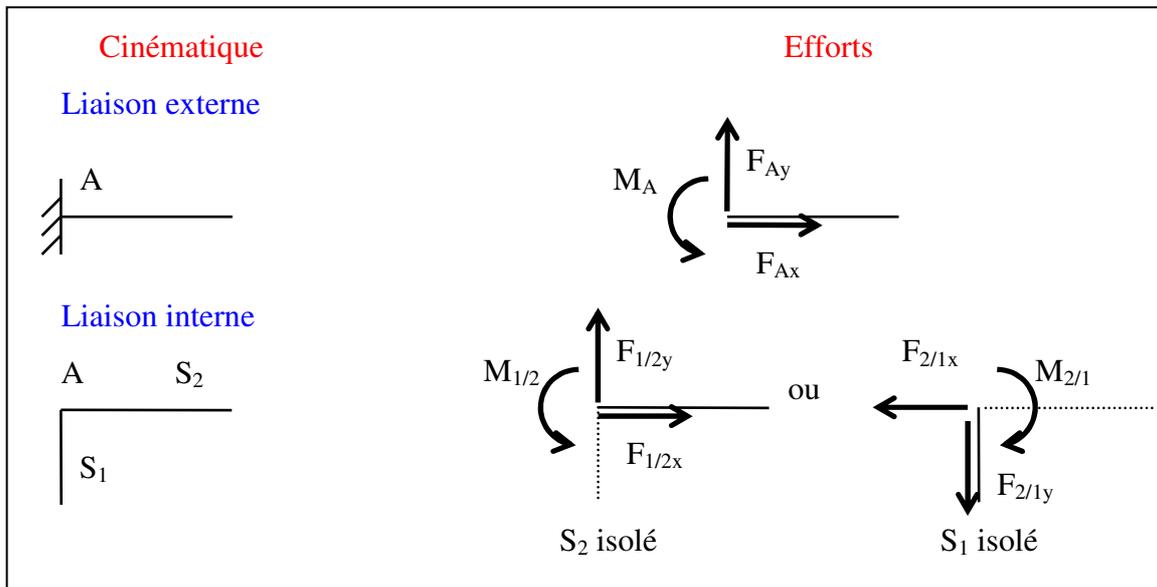


Fig. 1.16 – Encastrement – Modélisation

1.4.2 Liaisons parfaites

Définition 12 : Liaison parfaite

Une liaison est dite parfaite si dans toute cinématique compatible avec la liaison, le travail des actions de liaison est nul.

Remarque :

1. Les trois liaisons types précédemment définies sont des liaisons parfaites.
2. Les champs de déplacement compatibles avec les liaisons sont appelés des champs cinématiquement admissibles.

Exemple de liaison non parfaite :

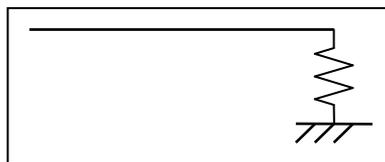


Fig. 1.17 – Liaison non parfaite

Dans ce cas, la liaison autorise un mouvement relatif vertical, mais fait également apparaître un effort de liaison vertical.

1.4.3 Liaisons réelles

Un des problèmes majeurs du mécanicien des structures est de modéliser un problème réel, notamment au niveau des liaisons.

Le choix de la modélisation doit être aussi proche que possible du comportement réel de la liaison, compte tenu de sa réalisation technique.

Il n'est pas possible ici, de passer en revue toutes les liaisons réelles, mais de donner quelques exemples pour mettre en évidence la difficulté de modélisation ; nous laisserons le développement de ce paragraphe aux différents cours sur les matériaux que nous citerons.

1.4.3.1 Béton

Pour empêcher une rotation dans une liaison béton, il faut prolonger des armatures sur une distance suffisante, appelée longueur d'ancrage.

1.4.3.2 Acier

Pour empêcher une rotation dans une liaison acier, il faut assurer la continuité au niveau des semelles.

1.4.3.3 Bois

Pour empêcher une rotation dans une liaison bois, il faut assurer la continuité au niveau des fibres extrêmes.

1.5 Problème plan

De nombreux problèmes de génie civil sont définis dans un plan ; la modélisation correspondante pourra donc se faire dans un plan (O,X,Y) .

Définition 13 : Problème plan

On appelle problème plan, un problème modélisé par une structure plane à plan moyen, avec des liaisons planes et chargée dans ce plan.

Un chargement dans un plan signifie que les forces n'ont pas de composantes sur l'axe Z et que les couples n'ont pas de composantes sur les axes X et Y .

Remarque : l'axe z des repères locaux (G,x,y,z) ne coïncide pas nécessairement avec l'axe Z .

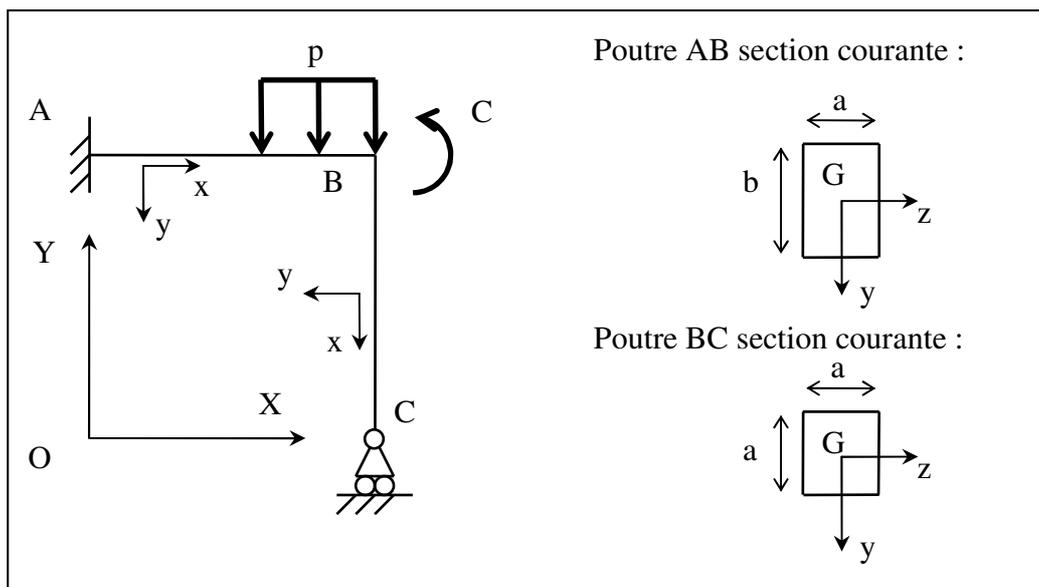


Fig. 1.18 – Exemple de problème plan

1.6 Isostaticité Hyperstaticité

1.6.1 Le Principe Fondamental de la Statique

Un solide est en équilibre si la résultante des forces est nulle et si le moment résultant des actions mécaniques en un point quelconque A est nul.

Cet énoncé peut s'exprimer sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases}$$

Dans le cas des problèmes plan, cet énoncé se résume sous forme scalaire à :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'un solide soumis à trois forces non parallèles, nous disposons d'un énoncé permettant une résolution graphique ; le dynamique étant la somme graphique des forces :

$$\begin{cases} \text{Les droites d'action des forces sont concourantes} \\ \text{Le dynamique est fermé} \end{cases}$$

Dans le cas d'un solide soumis à deux forces :

$$\text{Les forces ont } \begin{cases} \text{même intensité} \\ \text{même droite d'action} \\ \text{sens contraire} \end{cases}$$

1.6.2 Définitions

Pour déterminer les actions des liaisons internes et externes, il faut écrire les équations d'équilibre pour chaque élément de la structure ; une structure se décomposant en poutres et en nœuds.

Définition 14 : Structure isostatique

Une structure est isostatique si et seulement si les équations de la statique permettent de définir complètement les actions de liaison, quel que soit le cas de charge.

Définition 15 : Structure instable

Une structure est instable s'il est impossible de vérifier les équations de la statique, sous un cas de charge. Une telle structure s'appelle également un mécanisme.

Définition 16 : Structure hyperstatique

Une structure est hyperstatique si les équations de la statique ne permettent pas de définir complètement les actions de liaison, quel que soit le cas de charge.

Définition 17 : degré d'hyperstaticité

Dans une structure hyperstatique, si la connaissance de n actions de liaison permet de déterminer toutes les autres, nous dirons que la structure est hyperstatique de degré n ; ces n actions de liaison qu'il faut déterminer au préalable pour résoudre le problème s'appellent inconnues hyperstatiques.

Remarque : dans le cas de structures hyperstatiques, il se peut que l'on puisse arriver à déterminer les actions de liaison externes, mais pas les actions de liaison internes ; on peut dire que la structure est isostatique extérieurement et hyperstatique intérieurement.

Exemple 1 : on considère la structure suivante :

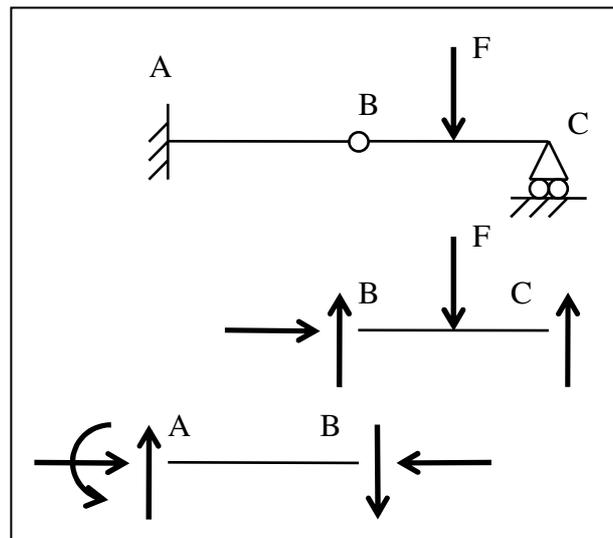


Fig. 1.19 – Exemple de structure isostatique

L'équilibre de la poutre BC permet de déterminer les actions de liaison en B et C sur la poutre BC.

Puis, le principe d'action réaction permet de déterminer les actions de liaison en B sur la poutre AB.

Enfin, l'équilibre de la poutre AB permet de déterminer les actions de liaison en A sur la poutre AB.

Exemple 2 : on considère la poutre suivante :

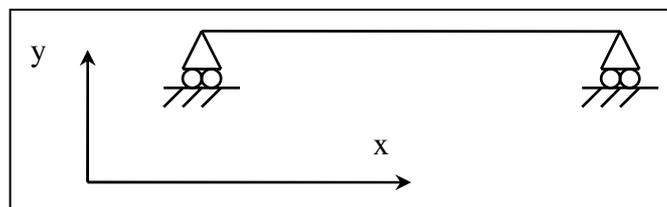


Fig. 1.20 – poutre sur appuis simples

Dans le cas d'un chargement avec une force horizontale, on se rend compte que l'on ne peut pas vérifier l'équation de la statique : $\sum F_x = 0$. La poutre ainsi définie est donc un mécanisme.

Néanmoins si le cas de charge se résume à des forces verticales (selon y), et à des couples, nous pouvons déterminer les actions de liaison.

Cet exemple modélise pourtant un problème réel : pose d'une poutre préfabriquée.

Lors de la pose, la poutre sera bien en équilibre, tant qu'il n'y a pas d'actions horizontales.

Nous avons deux façons de traiter le problème :

1. On garde la modélisation sur deux appuis simples, tout en sachant que la résolution ne reste valable qu'avec un cas de charge particulier ; on prend alors bien en compte la symétrie des liaisons réelles.
2. On modélise la poutre avec un appui simple et une articulation ; ce qui est satisfaisant d'un point de vue mécanique, mais qui ne prend pas en compte la symétrie des liaisons réelles.

1.6.3 Méthode de détermination du degré d'hyperstaticité

1.6.3.1 Nombre d'équations – nombre d'inconnues

Pour la détermination des inconnues de liaisons (actions de liaison inconnues), nous exploitons des équations d'équilibre ; or, nous savons que mathématiquement, il est inutile de développer le calcul s'il n'y a pas autant d'équations d'équilibre (poutres et nœuds) que d'inconnues.

Nous prenons les notations suivantes :

- b : nombre de poutres.
- N_i : nombre de relations imposées par la liaison i .
- ℓ_i : nombre d'inconnues de la liaison i .

Remarque : pour la détermination de N_i , nous pouvons ne pas retenir les liaisons qui se trouvent entre deux solides (poutre-poutre ou poutre-extérieur) et qui ne reçoivent pas de charge, les équations d'équilibre de la liaison sont alors équivalentes au principe d'action réaction.

Nous comparons le nombre d'équations m au nombre d'inconnues n :

- $m = 3b + \sum N_i$
- $n = \sum \ell_i$

$m < n$: structure hyperstatique

$m = n$: structure peut-être isostatique.

$m > n$: structure instable (mécanisme).

Remarque : dans une structure hyperstatique, il est possible que la connaissance de $n-m$ actions de liaison (inconnues hyperstatiques) permette de résoudre le problème ; la structure est probablement hyperstatique de degré $n-m$.

Exemple 1 : considérons la structure suivante :

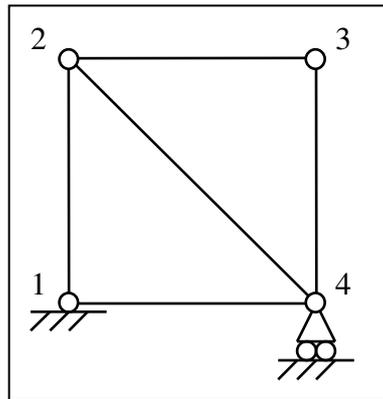


Fig. 1.21 – Degré d’hyperstaticité – Exemple 1

$b = 5$

$N_1 = N_2 = N_4 = 2$

$l_1 = 6, l_2 = 6, l_3 = 2, l_4 = 7$

Nombre d’équations : $m = 15 + 6 = 21$

Nombre d’inconnues : $n = 6 + 6 + 2 + 7 = 21$

Conclusion : structure peut-être isostatique ; pour en être sûr, il faut résoudre complètement le problème avec un cas de charge quelconque ; on admettra ce résultat pour la suite.

Retrouvons ce résultat en analysant graphiquement les équations et les inconnues :

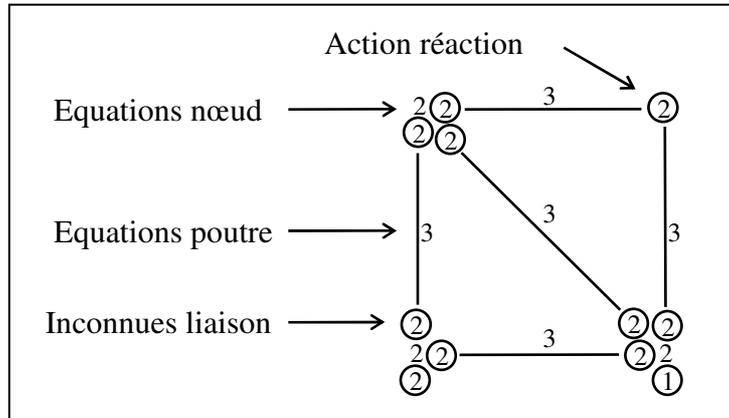


Fig. 1.22 – Equations et inconnues – Exemple 1

Le nombre d’équations est bien égal au nombre d’inconnues.

Exemple 2 : considérons la structure suivante :

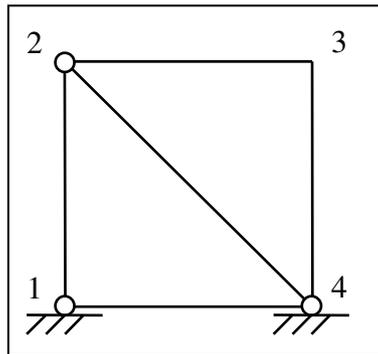


Fig. 1.23 – Degré d'hyperstaticité – Exemple 2

$$b = 5$$

$$N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 3, N_4 = 2$$

$$l_1 = 6, l_2 = 6, l_3 = 6, l_4 = 8$$

$$\text{Nombre d'équations : } m = 15 + 9 = 24$$

$$\text{Nombre d'inconnues : } n = 6 + 6 + 6 + 8 = 26$$

Conclusion : structure hyperstatique ; probablement de degré 2.

Exemple 3 : considérons la structure suivante :

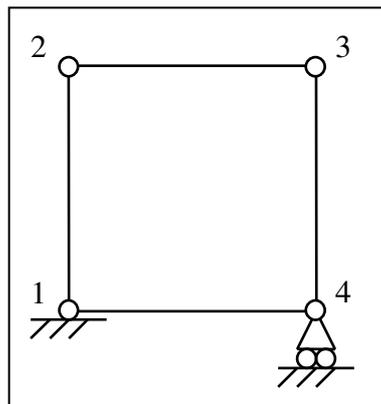


Fig. 1.24 – Degré d'hyperstaticité – Exemple 3

$$b = 4$$

$$N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 2, N_4 = 2$$

$$l_1 = 6, l_2 = 4, l_3 = 4, l_4 = 5$$

$$\text{Nombre d'équations : } m = 12 + 8 = 20$$

$$\text{Nombre d'inconnues : } n = 6 + 4 + 4 + 5 = 19$$

Conclusion : structure instable, mécanisme.

L'instabilité de la structure prend tout son sens sur la cinématique suivante :

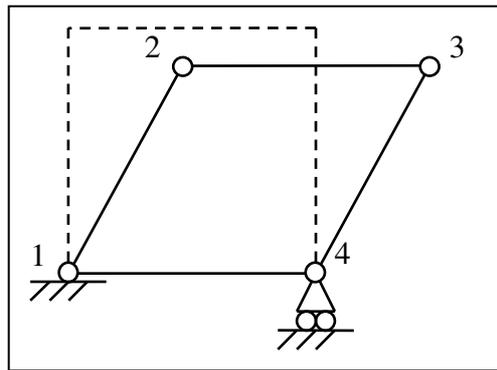


Fig. 1.25 – Mécanisme – Exemple 3

Exemple 4 : considérons la structure suivante :

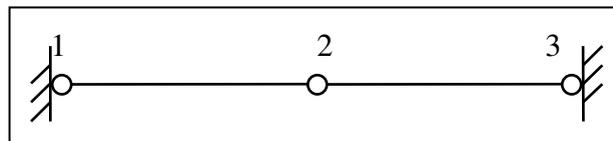


Fig. 1.26 – Degré d'hyperstaticité – Exemple 4

$b = 2$

$N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 2$

$l_1 = 4, l_2 = 4, l_3 = 4$

Nombre d'équations : $m = 6 + 6 = 12$

Nombre d'inconnues : $n = 4 + 4 + 4 = 12$

Bien que l'on ait le même nombre d'équations que d'inconnues, le problème ne peut être résolu ; cette structure est un mécanisme.

Nous allons le prouver en considérant le cas de charge suivant :

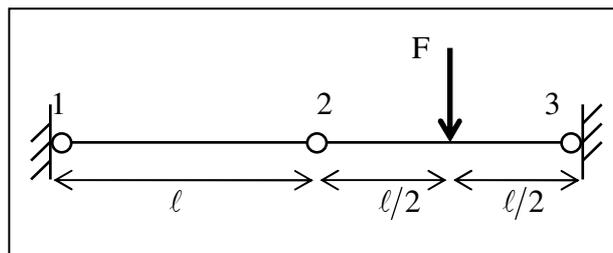
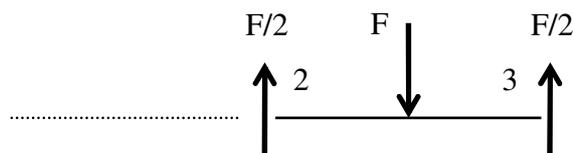
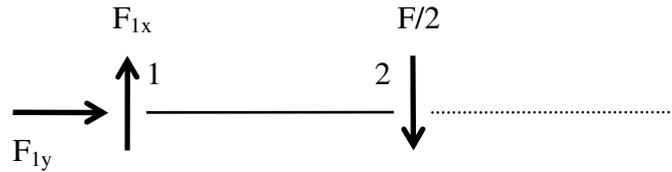


Fig. 1.27 – cas de charge sur un mécanisme

L'étude de l'équilibre de la poutre 2-3 nous donne les actions de liaison sur cette poutre suivantes :



Isolons maintenant la poutre 1-2 et étudions son équilibre :



Le moment résultant au point 1 doit être nul ; ce qui donne : $-\frac{F}{2}\ell = 0$; cette équation de la statique ne peut être vérifiée ; la structure est donc un mécanisme.

Remarque : on peut rencontrer cette structure à l'intérieur d'une autre ; on dira que cette dernière possède un mécanisme local.

1.6.3.2 Structure isostatique associée

Comme on le voit sur l'exemple précédent, l'analyse du nombre d'équations et du nombre d'inconnues ne permet pas toujours d'affirmer un résultat.

Revenons sur la structure de l'exemple 2 soumise à un cas de charge quelconque :

Nous pouvons mettre en évidence deux efforts de liaison, en libérant deux degrés de liberté.

Nous libérons la rotation au nœud 3 ; et nous rajoutons un couple C tel que la rotation relative des deux sections de chaque côté du nœud 3 soit nulle.

Nous libérons la translation horizontale du nœud 4 ; et nous rajoutons un effort F horizontal tel que la translation horizontale du nœud 4 soit nulle.

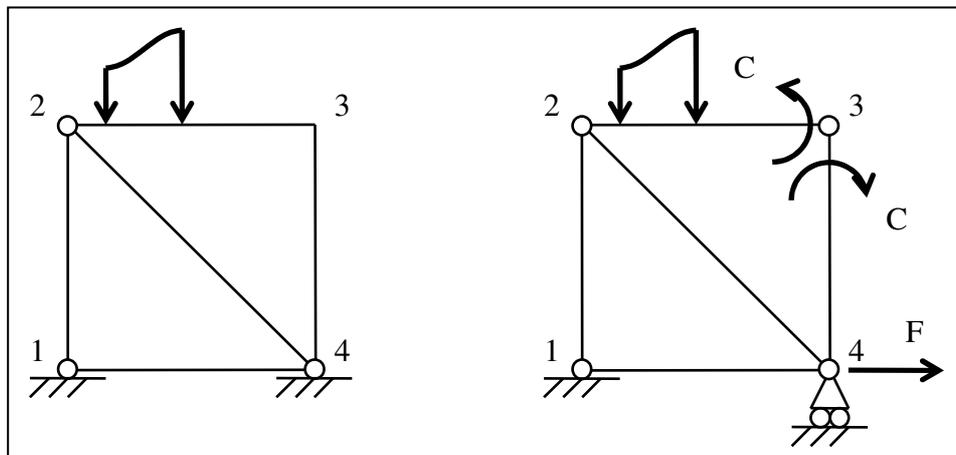


Fig. 1.28 Structure hyperstatique – Structure isostatique associée

Les deux structures ainsi définies sont mécaniquement identiques.

La deuxième structure est isostatique ; d'après la conclusion de l'exemple 1.

La connaissance de deux actions de liaison permet donc de déterminer toutes les autres.

Conclusion : la structure est hyperstatique de degré 2, d'après la Définition 17 : degré d'hyperstaticité page 19.

Définition 18 : Structure isostatique associée

Une structure isostatique associée est une structure isostatique obtenue en libérant des degrés de liberté d'une structure hyperstatique ou en bloquant des degrés de liberté d'un mécanisme.

Nous disposons maintenant d'une autre méthode de détermination du degré d'hyperstaticité :

Si en libérant n degrés liberté dans une structure, on obtient une structure isostatique (donc isostatique associée), la structure initiale était hyperstatique de degré n .

Remarques :

1. Cette méthode permet de mettre en évidence des inconnues hyperstatiques.
2. La détermination d'une structure isostatique associée n'est pas unique.

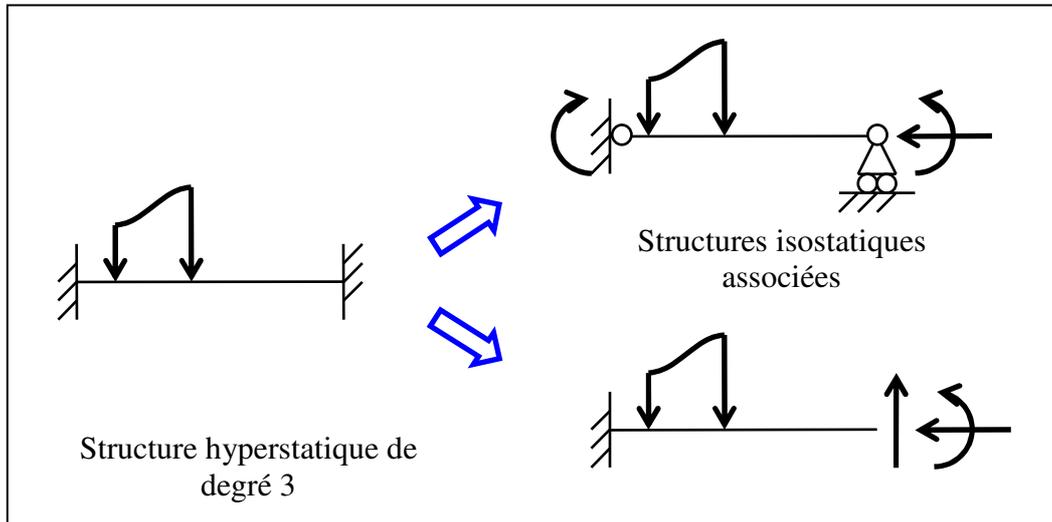


Fig. 1.29 – Choix d'une structure isostatique

Exercice 1 : Modélisation charge de neige

Déterminer la charge de neige sur une toiture terrasse de l'école selon :

Eurocode 1 - Actions sur les structures

Partie 1-3 : Actions générales - Charges de neige

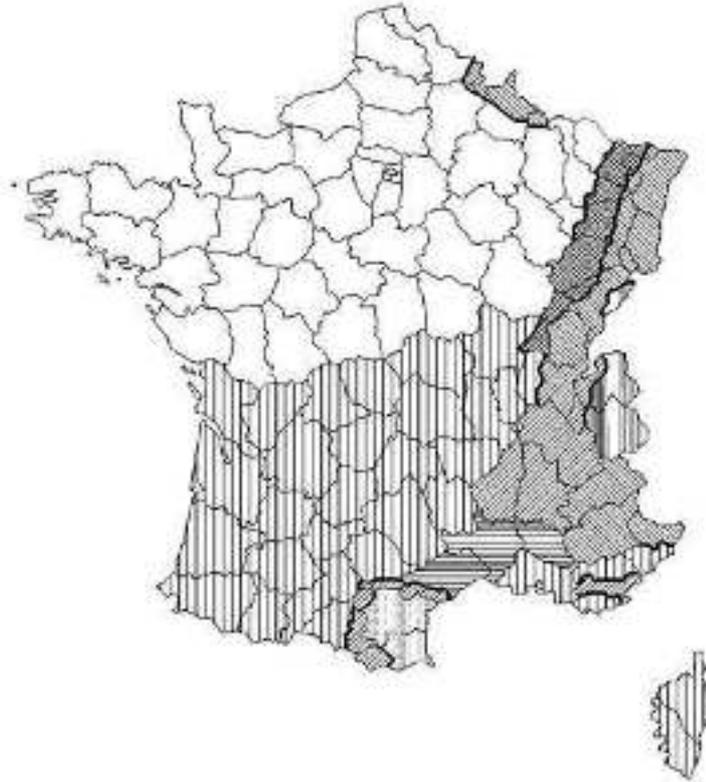
Annexe nationale à la NF EN 1991-1-3 :2004

$$s = \mu_1 \cdot C_e \cdot C_t \cdot s_k$$

pour les actions accidentelles :

$$s = \mu_1 \cdot C_e \cdot C_t \cdot s_{ad}$$

s_k est une valeur caractéristique en fonction de la région pour une altitude inférieure à 200 m



Régions	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D	E
Valeur caractéristique (S_k) de la charge de neige sur le sol à une altitude inférieure à 200 m :	0,45	0,45	0,55	0,55	0,65	0,65	0,90	1,40
Valeur de calcul ($S_{k,d}$) de la charge exceptionnelle de neige sur le sol :	—	1,00	1,00	1,35	—	1,35	1,80	—
Loi de variation de la charge caractéristique pour une altitude supérieure à 200 :	s_{k1}						s_{k2}	

[charges en KN/m^2]

Cette valeur est majorée pour une altitude supérieure à 200 m

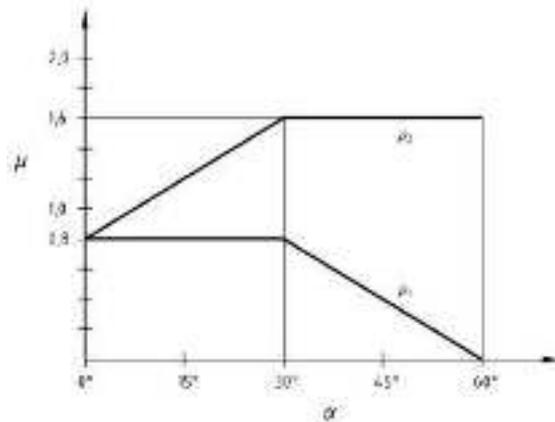
Altitude A	s_{k1}	s_{k2}
de 200 à 500 m	$A/1000 + 0,20$	$1,5 A/1000 + 0,30$
de 500 à 1000 m	$1,5 A/1000 + 0,45$	$3,5 A/1000 + 1,30$
de 1000 à 2000 m	$3,5 A/1000 + 2,45$	$7 A/1000 + 4,80$

C_t est le coefficient thermique tenant compte de la réduction du poids de la neige en fonction du flux de chaleur au travers une toiture dû à une isolation thermique réduite, lequel engendre une fonte de la neige. Une valeur de 1 va dans le sens de la sécurité.

C_e est le coefficient d'exposition.

<p>Lorsque les conditions d'abri quasi permanentes des toitures dues aux bâtiments voisins conduisent à empêcher pratiquement le déblocage de la neige par le vent</p>	C_e 1,25
<p>Conditions normales</p>	1,0

μ_1 est un coefficient fonction de la pente de la toiture



Solution :

Hypothèses : toiture terrasse plane, altitude inférieure à 200 m, isolation thermique satisfaisante, bâtiment non abrité par les bâtiments voisins.

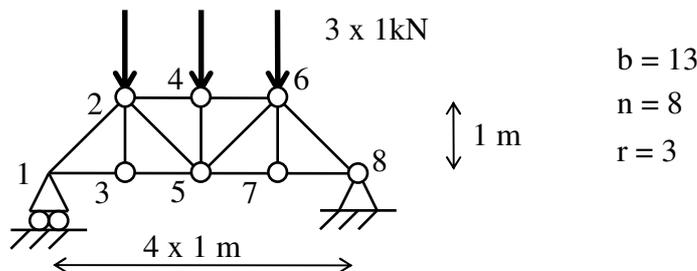
$s_k = 0,45 \text{ kN/m}^2$ $s_{ad} = 1,00 \text{ kN/m}^2$ $C_t = 1$ $C_e = 1$ $\mu_1 = 0,8$
 $s = 36 \text{ daN/m}^2$ action accidentelle : $s = 80 \text{ daN/m}^2$
 Ces valeurs sont données en projection horizontale.

Exercice 2 : Isostaticité des structures réticulées planes

Une structure réticulée plane est une structure plane constituée de barres biarticulées dont le chargement se fait sur les nœuds.
 Une telle structure est aussi dénommée : Treillis plan.

On considère une telle structure faite de b barres et de n nœuds, les liaisons avec l'extérieur (liaisons externes) faisant apparaître r inconnues de liaison en isolant la structure en entier.

Exemple :



Montrer que l'équilibre d'une barre amène à considérer une seule inconnue de liaison interne par barre.
 En déduire le nombre total d'inconnues.

Prouver que l'équilibre de chaque nœud permet l'écriture de 2 équations
 En déduire le nombre total d'équations permettant de trouver les inconnues précédentes.

A quelle condition nécessaire une telle structure est isostatique ?

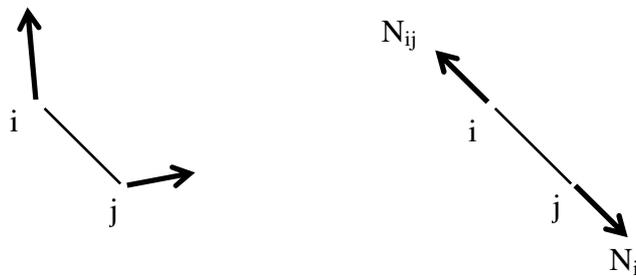
Cette condition est-elle suffisante ?

Solution :

Une articulation transmet un effort horizontal et vertical que l'on peut considérer comme un effort de direction inconnue.

L'équilibre d'une barre bi articulée non chargée (le chargement est au nœud) se ramène ainsi à l'étude d'un solide soumis à 2 forces.

La résolution immédiate nous donne deux efforts ayant même droite d'action et même intensité noté N_{ij}



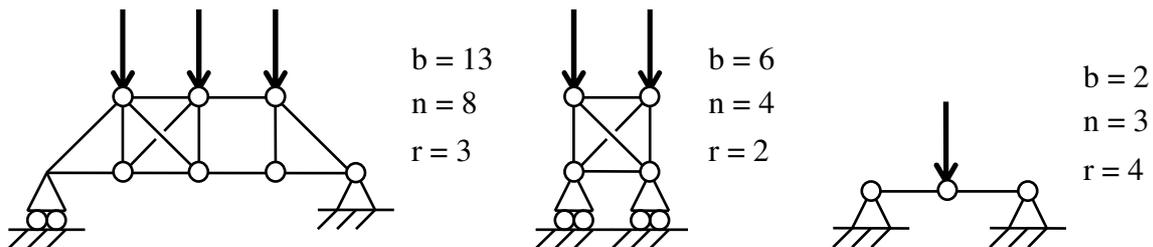
On considère donc une seule inconnue de liaison interne par barre.
 Le nombre d'inconnues total est donc de $b + r$

Il nous reste comme équations d'équilibre celles des nœuds.
 L'équation d'équilibre relative aux moments ne donne aucune condition.
 Nous avons donc 2 équations d'équilibre à exploiter par nœuds.
 Le nombre total d'équations encore inexploitées est donc de $2n$

Pour qu'une telle structure soit isostatique, il est donc nécessaire que : $b + r = 2n$

Dans l'exemple de l'énoncé, $13 + 3 = 2 \times 8$
 La structure est effectivement isostatique

Cette condition n'est pas suffisante comme le prouve les contre exemples suivants où les structures sont des mécanismes :



Chapitre 2 Les outils de la MMC

2.1 Les déformations

2.1.1 Définitions

Les matériaux et les structures utilisés en Génie Civil justifient l'hypothèse de la Mécanique des Milieux Continus : l'hypothèse des transformations infinitésimales.

Soit $\vec{u}(M)$, le déplacement du point M.

$$\vec{u}(M) = \overline{MM'} = u_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3 = \sum u_i \vec{e}_i$$

Le tenseur des petites déformations est défini par :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{ij} \text{ avec } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \text{ c'est un tenseur symétrique.}$$

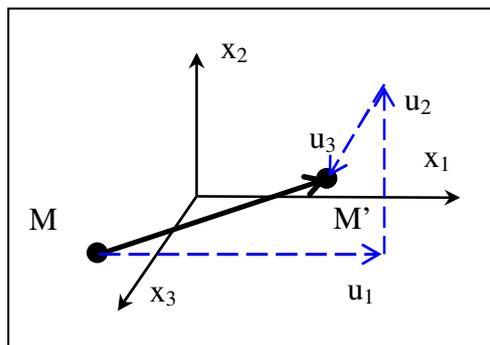


Fig. 2.1 – Déplacement d'un point

Dans le cas des poutres droites de la théorie des poutres, les axes x_1 , x_2 et x_3 seront les axes du repère local x , y et z ; défini à la Fig. 1.5 page 8 ; les vecteurs unitaires correspondants seront notés \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

Définition 19 : Déformation longitudinale

La déformation longitudinale ε_L est la dilatation dans le sens de la longueur de la poutre :

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \vec{i}\varepsilon\vec{i}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, cette déformation sera notée ε .

Définition 20 : Déformations transversales

Les déformations transversales sont les dilatations selon les axes y et z .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{22} &= \vec{j}\varepsilon\vec{j} \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{33} &= \vec{k}\varepsilon\vec{k} \end{aligned}$$

Lorsque ces deux grandeurs sont égales, elles seront notées : ε_T

Définition 21 : Distorsion

La distorsion γ_{12} entre les deux directions orthogonales x_1, x_2 est l'opposé de la variation d'angle entre ces deux directions.

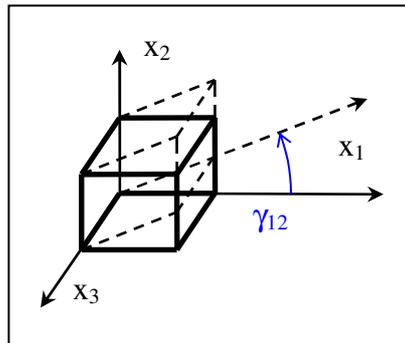


Fig. 2.2 – Distorsion

Les distorsions se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \vec{i}\vec{\varepsilon}\vec{j}$$

Définition 22 : Etat de déformation plane

Un solide est en état de déformation plane, si le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Le tenseur des déformations a l'allure suivante où chaque terme ne dépend que de x_1 et x_2 :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Interprétations

2.1.2.1 Déformation longitudinale

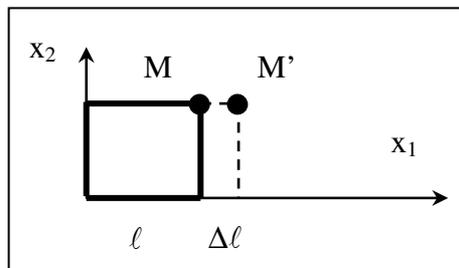


Fig. 2.3 – Interprétation – Déformation longitudinale

Expression des déplacements :

$$\vec{u}(M) = \frac{\Delta \ell}{\ell} x_1 \vec{e}_1$$

D'où l'expression des déformations :

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ sauf } \varepsilon_{11} = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Plus généralement :

ε_{ii} est l'allongement relatif dans la direction x_i .

2.1.2.2 Distorsion

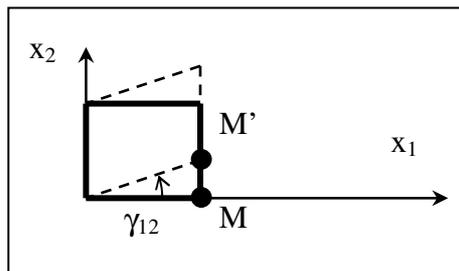


Fig. 2.4 – Interprétation – Distorsion

Expression des déplacements :

$$\vec{u}(M) = \gamma_{12} x_1 \vec{e}_2$$

D'où l'expression des déformations :

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ sauf } \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\gamma_{12}}{2}$$

Plus généralement :

$2\varepsilon_{ij}$ est la distorsion de l'angle (\vec{e}_i, \vec{e}_j) ;

Cette déformation est à volume constant.

2.2 Les contraintes

2.2.1 Vecteur contrainte

A l'intérieur d'un solide, sur une petite surface matérielle δS de normale \vec{n} s'exerce une petite force $\delta \vec{f}$.

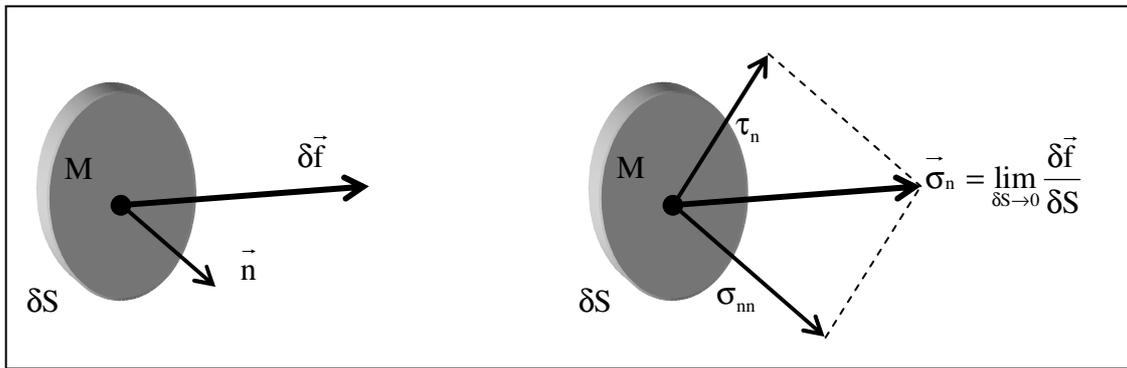


Fig. 2.5 – Vecteur contrainte

Définition 23 : Vecteur contrainte

On appelle vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ en M, sur la facette de normale \vec{n} , la limite lorsqu'elle existe de $\frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$ quand δS tend vers 0.

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n(M) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$$

Remarques :

1. L'équilibre de la surface dS impose : $\vec{\sigma}(M, -\vec{n}) = -\vec{\sigma}(M, \vec{n})$
2. Ce vecteur peut se décomposer en projection sur \vec{n} et perpendiculairement à ce vecteur.

Définition 24 : Contrainte normale

La contrainte normale en un point M sur une facette de normale \vec{n} est la composante σ_{nn} sur \vec{n} du vecteur contrainte :

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$$

Définition 25 : Contrainte tangente

La contrainte tangente en un point M sur une facette de normale \vec{n} est la composante τ_n perpendiculaire à \vec{n} du vecteur contrainte :

$$\vec{\tau}_n = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn} \vec{n}$$

Ces deux dernières définitions sont représentées sur la Fig. 2.5

2.2.2 Tenseur des contraintes

2.2.2.1 Tenseur des contraintes de CAUCHY

Le vecteur contrainte en un point M sur une facette de normale \vec{n} peut s'exprimer à l'aide du vecteur unitaire \vec{n} et d'un tenseur ne dépendant que de M.

Définition 26 : Tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte $\vec{\sigma}_n(\mathbf{M})$ s'exprime à l'aide du tenseur des contraintes de CAUCHY par la relation :

$$\vec{\sigma}_n(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}$$

Le tenseur des contraintes peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Ou encore en théorie des poutres dans le repère local :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Ce tenseur est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Interprétations de σ_{ij} :

σ_{ij} est la composante selon \vec{e}_j du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale \vec{e}_i

$$\vec{\sigma}(\mathbf{M}, \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) \cdot \vec{e}_i = \sigma_{ij}$$

σ_{ii} est la contrainte normale sur une facette de normale \vec{e}_i ; si $\sigma_{ii} > 0$, nous avons une contrainte normale de traction, si $\sigma_{ii} < 0$, nous avons une contrainte normale de compression.

Ces interprétations sont résumées sur la Fig. 2.6

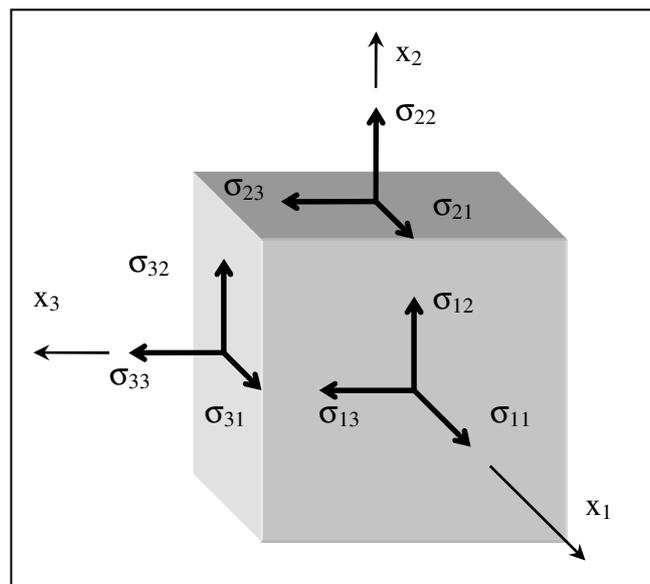


Fig. 2.6 – Interprétation des contraintes

La symétrie du tenseur des contraintes porte sur les contraintes tangentes se nomme également réciprocité des contraintes tangentes.

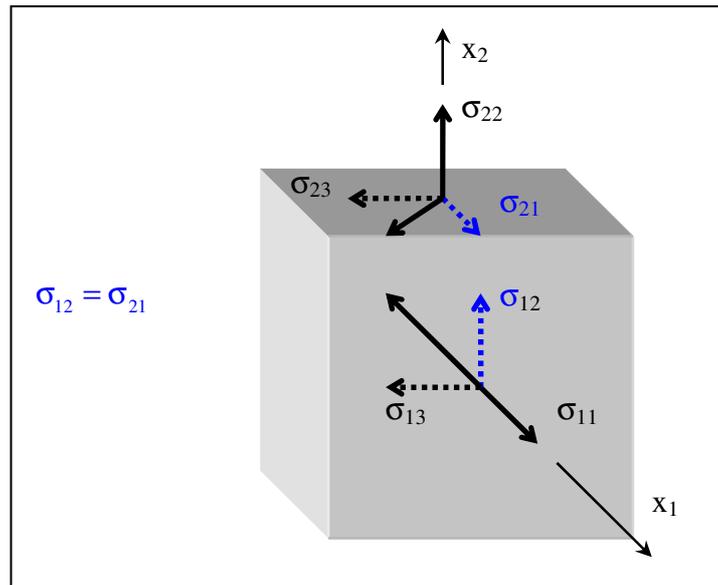


Fig. 2.7 – Réciprocité des contraintes tangentes

2.2.2.2 Directions principales

Définition 27 : Repère principal de contraintes

La matrice σ_{ij} étant symétrique, elle est diagonalisable : il existe un repère orthonormé $(M, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ dans lequel la matrice est diagonale ; ce repère est appelé repère principal de contraintes.

Définition 28 : Directions principales de contraintes

Les directions \vec{j}_1, \vec{j}_2 et \vec{j}_3 sont appelées directions principales de contraintes.

Définition 29 : contraintes principales

Les valeurs propres de la matrice σ_1, σ_2 et σ_3 associées aux directions principales \vec{j}_1, \vec{j}_2 et \vec{j}_3 s'appellent les contraintes principales ; dans le repère $(M, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$, nous avons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

2.2.2.3 Etat de contrainte plane

Les termes σ_{ij} dépendent du point M considéré ; c'est à dire que l'on a $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$.

Définition 30 : Etat de contrainte plane

Un état de contrainte plane est caractérisé par l'existence d'un repère dans lequel le tenseur des contraintes s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce tenseur peut s'écrire et s'utiliser dans le repère $(\mathbf{M}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en ne conservant que ses composantes non nulles

Définition 31 : Tenseur de contrainte plane

Le tenseur de contrainte plane est défini pour un état de contrainte plane :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Les contraintes principales de ce tenseur sont les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associées aux directions principales \vec{j}_1 et \vec{j}_2 ; on choisit conventionnellement $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

2.2.3 Cercle de MOHR

Nous rappellerons ici les résultats relatifs à l'état de contrainte plane.

On considère les facettes de normale \vec{n} , lorsque \vec{n} décrit l'ensemble des directions du plan engendré par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .

On définit le vecteur unitaire \vec{t} tel que le trièdre $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{e}_3)$ soit direct ; cela revient à définir le vecteur unitaire \vec{t} par rotation de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur \vec{n} dans le plan engendré par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .

Le repère lié à la facette $(\mathbf{M}, \vec{n}, \vec{t})$ se déduit du repère défini par les directions principales $(\mathbf{M}, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$ par une rotation d'un angle α .

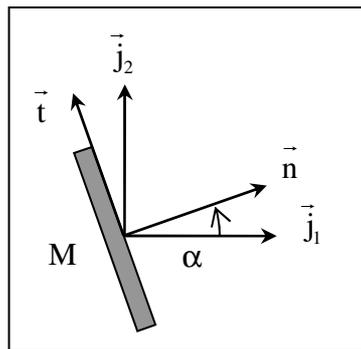


Fig. 2.8 – Repère lié à une facette

Définition 32 : Cercle de MOHR

Le cercle de MOHR est le lieu de l'extrémité du vecteur contrainte dans le repère $(\mathbf{M}, \vec{n}, \vec{t})$

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \vec{n} + \sigma_{nt} \vec{t}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} \\ \sigma_{nt} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{t} \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \\ \sigma_{nt} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{t} \end{cases}$$

σ_{nn} est la contrainte normale en M sur la facette de normale \vec{n}

σ_{nt} est la contrainte tangentielle en M sur la facette de normale \vec{n} ; cette contrainte a un signe contrairement à la contrainte tangente.

Les coordonnées des points du cercle de MOHR (σ_{nn}, σ_{nt}) sont aussi notées (σ, τ).

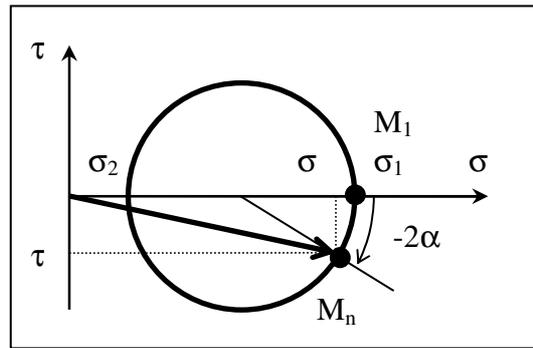


Fig. 2.9 – Cercle de MOHR

On montre que :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\alpha) \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

Remarques :

1. Lorsque la facette tourne d'un angle α , le point représentatif sur le cercle de MOHR tourne d'un angle -2α : M_1 est le point représentatif du vecteur contrainte sur la facette de normale \vec{j}_1 , M_n est le point représentatif du vecteur contrainte sur la facette de normale \vec{n} ($\alpha = (\vec{j}_1, \vec{n})$), M_n s'obtient par construction graphique comme indiqué sur la Fig. 2.9
2. La contrainte tangentielle maximum est obtenue sur des facettes de normales déduites des directions principales de $\frac{\pi}{4}$; elle vaut : $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$
3. Si $\sigma_1 = \sigma_2$, le cercle de MOHR est réduit en un point.

2.3 Les Lois de Comportement

2.3.1 Définitions

Définition 33 : Loi de comportement

Une loi de comportement est une relation liant les contraintes aux déformations.

Elle est obtenue par expérimentation : loi de comportement réelle.

Elle peut être modélisée mathématiquement : loi de comportement modélisée.

Elle peut prendre en compte des coefficients de sécurité réglementaire : loi de comportement réglementaire.

Définition 34 : Loi de comportement élastique

Une Loi est de comportement est élastique si après chargement et déchargement du matériau, les déformations reviennent à 0.

Définition 35 : Loi de comportement linéaire

Une Loi est de comportement est linéaire si la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire.

Définition 36 : Loi de comportement homogène

Une Loi est de comportement est homogène si elle ne dépend pas du point M que l'on considère.

Définition 37 : Loi de comportement isotrope

Une Loi est de comportement est isotrope si elle ne dépend pas des directions que l'on considère.

Exemples :

- Bois : loi de comportement élastique, linéaire, homogène, non isotrope.
- Acier : loi de comportement élastique, linéaire, homogène, isotrope (ceci tant que les contraintes ne dépassent pas certaines valeurs).
- Béton : loi de comportement réelle non élastique, non linéaire, homogène, isotrope.

2.3.2 Loi de HOOKE

La loi de HOOKE est la loi de comportement élastique, linéaire, homogène, isotrope ; elle ne dépend que de deux paramètres :

- E : module d'élasticité ou module d'YOUNG (MPa).
- ν : Coefficient de POISSON.

Définition 38 : Loi de HOOKE

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta}}$$
 avec $\boldsymbol{\delta}$ tenseur unitaire : $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Remarque :

Pour $i \neq j$, $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$ soit : $\sigma_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ij}$; les contraintes tangentielles sont proportionnelles aux distorsions.

Définition 39 : Module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ d'où : } \sigma_{ij} = G \gamma_{ij} \text{ module de cisaillement } G \text{ (MPa)}$$

La loi de HOOKE peut s'inverser, c'est-à-dire exprimer les contraintes en fonction des déformations, ceci se fait à l'aide des coefficients de LAME :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta}}$$
 avec
$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}; \text{ inversement : } \begin{cases} E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases}$$

2.3.3 Application à la théorie des poutres

2.3.3.1 Cas général

En anticipant sur la suite de ce cours, nous montrerons que les tenseurs de contraintes que nous rencontrerons seront de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le tenseur des déformations a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_y & \frac{1}{2}\gamma_z \\ \frac{1}{2}\gamma_y & \varepsilon_T & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_z & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \tau_y = G\gamma_y \\ \tau_z = G\gamma_z \end{cases}$$

2.3.3.2 Cas des problèmes plans

Dans le cas des problèmes plans, nous montrerons que les tenseurs de contraintes que nous rencontrerons seront de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le tenseur des déformations a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \tau = G\gamma \end{cases}$$

2.4 Les critères de limite élastique

2.4.1 Essai de traction

Lors d'un essai de traction, la répartition des contraintes est uniforme dans toute l'éprouvette.

Le tenseur des contraintes exprimé par rapport au repère local de l'éprouvette a la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma = \frac{F}{S} ; S : \text{aire de la section droite.}$$

Tant que F ne dépasse pas une certaine valeur F_e , l'éprouvette retrouve sa configuration initiale ; le matériau est resté dans un domaine élastique.

Lorsque $F = F_e$, le matériau atteint sa limite élastique.

La contrainte normale σ atteint alors une contrainte limite élastique σ_e .

Pour ce type de sollicitations, le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\sigma \leq \sigma_e$$



Pour des types de sollicitations plus complexes, le tenseur des contraintes ne s'exprime pas si simplement ; il faut donc pouvoir travailler avec d'autres critères plus complexes, faisant intervenir les différents termes σ_{ij} du tenseur des contraintes

Ces critères plus généraux devront s'identifier au critère $\sigma \leq \sigma_e$ dans le cas de l'essai de traction.

2.4.2 Critère de TRESCA

Ce critère est adapté aux métaux et aux argiles saturées ; il s'exprime de la façon suivante : la contrainte tangente τ_n ne doit pas dépasser une valeur limite τ_0 .

Dans un état plan de contrainte plane, avec comme contraintes principales σ_1 et σ_2 tels que $\sigma_2 \leq \sigma_1$, la contrainte tangente maximum vaut : $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Dans un état de contrainte quelconque, la contrainte tangente maximum vaut : $\frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$

Par identification à l'essai de traction simple, nous avons : $\frac{\sigma}{2} \leq \tau_0$ et $\sigma \leq \sigma_e$

$$\text{D'où : } \tau_0 = \frac{\sigma_e}{2}$$

Définition 40 : Critère de TRESCA

En fonction des contraintes principales, le critère s'énonce comme suit :

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \leq \sigma_e$$

La représentation de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un cylindre de génératrice la trisectrice et de base un hexagone de régulier de coté : $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_e$.

2.4.3 Critère de VON-MISES

Ce critère est adapté aux métaux; il s'exprime de la façon suivante : l'énergie de déformation $\sum_{i,j} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}$ due aux distorsions (déformations sans variation de volume) ne doit pas dépasser une valeur limite E_{lim} .

Dans un état de contrainte quelconque, cette énergie vaut :

$$\frac{1+\nu}{E} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right)$$

Par identification à l'essai de traction simple, nous avons : $2\frac{1+\nu}{E}\sigma^2 \leq E_{lim}$ et $\sigma \leq \sigma_e$

$$\text{D'où : } E_{lim} = 2\frac{1+\nu}{E}\sigma_e^2$$

Définition 41 : Critère de VON-MISES

En fonction des contraintes principales, le critère s'énonce comme suit :

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sqrt{2}\sigma_e$$

La représentation de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un cylindre de génératrice la trisectrice et de base un cercle de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_e$.

2.4.4 Représentation graphique des critères

Nous représentons ici la trace des critères de TRESCA et de VON-MISES dans un plan perpendiculaire à la trisectrice de l'espace des contraintes principales.

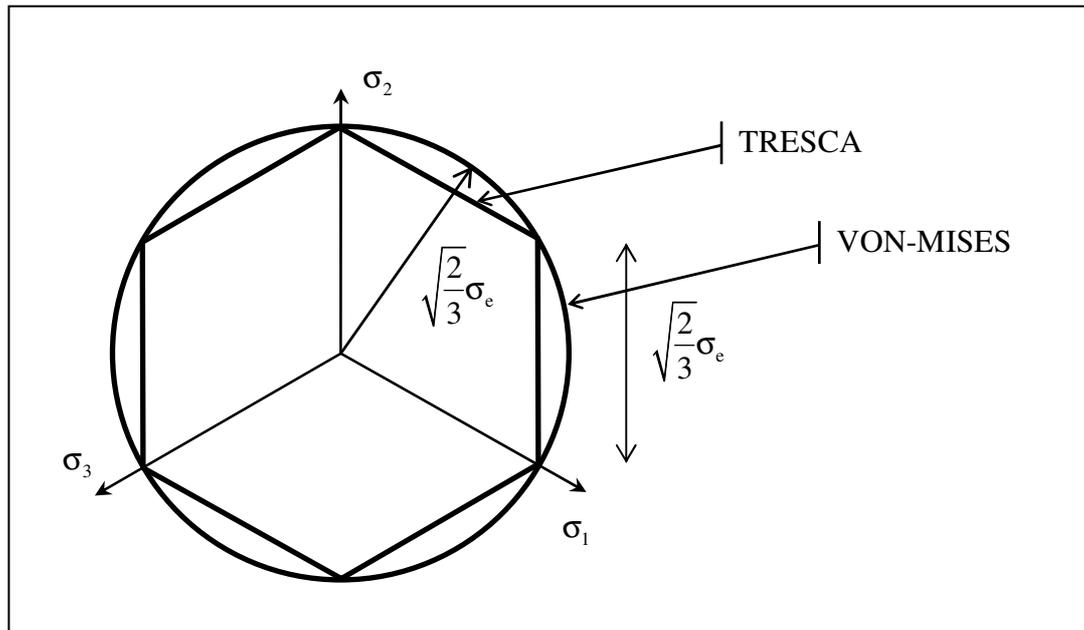


Fig. 2.10 – Critères de TRESCA et de VON-MISES

Remarque :

Ces critères ne tiennent pas compte d'un état de contrainte hydrostatique, de la

forme : $\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$; pour de tel état de contrainte, les critères sont toujours vérifiés.

2.4.5 Application à la théorie des poutres

2.4.5.1 Cas général

En anticipant sur la suite de ce cours, nous montrerons que les tenseurs de contraintes que nous rencontrerons seront de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les contraintes principales sont les valeurs propres de cette matrice ; soit dans l'ordre :

$$\frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \right) \leq 0 \leq \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \right)$$

Ainsi :

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = \sqrt{\sigma^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Le critère de TRESCA s'exprime donc :

$$\boxed{\sqrt{\sigma^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \leq \sigma_e}$$

De même :

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{2(\sigma^2 + 3(\tau_y^2 + \tau_z^2))}$$

Le critère de VON-MISES s'exprime donc :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \leq \sigma_e$$

2.4.5.2 Cas des problèmes plans

Dans le cas des problèmes plans, sous l'hypothèse des « sections massives », nous montrerons que les tenseurs de contraintes que nous rencontrerons seront de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le critère de TRESCA s'exprime donc :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e$$

Le critère de VON-MISES s'exprime donc :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_e$$

Dans le cas où il n'y a pas de contraintes tangentielles, les critères sont identiques et nous retrouvons :

$$\sigma \leq \sigma_e$$

Dans le cas où il n'y a pas de contraintes normales, les critères deviennent :

Critère de TRESCA :

$$\tau \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

Critère de VON-MISES:

$$\tau \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

Exercice 1 : Une loi de comportement simplifiée

On considère un état de contrainte de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'en utilisant la loi de HOOKE, le tenseur des déformations à la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_y & \frac{1}{2}\gamma_z \\ \frac{1}{2}\gamma_y & \varepsilon_T & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_z & 0 & \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

En déduire les nouvelles relations de la loi de comportement de la forme :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \tau_y = G\gamma_y \\ \tau_z = G\gamma_z \end{cases} \text{ avec : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Déterminer le ratio $-\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}$

Solution :

En utilisant la relation : $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta}$, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & \frac{1+\nu}{E}\tau_y & \frac{1+\nu}{E}\tau_z \\ \frac{1+\nu}{E}\tau_y & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\tau_z & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{pmatrix}$$

Ce dernier a bien la forme attendue

En identifiant avec la déformation longitudinale :

$$\sigma = E\varepsilon$$

En identifiant avec les distorsions :

$$\begin{cases} \tau_y = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_y \\ \tau_z = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_z \end{cases}$$

Le ratio entre les déformations transversales et longitudinales vaut :

$$-\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} = \nu$$

On remarque que les lois de comportement sous forme scalaire découplent les contraintes normales et tangentes, le principe de superposition et de linéarité permettront donc de les étudier séparément

Exercice 2 : Un critère mécanique simplifié

On considère une section droite rectangulaire dont la répartition des contraintes dans le repère local est supposée de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma(y) & \tau(y) & 0 \\ \tau(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La répartition des contraintes normale est supposée linéaire



La répartition des contraintes tangentes est supposée parabolique



En utilisant le critère de critère de TRESCA, montrer qu'il suffit de le vérifier en fibre supérieure ($\tau = 0$) et au centre de gravité ($\sigma = 0$) pour qu'il soit vérifié en tout point de la section.

Solution :

Nous sommes dans le cas d'un problème plan pour le quel le critère s'écrit : $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e$

Le critère est supposé respecté en fibre supérieur :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_e$$

Le critère est supposé respecté au centre de gravité:

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

En un point d'ordonnée y :

$$\sigma(y) = -\frac{2y}{h} \sigma_{\max} \quad \text{et} \quad \tau(y) = \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \tau_{\max}$$

On pose $t = \left(\frac{2y}{h}\right)^2$ avec $0 \leq t \leq 1$

En un point d'ordonnée y de la section :

$$\sqrt{\sigma(y)^2 + 4\tau(y)^2} = \sqrt{t\sigma_{\max}^2 + 4(1-t)^2 \tau_{\max}^2} \leq \sqrt{t\sigma_e^2 + 4(1-t)^2 \frac{\sigma_e^2}{4}}$$

D'où :

$$\sqrt{\sigma(y)^2 + 4\tau(y)^2} \leq \sqrt{t + (1-t)^2} \sigma_e$$

L'étude du polynôme $t^2 - t + 1$ sur l'intervalle $[0;1]$ montre $\frac{3}{4} \leq (t^2 - t + 1) \leq 1$

Ainsi :

$$\sqrt{\sigma(y)^2 + 4\tau(y)^2} \leq \sigma_e$$

Et le critère de TRESCA est à fortiori vérifié en tout point de la section.

En pratique les contraintes normales et tangentes ne sont jamais maximales aux mêmes points et l'on vérifie souvent les contraintes normales en supposant les contraintes tangentes nulles :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_e$$

De mêmes les contraintes tangentes sont vérifiées en supposant les contraintes normales nulles :

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

Chapitre 3 Hypothèses fondamentales

3.1 Hypothèse des petites perturbations

3.1.1 Enoncé

Définition 42 : Hypothèse des petites perturbations

Sous l'effet d'un cas de charge, une structure s'écarte peu de sa configuration de référence.

Remarque :

1. On entend par perturbations, les déplacements et les déformations au sein d'une structure ; cette hypothèse peut donc se décomposer en hypothèse des petites déformations et hypothèse des petits déplacements.
2. L'hypothèse des petites perturbations est valide dans nombre d'études en Génie Civil.

3.1.2 Conséquence

L'hypothèse des petites déformations n'est autre que l'hypothèse des transformations infinitésimales de la Mécanique des Milieux Continus.

Cette hypothèse met en place le tenseur de déformation :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{ij} \text{ avec } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

L'hypothèse des petits déplacements implique que la configuration déformée est proche de la configuration naturelle (non chargée) de référence.

Nous écrivons donc les équations d'équilibre dans la configuration non déformée.

Exemple : Nous considérons la structure suivante :

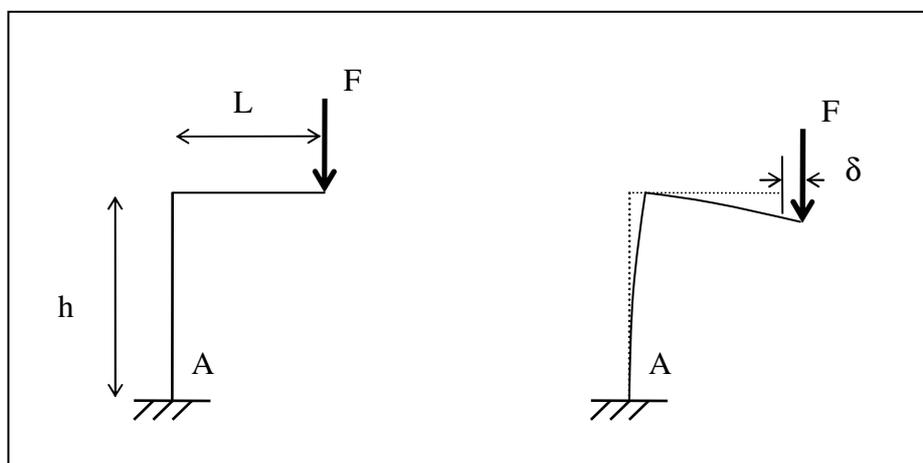


Fig. 3.1 – Configuration de référence et configuration déformée

Déterminons le moment M_A engendré par la liaison encastrement au point A :

Ce moment s'obtient en écrivant l'équilibre de la structure dans la position d'équilibre, soit dans la position déformée : $M_A = F(L + \delta)$.

L'hypothèse des petits déplacements nous permet d'écrire les équations d'équilibre sur la position de référence non déformée soit : $M_A = FL$.

Remarque : cette hypothèse ne pourra plus être valide dans l'étude de structure à forts déplacements telle que l'étude du flambement ou l'étude de structures très souples.

3.2 Principe de NAVIER BERNOULLI

3.2.1 Enoncé

Définition 43 : Principe de NAVIER BERNOULLI

« Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne ».

Ce principe n'est valide que dans certains cas de chargement particuliers ; elle est contredite expérimentalement.

La Fig. 3.2 représente l'état initial et la déformée d'une poutre encadrée à une extrémité et soumise à une charge verticale à son autre extrémité ; on constate en contradiction avec le principe précédemment formulée un gauchissement des sections droites.

Remarque : le gauchissement constaté est souvent d'influence négligeable par rapport à celle des déformations longitudinales.

Définition 44 : Poutre de BERNOULLI

Lorsque l'on prend l'hypothèse de négliger les gauchissements, on parle alors de poutre de BERNOULLI

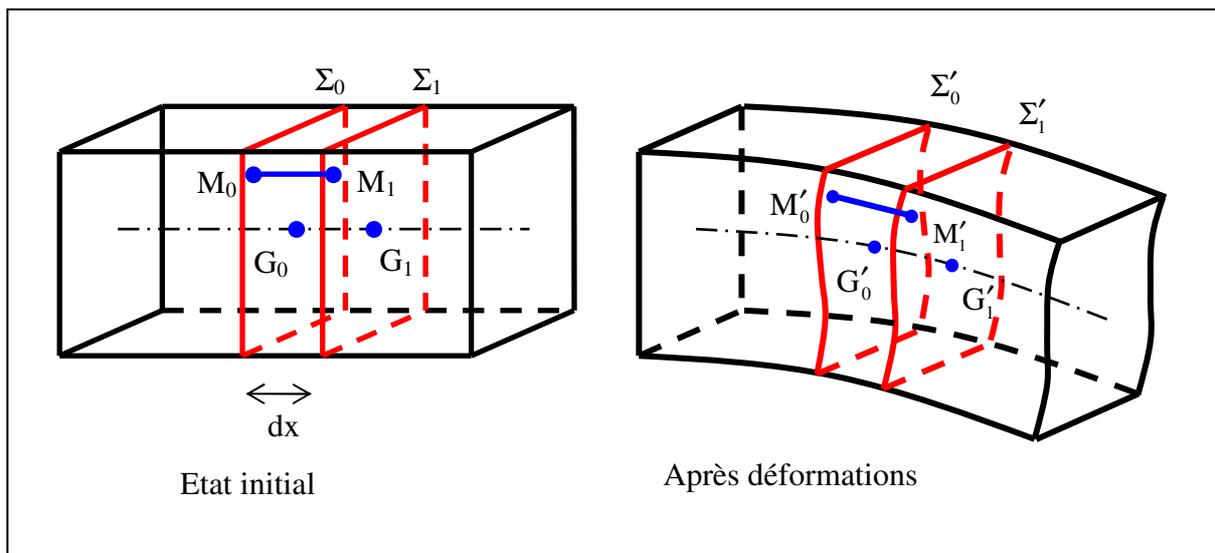


Fig. 3.2 – NAVIER BERNOULLI généralisé

3.2.2 Enoncé : principe de NAVIER BERNOULLI généralisé

Définition 45 : Principe de NAVIER BERNOULLI généralisé

« Deux sections droites infiniment voisines, restent, après déformations, infiniment voisines et superposables par simple déplacement ».

Ce principe plus général, reste valide même si la poutre n'est pas homogène et si la loi de comportement du matériau n'est pas élastique linéaire ; il peut être vérifié expérimentalement sur une poutre en béton armé, après fissuration.

Remarque : ce principe n'en est en fait pas un et il peut être démontré à l'aide des outils de la MMC et du principe de SAINT VENANT.

3.2.3 Conséquence

Les déformations longitudinales en un point M de coordonnée (y, z) dans une section droite, seront une fonction linéaire des variables y et z :

$$\varepsilon = a + by + cz$$

Démonstration :

Nous prenons les notations de la Fig. 3.2

L'allongement de la fibre M_0M_1 vaut : $\overline{M'_0M'_1} - \overline{M_0M_1}$.

On en déduit l'expression de la déformation longitudinale en M_0 :

$$\varepsilon(M_0) = \frac{(\overline{M'_0M'_1} - \overline{M_0M_1})}{dx} \vec{i}$$

De même en G_0 :

$$\varepsilon(G_0) = \frac{(\overline{G'_0G'_1} - \overline{G_0G_1})}{dx} \vec{i}$$

Le simple déplacement entre les sections Σ'_0 et Σ'_1 se traduit par :

$$\overline{M'_0M'_1} = \overline{G'_0G'_1} + d\vec{\omega} \wedge \overline{G'_0M'_0} \text{ avec } d\vec{\omega} : \text{rotations de } \Sigma'_1 \text{ par rapport à } \Sigma'_0.$$

En remarquant que $\overline{G_0G_1} = \overline{M_0M_1}$, nous en déduisons :

$$\varepsilon(M_0) = \varepsilon(G_0) + \left(\frac{\overline{M'_0M'_1} - \overline{G'_0G'_1}}{dx} \right) \vec{i}$$

D'où :

$$\varepsilon(M_0) = \varepsilon(G_0) + \left(\frac{d\vec{\omega} \wedge \overline{G'_0M'_0}}{dx} \right) \vec{i}$$

Soit :

$$\varepsilon(M_0) = \varepsilon(G_0) + \left(\overline{G'_0M'_0} \wedge \vec{i} \right) \frac{d\vec{\omega}}{dx}$$

Les déplacements et la torsion sont très petit par rapport aux dimensions de la poutre, d'où $\overline{G_0M_0}$ et $\overline{G'_0M'_0}$ ont même composantes sur y et z ; ainsi :

$$\overline{G'_0M'_0} \wedge \vec{i} = \overline{G_0M_0} \wedge \vec{i}$$

D'où :

$$\varepsilon(M_0) = \varepsilon(G_0) + (\overline{G_0 M_0} \wedge \vec{i}) \frac{d\vec{\omega}}{dx}$$

Or, $\overline{G_0 M_0} = y\vec{j} + z\vec{k}$ d'où :

$$\varepsilon(M_0) = \varepsilon(G_0) + z \frac{d\vec{\omega}}{dx} \vec{j} - y \frac{d\vec{\omega}}{dx} \vec{k}$$

Le vecteur $\frac{d\vec{\omega}}{dx}$ ne dépend que de x ; donc pour une section droite donnée :

$$\boxed{\varepsilon(M_0) = a + by + cz}$$

Remarque : c'est cette conséquence qui est en fait vérifiée expérimentalement.

3.3 Principe de SAINT-VENANT

3.3.1 Enoncé

Définition 46 : Principe de SAINT VENANT

« Les contraintes (et par suite les déformations) dans une section droite, éloignée des points d'application des efforts extérieurs, ne dépendent que de la résultante et du moment résultant des efforts appliqués à l'une des deux parties séparée par la section droite envisagée »

L'expérience montre en effet que la distribution des contraintes au voisinage des points d'application des efforts extérieurs, diffère notablement de ce qu'indiqueront les formules de la résistance des matériaux.

A une distance de l'ordre de la plus grande dimension transversale de la poutre, l'expérience montre que ces différences sont négligeables.

3.3.2 Conséquence

3.3.2.1 Torseur de cohésion

Une poutre étant orientée, nous pouvons définir la partie à gauche et à droite d'une section droite donnée.

Définition 47 : Torseur de cohésion « par les forces de gauche »

Le torseur de cohésion dans une section droite est le torseur des efforts appliqués à gauche de cette section réduit au centre de gravité G de la section : ${}_G \{T_g\}$.

Remarques :

1. D'après le principe de SAINT VENANT, les contraintes dans une section droite ne dépendent donc que du torseur de cohésion.
2. la poutre étant en équilibre, le torseur résultant en G des efforts appliqués sur la poutre est le torseur nul ; nous en déduisons que le torseur en G des efforts à droite de cette section est l'opposé du torseur en G à gauche de cette section : ${}_G \{T_d\} = -{}_G \{T_g\}$; nous en déduisons une nouvelle définition du torseur de cohésion.

Définition 48 : Torseur de cohésion « par les forces de droite »

Le torseur de cohésion dans une section droite est l'opposé du torseur des efforts appliqués à droite de cette section réduit au centre de gravité G de la section : ${}_{G}\{T_d\}$.

3.3.2.2 Sollicitations, cas général

Dans le repère local, les éléments de réductions du torseur de cohésion portent des dénominations normalisées :

$${}_{G}\{T_g\} = \begin{Bmatrix} N & T \\ V_y & M_y \\ V_z & M_z \end{Bmatrix}$$

Définition 49 : Sollicitations

Les sollicitations sont les éléments de réduction du torseur de cohésion dans le repère local.

- N : Effort normal.
- V_y : Effort tranchant selon y.
- V_z : Effort tranchant selon z.
- T : Moment de torsion.
- M_y : Moment fléchissant selon l'axe y.
- M_z : Moment fléchissant selon l'axe z.

Les sollicitations peuvent être représentées comme indiqué sur la Fig. 3.3 en isolant la partie à droite d'une section, en tant qu'efforts résultant de la partie gauche sur la partie droite de la poutre.

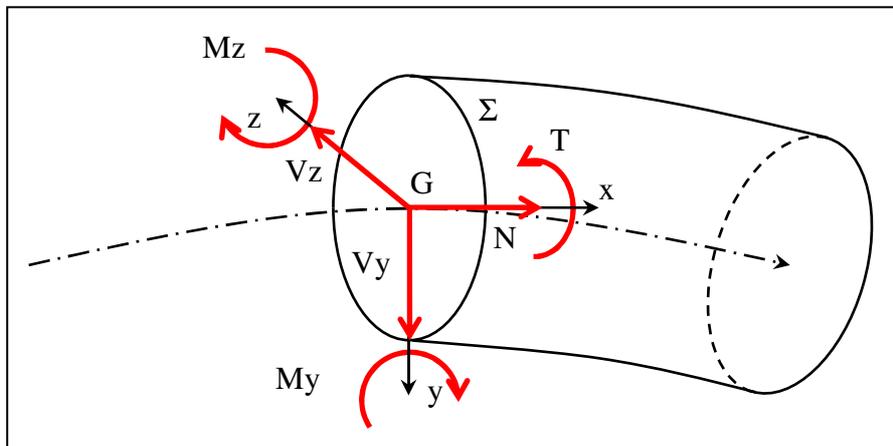


Fig. 3.3 – Sollicitations – Cas général

3.3.2.3 Sollicitations, problème plan

Dans le cas d'un problème plan, il n'y a plus de forces selon l'axe z, ni de moments selon les axes x et y.

Le torseur de cohésion se résume à :

$${}_{G} \begin{Bmatrix} N & 0 \\ V & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}$$

Les sollicitations se résument à :

- N : Effort normal.
- V : Effort tranchant (selon y).
- M : Moment fléchissant (selon l'axe z).

Les sollicitations peuvent être représentées comme indiqué sur la Fig. 3.4 en isolant la partie à droite d'une section, en tant qu'efforts résultants de la partie droite sur la partie gauche de la poutre.

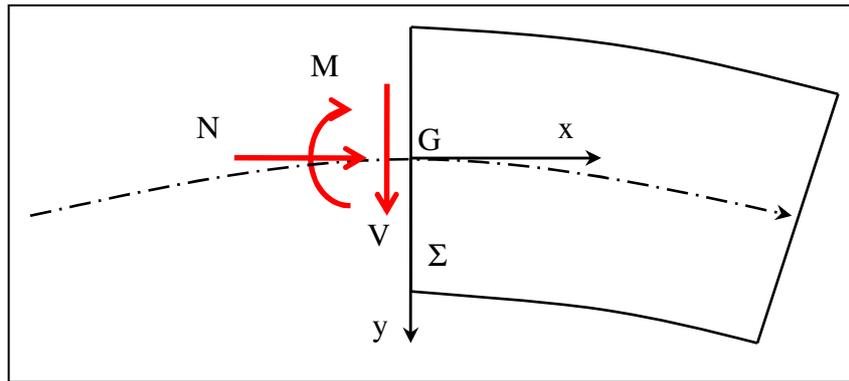


Fig. 3.4 – Sollicitations dans les problèmes plans

3.3.3 Relations Sollicitations Contraintes

Les sollicitations sont une approche globale des efforts dans une section droite.

Les contraintes sont une approche locale des efforts dans une section droite ; les contraintes présentes sur une facette dS appartenant à la section droite sont représentées sur la Fig. 3.5.

Les deux approches devant être équivalentes, on en déduit qu'en intégrant les contraintes sur la section droite, on doit retrouver les sollicitations :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{\Sigma} -\sigma_{xx} dS \\ V_y = \int_{\Sigma} -\tau_{xy} dS \\ V_z = \int_{\Sigma} -\tau_{xz} dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} T = \int_{\Sigma} \tau_{xy}z - \tau_{xz}y dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma_{xx} z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma_{xx} y dS \end{array} \right.$$

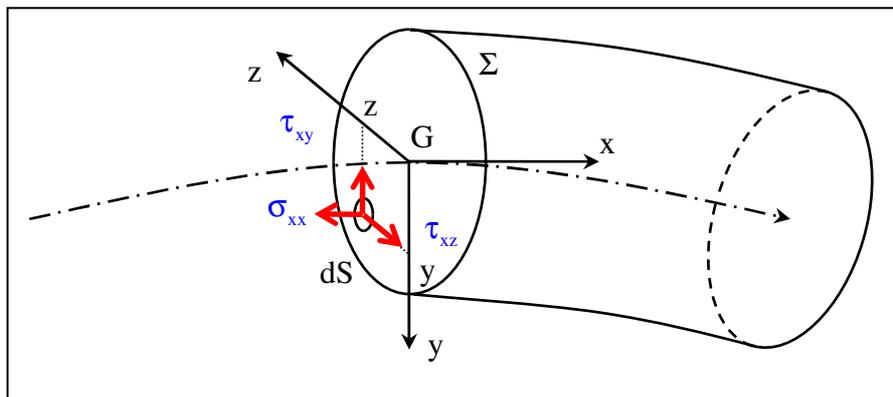


Fig. 3.5 – Contraintes dans une section droite

3.4 Hypothèse sur les contraintes

3.4.1 Cas général

D'après le principe de SAINT VENANT, les contraintes en un point d'une facette appartenant à une section droite, ne dépendent que des sollicitations ; or celles-ci ne sont liées qu'aux contraintes σ_{xx} , τ_{xy} et τ_{xz} .

D'autre part, si l'on considère les cas de charge dans une section droite définis à la Fig. 3.6 ; nous constatons l'existence de contraintes σ_{yy} , σ_{zz} et τ_{yz} bien que les sollicitations soient nulles (d'où la restriction de s'éloigner du point d'application des charges).

Nous pouvons dire que l'hypothèse de SAINT VENANT ne permet plus d'appréhender les contraintes σ_{yy} , σ_{zz} et τ_{yz} dans une section droite et nous ferons l'hypothèse de leur nullité par la suite.

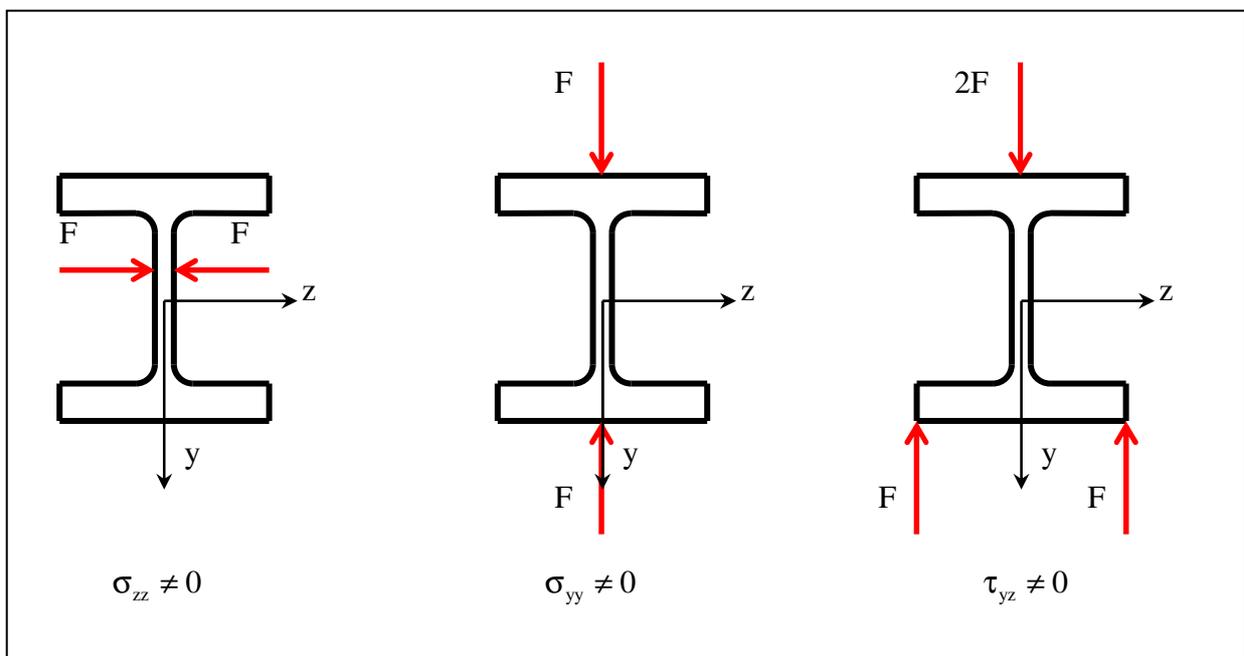


Fig. 3.6 – Limites du principe de SAINT VENANT

Définition 50 : Hypothèse sur les contraintes

Le tenseur des contraintes dans le repère local en théorie des poutres sera de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : En théorie des poutres, nous nous intéresserons essentiellement aux facettes de normale \vec{i} (ou $-\vec{i}$), nous pouvons ainsi omettre sans ambiguïté certains indices du tenseur des contraintes comme indiqué sur la Fig. 3.7 et l'exprimer sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

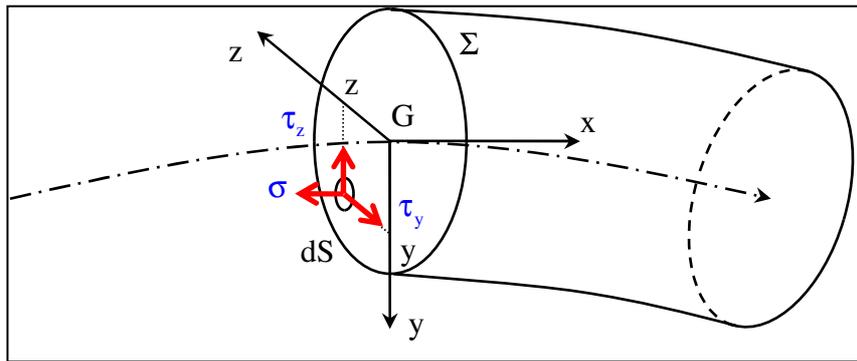


Fig. 3.7 – Contraintes dans une section droite - Théorie des poutres – Cas général

On en déduit les nouvelles relations sollicitations contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ V_y = \int_{\Sigma} -\tau_y dS \\ V_z = \int_{\Sigma} -\tau_z dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} T = \int_{\Sigma} \tau_y z - \tau_z y dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

3.4.2 Problème plan

Pour les problèmes plans, sous l'hypothèse des « sections massives », le tenseur des contraintes est un tenseur de contrainte plane, nous pouvons ainsi omettre sans ambiguïté certains indices du tenseur des contraintes comme indiqué sur la Fig. 3.8 et l'exprimer sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$

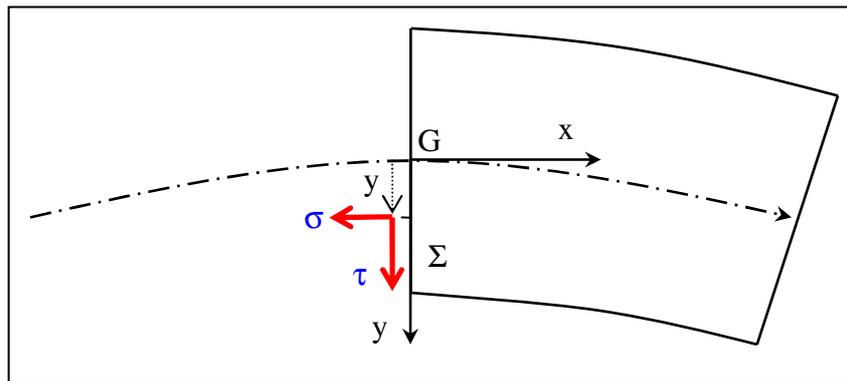


Fig. 3.8 – Contraintes dans une section droite - Théorie des poutres – Problème plan, section massives

On en déduit les nouvelles expressions des sollicitations en fonction des contraintes :

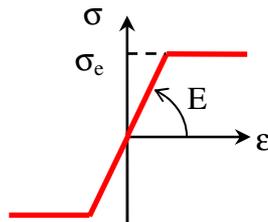
$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ V = \int_{\Sigma} -\tau dS \\ M = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

Exercice 1 : Des contraintes résiduelles

On considère une section rectangulaire soumise à une déformation longitudinale linéaire en y suivante :



Le matériau constitutif de cette section est élasto-plastique parfait :



Cas 1 : Domaine élastique

Déterminer la répartition des contraintes normales limite pour rester dans le domaine élastique

En déduire la résultante et le moment limite élastique correspondant M_e

Déterminer la caractéristique géométrique W_{el} nommée module élastique telle que

$$M_e = W_{el} \sigma_e$$

Cas 2 : Domaine plastique

Déterminer la répartition des contraintes normales telle que $\epsilon_{max} \rightarrow \infty$

En déduire la résultante et le moment limite plastique correspondant M_p

Déterminer la caractéristique géométrique W_{pl} nommée module plastique telle que

$$M_p = W_{pl} \sigma_e$$

Cas 3 : Déchargement à partir du cas 2

On superpose au cas précédant un retour élastique de la forme :



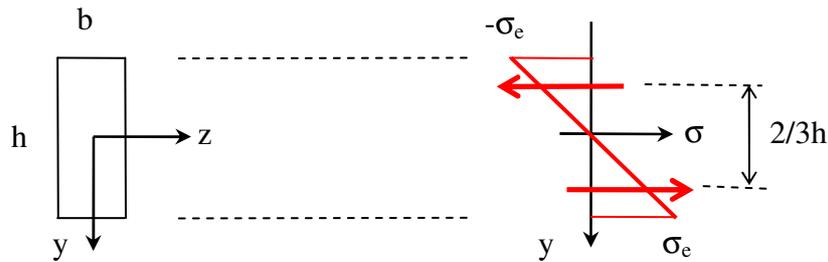
Déterminer la répartition des contraintes telle que le moment correspondant soit nul.

Solution :

Cas 1 : Domaine élastique

Nous sommes à la limite du domaine élastique pour $\epsilon_{max} = \epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$

La répartition des contraintes normales est alors de la forme :



Les forces résultantes sur chaque demi section valent : $\frac{1}{2} \sigma_e b \frac{h}{2}$

D'où le moment résultant en G : $M_e = \frac{1}{2} \sigma_e b \frac{h}{2} \frac{2}{3} h = \sigma_e \frac{bh^2}{6}$

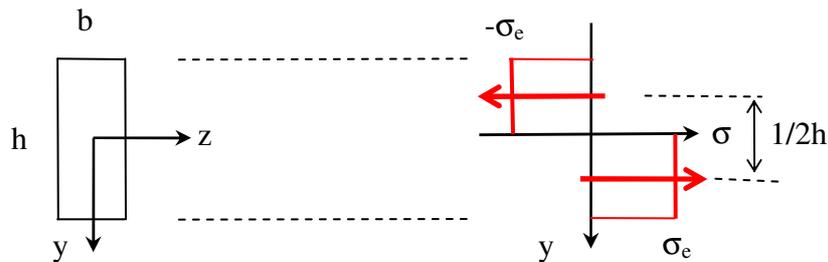
Par analogie avec $M_e = W_{el} \sigma_e$, on détermine le module élastique :

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6}$$

Cas 2 : Domaine plastique

Nous sommes à la limite du domaine plastique pour $\epsilon_{max} \rightarrow \infty$

La répartition des contraintes normales est alors de la forme :



Les forces résultantes sur chaque demi section valent : $\sigma_e b \frac{h}{2}$

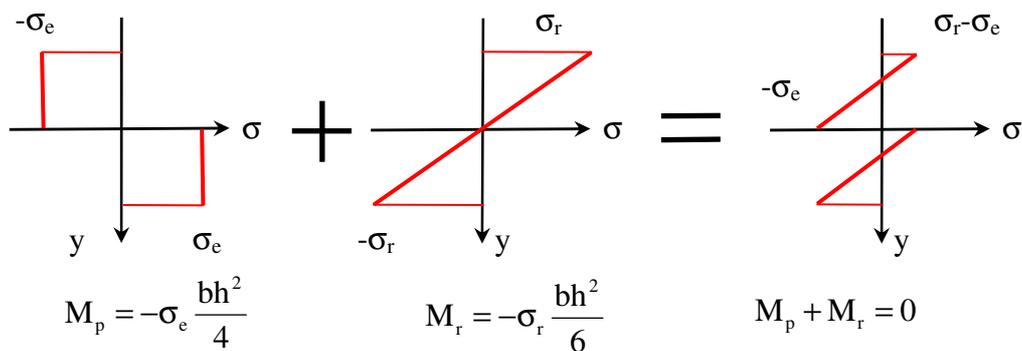
D'où le moment résultant en G : $M_p = \sigma_e b \frac{h}{2} \frac{1}{2} h = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$

Par analogie avec $M_p = W_{pl} \sigma_e$, on détermine le module élastique :

$$W_{pl} = \frac{bh^2}{4}$$

Cas 3 : Déchargement à partir du cas 2

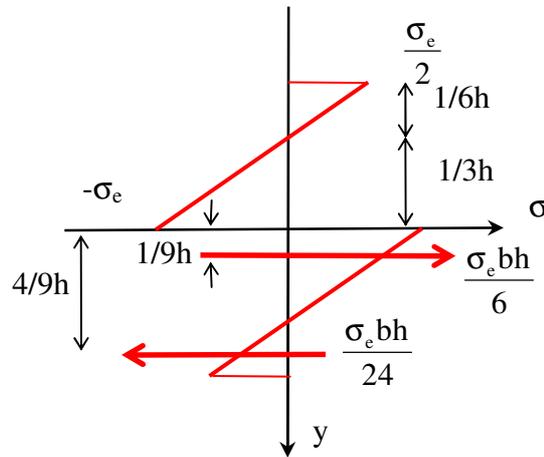
On superpose au cas 2 un état de contrainte élastique pour revenir à un moment nul :



Il est donc nécessaire que : $\sigma_r = \frac{3}{2}\sigma_e$

Le retour est élastique à la condition que $\sigma_r < 2\sigma_e$, ce qui est vérifié.

On en déduit la répartition des contraintes normales :



On peut calculer le moment résultant :

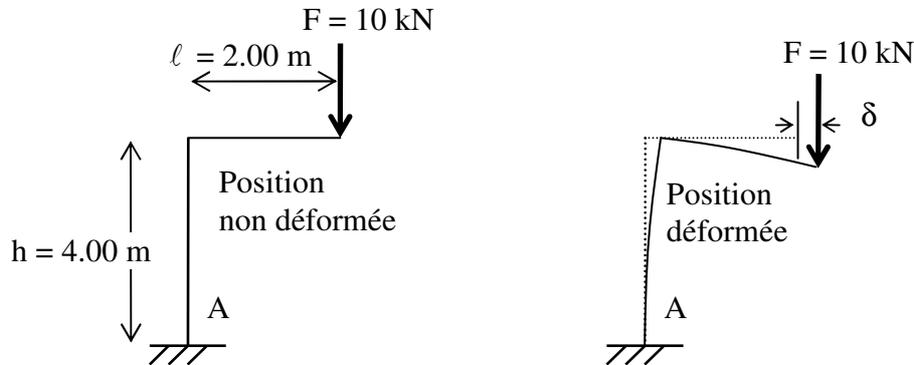
$$M = 2 \left(\frac{\sigma_e b h}{6} \frac{h}{9} - \frac{\sigma_e b h}{24} \frac{4h}{9} \right) = 0$$

Remarque : on met en évidence qu'à partir d'une répartition de contraintes, on détermine un moment correspondant unique ; mais que l'inverse n'est pas vrai (ici, un moment nul ne correspond pas uniquement à une répartition des contraintes nulle), ce qui est en contradiction avec le principe de SAINT VENANT

Un état de contrainte correspondant à une résultante et un moment nul s'appelle un état d'autocontrainte qui ne peut donc pas être envisagé en RDM

Exercice 2 : Equilibre sur position déformée

On considère une potence, réalisée à l'aide de profilés métalliques IPE 180, encadrée en pied et soumise à une force ponctuelle à son extrémité.



Cas 1 : position non déformée

En écrivant l'équilibre sur la position non déformée :

Déterminer le moment d'encastrement en A : M_A

Cas 2 : position déformée

On admet que les équations d'équilibre aboutissent à la formule suivante :

$$\delta = \ell \left(1 - \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} h \right) \text{ avec } E = 200\,000 \text{ MPa et } I = 1317 \text{ cm}^4$$

Calculer le déplacement δ

Déterminer le moment d'encastrement en A : M_A

Calculer l'erreur relative commise par rapport au cas précédent.

Conclure sur l'hypothèse des petits déplacements

Solution :

Cas 1 : position non déformée

$$M_A = F\ell \text{ soit : } M_A = 20 \text{ kN.m}$$

Cas 2 : position déformée

$$M_A = F(\ell + \delta) \text{ avec } \delta = \ell \left(1 - \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} h \right) = 0,0604 \text{ m}$$

$$\text{Application numérique : } M_A = 20,604 \text{ kN.m}$$

En écrivant les équations d'équilibre sur la position non déformée, on commet dans ce cas une erreur d'environ 3%

L'hypothèse des petits déplacements qui permet d'écrire les équations d'équilibre sur la position non déformée est ici acceptable.

Remarque : la formule admise dans un premier temps peut être démontrée à l'aide du chapitre sur le flambement.

Chapitre 4 Caractéristiques géométriques

Les notations de ce chapitre font référence à la norme :

NFP 06-005 : bases de calcul des constructions - notations - symboles généraux

4.1 Aire d'une section

Définition : Aire d'une section

L'aire d'une section droite Σ est définie par :

$$A = \int_{\Sigma} dS$$

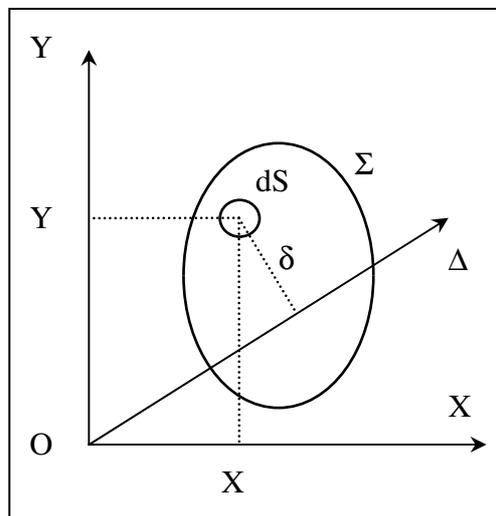


Fig. 4.1 – Aire d'une section

4.2 Moment statique

Définition 51 : Moment statique

Le moment statique d'une section droite Σ par rapport à un axe Δ est définie par :

$$S_{\Delta} = \int_{\Sigma} \delta dS$$

On en déduit :

$$S_X = \int_{\Sigma} Y dS \text{ et } S_Y = \int_{\Sigma} X dS$$

Remarque : Si l'axe Δ est un axe de symétrie, nous avons : $S_{\Delta} = 0$

4.3 Centre de gravité

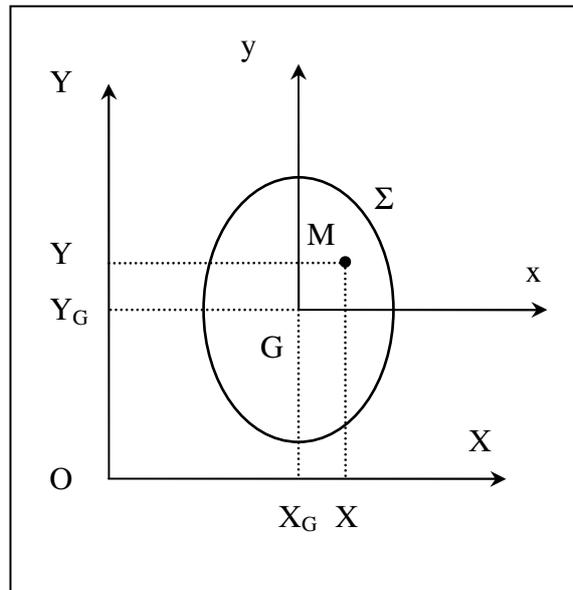


Fig. 4.2 – Centre de gravité

Définition 52 : Centre de gravité

Le centre de gravité d'une section droite est le point G, à l'intersection des axes x et y tels que :

$$S_x = 0 \text{ et } S_y = 0$$

A l'aide des notations de la Fig. 4.2, ces expressions deviennent :

$$\int_{\Sigma} (Y - Y_G) dS = 0 \text{ et } \int_{\Sigma} (X - X_G) dS = 0$$

D'où :

$$Y_G A = \int_{\Sigma} Y dS \text{ et } X_G A = \int_{\Sigma} X dS$$

Ainsi :

$$\boxed{Y_G = \frac{\int_{\Sigma} Y dS}{A}} \text{ et } \boxed{X_G = \frac{\int_{\Sigma} X dS}{A}}$$

Remarque : Pour tout axe de symétrie Δ : $S_{\Delta} = 0$, donc le centre de gravité G appartient à tout axe de symétrie de la section droite.

4.4 Moment et produit d'inertie

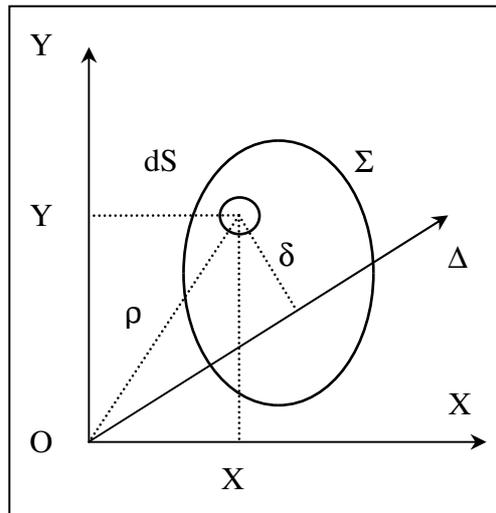


Fig. 4.3 – Moments d'inertie

Définition 53 : Moment d'inertie

Le moment d'inertie autour d'un axe Δ est défini par :

$$I_{\Delta} = \int_{\Sigma} \delta^2 dS$$

On en déduit :

$$\boxed{I_X = \int_{\Sigma} Y^2 dS} \quad \text{et} \quad \boxed{I_Y = \int_{\Sigma} X^2 dS}$$

Définition 54 : Produit d'inertie

Le produit d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires est défini par :

$$\boxed{I_{XY} = \int_{\Sigma} XY dS}$$

Remarque : Pour tout axe X de symétrie, nous avons : $I_{XY} = 0$.

Définition 55 : Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire autour d'un point O est défini par :

$$\boxed{I_O = \int_{\Sigma} \rho^2 dS}$$

On en déduit :

$$I_O = \int_{\Sigma} (X^2 + Y^2) dS = I_X + I_Y$$

4.5 Théorème d'HUYGENS

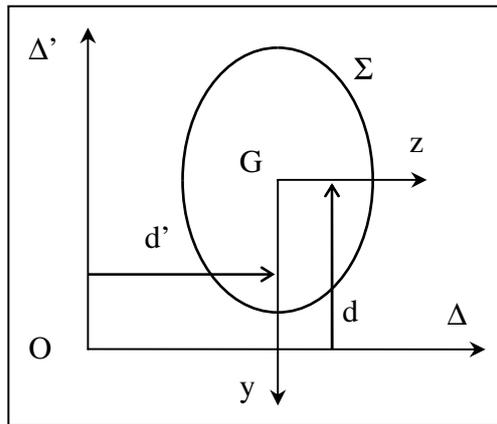


Fig. 4.4 – Théorème d’HUYGENS

Les axes y et z intervenant dans le théorème d’HUYGENS doivent nécessairement être des axes passant par le centre de gravité.

Nous pouvons déterminer les moments et produits d’inertie par rapport à I_y , I_z et I_{yz} :

$$I_{\Delta} = I_z + Ad^2, \quad I_{\Delta'} = I_y + Ad'^2 \quad \text{et} \quad I_{\Delta\Delta'} = I_{yz} + Add'$$

Remarque : d' et d sont les coordonnées de G dans le repère (G, Δ, Δ') .

4.6 Rayon de giration

Définition 56 : Rayon de giration

Les rayons de giration sont définis par :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \text{et} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Remarque : Le rayon de giration trouvera une place toute particulière dans l’étude du flambement.

4.7 Variation d’inertie

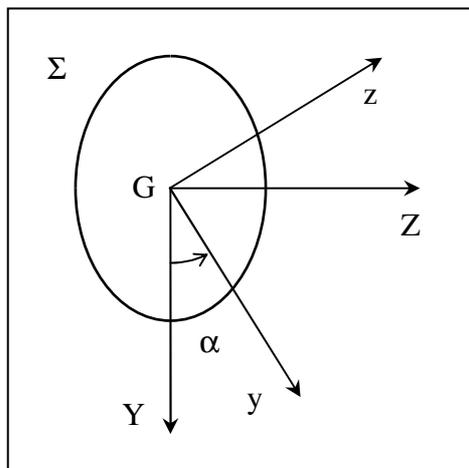


Fig. 4.5 – Variation d’inertie

On considère le repère mobile (G, y, z) repéré par l’angle α par rapport au repère fixe (G, Y, Z)

Déterminons les inerties dans le repère mobile par rapport au repère fixe.

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$I_y = \int_{\Sigma} z^2 dS = \sin^2 \alpha \int_{\Sigma} Y^2 dS + \cos^2 \alpha \int_{\Sigma} Z^2 dS - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_{\Sigma} YZ dS$$

Soit :

$$I_y = I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha - 2I_{YZ} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{I_Z - I_Y}{2} \cos 2\alpha - I_{YZ} \sin 2\alpha$$

De même :

$$I_z = I_Z \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha + 2I_{YZ} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cos 2\alpha + I_{YZ} \sin 2\alpha$$

Enfin :

$$I_{yz} = \int_{\Sigma} yz dS = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) I_{YZ} - \sin \alpha \cos \alpha (I_Z - I_Y) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} (I_Z - I_Y) + I_{YZ} \cos 2\alpha$$

On remarque que :

$$I_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{dI_y}{d\alpha} = \frac{1}{2} \frac{dI_z}{d\alpha}$$

On en déduit que I_y passe par un maximum (I_z minimum) et un minimum (I_z maximum)

lorsque $I_{yz} = 0$, soit pour les deux angles α_1 et $\alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$ tels que $I_{yz} = 0$, soit :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2I_{YZ}}{I_Z - I_Y}$$

Les valeurs des maximums I_1 et minimum I_2 s'obtiennent en substituant l'angle α_1 dans les expressions de I_y et I_z .

$$I_1 = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{I_Z - I_Y}{2 \cos 2\alpha_1} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{I_Z - I_Y}{2 \cos 2\alpha_1} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

Définition 57 : Inerties principales

Les inerties principales sont les inerties maximum et minimum autour d'un axe variable passant par G.

Définition 58 : Axes principaux d'inertie

Les axes principaux d'inertie sont les axes passant par G autour desquels on obtient les inerties principales.

Le repère correspondant est appelé repère principal d'inertie.

4.8 Variation d'inertie par rapport aux inerties principales

Si le repère fixe (G,Y,Z) est le repère principal d'inertie ($I_z = I_1$ et $I_y = I_2$), nous avons :

$$I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$I_z = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$I_{yz} = -\frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\alpha$$

4.9 Représentation graphique

Nous supposons : $I_1 > I_2$

Représentons les différents points de coordonnées : (I_z, I_{yz})

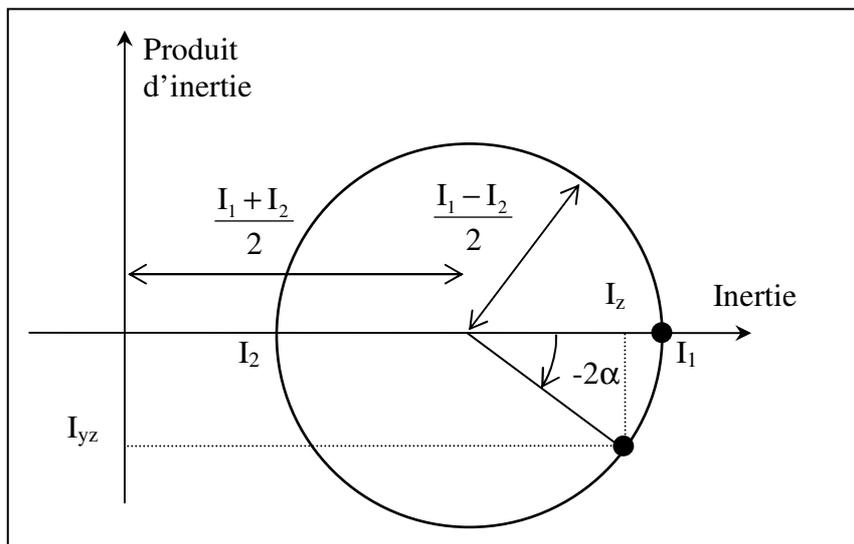


Fig. 4.6 – Représentation graphique des inerties

Nous en déduisons que l'ensemble des points (I_z, I_{yz}) est un cercle de centre $\left(\frac{I_1 + I_2}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{I_1 - I_2}{2}$.

Lorsque le repère mobile tourne d'un angle α par rapport au repère fixe des axes principaux d'inertie, le point représentatif sur ce cercle tourne d'un angle -2α .

4.10 Matrice d'inertie

Les expressions des inerties par rapport au repère mobile (G,y,z) en fonction des inerties par rapport à un repère fixe (G,Y,Z), peuvent encore s'écrire sous forme matricielle :

$$I_y = (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Plus généralement :

$$\begin{pmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Définition 59 : Matrice d'inertie

On appelle matrice d'inertie par rapport à un repère (G,Y,Z), la matrice :

$$\begin{pmatrix} I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique à coefficients réels, on sait qu'il existe un repère orthonormé dans lequel la matrice est diagonale.

Ce repère doit être défini par les axes principaux d'inertie.

Les valeurs propres de la matrice d'inertie sont les inerties principales.

La recherche des valeurs propres donne :

$$\det \begin{pmatrix} I_Y - I & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z - I \end{pmatrix} = 0$$

Soit :

$$I^2 - (I_Z + I_Y)I + (I_Z I_Y - I_{YZ}^2) = 0$$

D'où les racines de cette équation caractéristique :

$$I_1 = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

Nous retrouvons bien les résultats du paragraphe 4.7

La direction principale (α_1) correspondant à I_1 est donnée par la relation :

$$\begin{pmatrix} I_Y - I_1 & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = 0, \text{ soit : } \tan \alpha_1 = \frac{I_Y - I_1}{I_{YZ}} = \frac{I_{YZ}}{I_Z - I_1}$$

De même, la direction principale (α_2) correspondant à I_2 est donnée par la relation :

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_Y - I_2}{I_{YZ}} = \frac{I_{YZ}}{I_Z - I_2}$$

On peut vérifier que ces deux directions sont orthogonales : $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1$

4.11 Ellipse centrale d'inertie

Si le repère fixe (G,Y,Z) est le repère principal d'inertie ($I_Z = I_1$ et $I_Y = I_2$), nous avons :

$$I_y = I_2 \cos^2 \alpha + I_1 \sin^2 \alpha$$

$$I_z = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha$$

En introduisant les rayons de giration, il vient :

$$i_z^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha$$

Portons sur l'axe mobile z le vecteur \mathbf{GP} d'intensité : $\frac{i_1 i_2}{i_z}$

Les coordonnées de P sur dans le repère fixe sont :

$$\begin{cases} Y_P = -\frac{i_1 i_2}{i_z} \sin \alpha \\ Z_P = \frac{i_1 i_2}{i_z} \cos \alpha \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{Y_P^2 i_z^2}{i_1^2 i_2^2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{Z_P^2 i_z^2}{i_1^2 i_2^2} \end{cases}$$

Soit en remplaçant dans la dernière équation :

$$\frac{Z_P^2}{i_2^2} + \frac{Y_P^2}{i_1^2} = 1$$

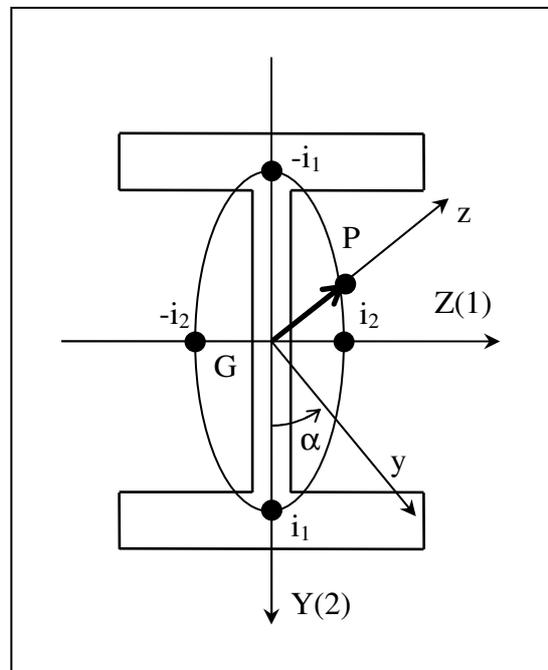


Fig. 4.7 – Ellipse centrale d'inertie

Définition 60 : Ellipse centrale d'inertie

L'ellipse centrale d'inertie est l'ellipse d'équation : $\frac{Z_P^2}{i_2^2} + \frac{Y_P^2}{i_1^2} = 1$ dans le repère principal d'inertie.

Remarques :

cette ellipse est relativement aisée à tracer en vérifiant que les points suivants y appartiennent : $(0, \pm i_2)$ et $(\pm i_1, 0)$.

Elle est d'autant plus aplatie que $I_z > I_y$

Exercice 1 : Un profil reconstitué

Section simple :

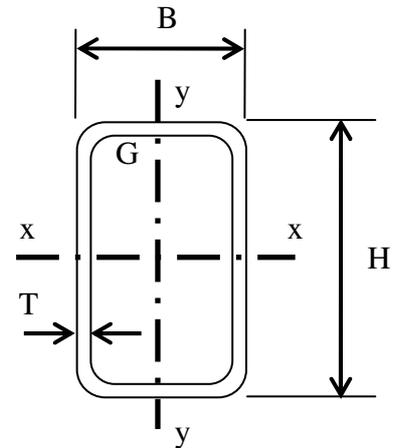
Un catalogue de profils rectangulaires creux fournis les caractéristiques géométriques suivantes :

$B = 60 \text{ mm}$ $H = 100 \text{ mm}$ $T = 6 \text{ mm}$

$A = 16,83 \text{ cm}^2$

$I_x = 205,29 \text{ cm}^4$ $I_y = 91,20 \text{ cm}^4$

Vérifier approximativement ces valeurs

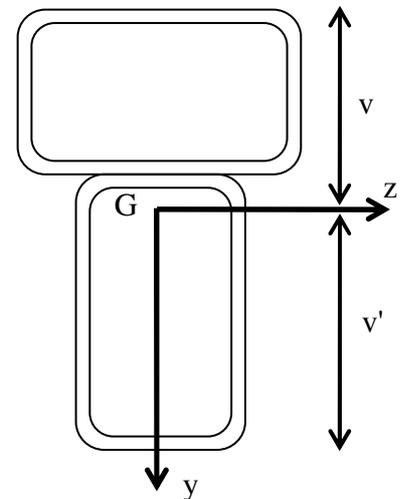


Section reconstituée :

Vous envisagez de réaliser une section droite en assemblant deux profils rectangulaires comme ci contre :
 Vous prendrez les valeurs données par le catalogue.

Déterminer v et v'

Calculez A , I_z et I_y



Solution :

Section simple :

$A = 60 \text{ cm}^2$

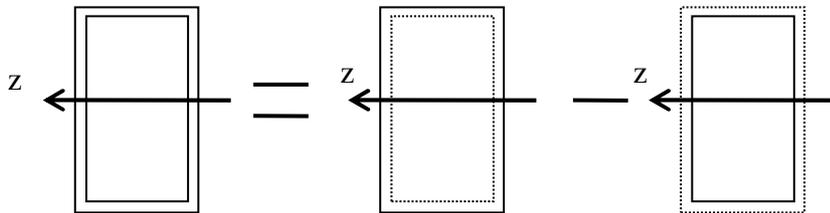
$I_z = 500,0 \text{ cm}^4$

$I_y = 180,0 \text{ cm}^4$

$A = 42,2 \text{ cm}^2$

$I_z = 272,6 \text{ cm}^4$

$I_y = 81,1 \text{ cm}^4$



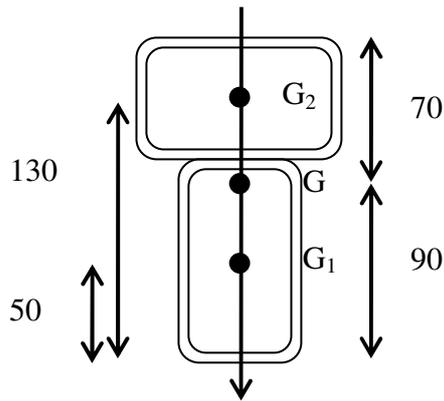
$A = 17,8 \text{ cm}^2$ $I_z = 227,4 \text{ cm}^4$ $I_y = 98,9 \text{ cm}^4$

Les valeurs du catalogue prennent en compte les arrondis de la section droite.

Section reconstituée :

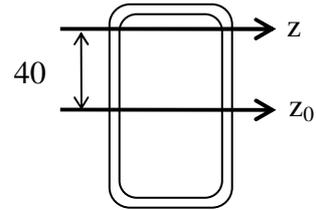
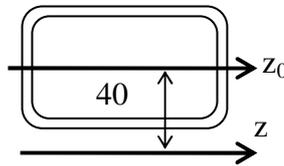
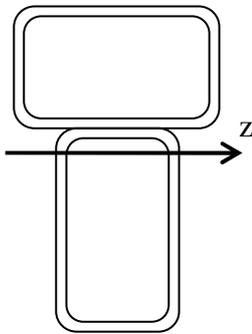
$A = 2 \times 16,83 \text{ cm}^2 = 33,66 \text{ cm}^2$

Centre de gravité : isobarycentre.



Calcul de I_z

$$A = 16,83 \text{ cm}^2 \quad I_{z_0} = 91,20 \text{ cm}^4$$

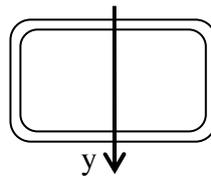
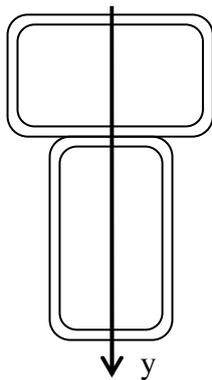


$$A = 16,83 \text{ cm}^2 \quad I_{z_0} = 205,29 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 91,20 \cdot 10^{-8} + 16,83 \cdot 10^{-4} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2 + 205,29 \cdot 10^{-8} + 16,83 \cdot 10^{-4} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2$$

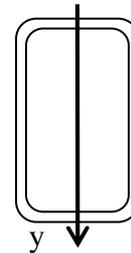
$$I_z = 835,05 \text{ cm}^4$$

Calcul de I_y



$$I_y = 205,29 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 91,20 \text{ cm}^4$$

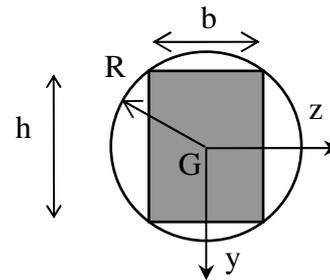


$$I_y = 91,20 \cdot 10^{-8} + 205,29 \cdot 10^{-8} = 296,49 \text{ cm}^4$$

Exercice 2 : Problème du bucheron

On désire à l'aide d'une section circulaire donnée (tronc d'arbre) obtenir la section rectangulaire ayant le plus grand module de flexion possible.

Module de flexion : I_{Gz}/v avec v distance du centre de gravité à la fibre supérieure.



Déterminer en fonction de R et d'un paramètre (b ou h), le module de flexion I_{Gz}/v de la section rectangulaire.

Optimiser le paramètre pour obtenir le module de flexion I_{Gz}/v le plus grand possible.

Quel est le ratio entre ce module de flexion et celui de la section circulaire ?

Remarque : inertie polaire d'un disque $I_G = \pi R^4/2$

Montrer qu'en divisant le diamètre en trois parties égales et en levant des perpendiculaires aux points ainsi définis, on peut retrouver graphiquement la section rectangulaire optimisée.

Solution :

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12} \text{ et } v = \frac{h}{2} \text{ d'où } I_{Gz}/v = \frac{bh^2}{6} \text{ avec } 4R^2 = b^2 + h^2 \text{ D'où :}$$

$$I_{Gz}/v = \frac{b(4R^2 - b^2)}{6}$$

$$\text{Optimisation : } \frac{\partial I_{Gz}/v}{\partial b} = \frac{4R^2 - 3b^2}{6} = 0 \text{ soit : } b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ D'où :}$$

$$(I_{Gz}/v)_{\max} = \frac{4}{9} bR^2 = \frac{8}{9\sqrt{3}} R^3$$

$$\text{Section circulaire : } I_{Gz} = \pi \frac{R^4}{4} \text{ et } v = R \text{ soit } I_{Gz}/v = \pi \frac{R^3}{4} \text{ Ratio :}$$

$$\frac{(I_{Gz}/v)_{\max}}{(I_{Gz}/v)_{\text{disque}}} = \frac{32}{9\pi\sqrt{3}} = 0,6534$$

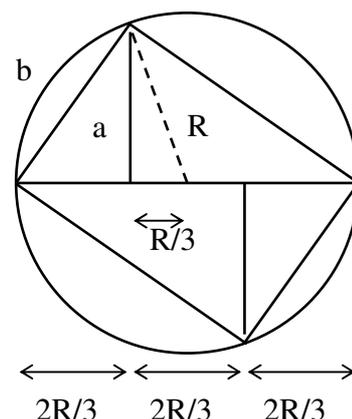
En appliquant deux fois Pythagore :

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} R^2$$

$$b^2 = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 + a^2 = \frac{4}{3} R^2$$

$$b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

On retrouve la section précédemment déterminée.



Chapitre 5 Sollicitations

5.1 Principe de superposition

Définition 61 : Principe de superposition

Pour des matériaux élastiques linéaires, les actions de liaison, les sollicitations, les contraintes et les déformations sont des fonctions linéaires des actions extérieures.

Remarque :

1. Ce principe découle en fait de la linéarité de la loi de comportement élastique linéaire : la loi de HOOKE. Dans le cas d'une utilisation d'une autre loi de comportement non linéaire (loi de comportement élasto-plastique par exemple), ce principe ne s'applique plus.
2. On en déduit que les contraintes sont des fonctions linéaires des sollicitations ; la recherche des contraintes s'effectuera donc pour chaque terme des sollicitations.

5.2 Equations d'équilibre en sollicitations

5.2.1 Cas des problèmes plans

Etudions l'équilibre d'un tronçon de poutre d'un problème plan, entre la section d'abscisse s et la section d'abscisse $s+ds$.

Les efforts sur la section d'abscisse $s+ds$ sont l'opposés des sollicitations à l'abscisse $s+ds$; soit dans le repère local $(\vec{G}(s+ds), \vec{i}(s+ds), \vec{j}(s+ds), \vec{k})$:

$$\text{Résultante : } -\vec{R}(s+ds) \begin{pmatrix} -(N(s)+dN) \\ -(V(s)+dV) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Moment : } \vec{M}(s+ds) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M(s)+dM) \end{pmatrix}$$

Les efforts sur la section d'abscisse s sont les sollicitations à l'abscisse s ; soit dans le repère local $(\vec{G}(s), \vec{i}(s), \vec{j}(s), \vec{k})$:

$$\text{Résultante : } \vec{R}(s) \begin{pmatrix} N(s) \\ V(s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Moment : } \vec{M}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M(s) \end{pmatrix}$$

Les efforts sur le tronçon de poutre se résument à une force répartie \vec{p} ; soit dans le repère local $(\vec{G}(s), \vec{i}(s), \vec{j}(s), \vec{k})$: $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}$

Remarques :

1. Nous pouvons toujours choisir ds de telle sorte qu'il n'y ai pas d'effort ponctuel sur le tronçon.
2. Nous ne considérerons pas de couple réparti sur le tronçon ds.
3. Le repère local vérifie :

$$\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{\vec{j}}{R} \text{ et } \frac{d\vec{j}}{ds} = -\frac{\vec{i}}{R}$$

Avec R : rayon de courbure de la poutre à l'abscisse s.

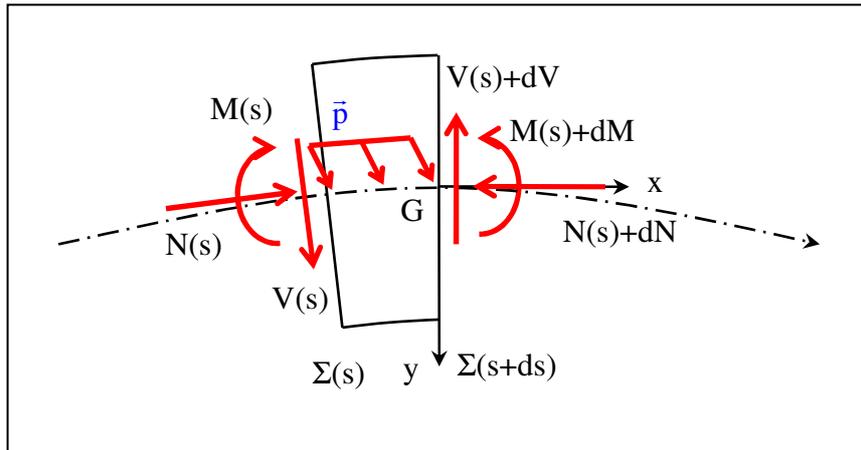


Fig. 5.1 – Equilibre d'un tronçon de poutre – problème plan

Le Principe Fondamental de la Statique sous forme vectorielle appliqué au tronçon donne en écrivant l'équilibre en moment autour du point G(s+ds) :

$$\begin{cases} -\vec{R} - d\vec{R} + \vec{R} + \vec{p}.ds = 0 \\ -\vec{M} - d\vec{M} + \vec{M} - ds\vec{i} \wedge \vec{R} = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{p} \\ \frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{R} \wedge \vec{i} \end{cases}$$

Avec, en prenant en compte les remarques précédentes :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}}{ds} = \frac{d(N\vec{i} + V\vec{j})}{ds} = \left(\frac{dN}{ds} - \frac{V}{R}\right)\vec{i} + \left(\frac{N}{R} + \frac{dV}{ds}\right)\vec{j} \\ \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{dM}{ds}\vec{k} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{ds} - \frac{V}{R} = p_x \\ \frac{N}{R} + \frac{dV}{ds} = p_y \\ \frac{dM}{ds} = -V \end{array} \right.$$

5.2.2 Cas des poutres droites

Etudions l'équilibre d'un tronçon de poutre droite, entre la section d'abscisse x et la section d'abscisse $x+dx$.

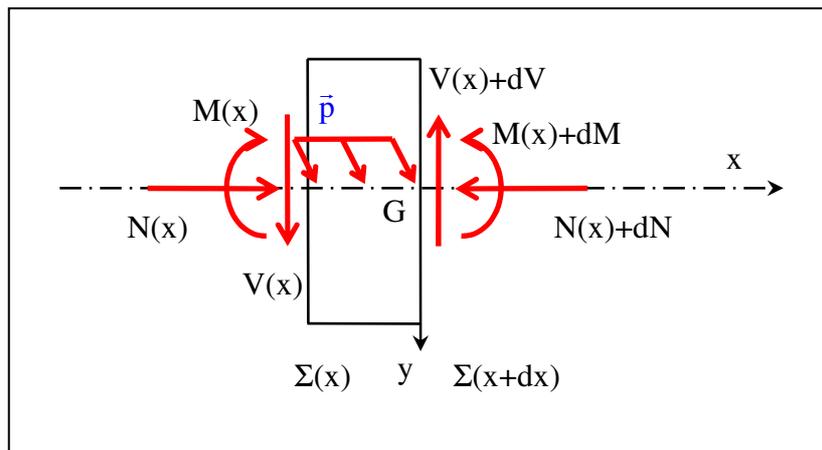


Fig. 5.2 – Equilibre d'un tronçon de poutre – poutre droite

Nous pouvons soit réécrire les équations d'équilibre dans le repère $(G(x), \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit reprendre les résultats précédents en substituant l'abscisse x à l'abscisse curviligne s et en faisant tendre le rayon de courbure R vers l'infini.

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = p_x \\ \frac{dV}{dx} = p_y \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{array} \right.$$

5.3 Expression des sollicitations

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à donner quelques méthodes de détermination des expressions des sollicitations le long d'une poutre droite dans un problème plan, soit : $N(x)$, $V(x)$ et $M(x)$.

Nous exposerons ces méthodes sur l'exemple suivant :

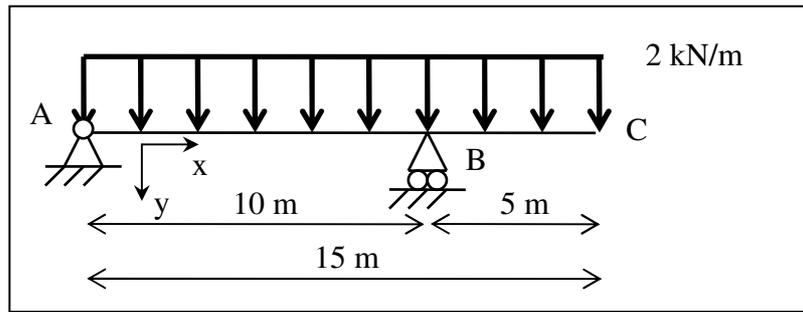


Fig. 5.3 : Exemple poutre droite – problème plan

5.3.1 Détermination des actions de liaison

La poutre ABC est une poutre isostatique ; nous pouvons en étudiant son équilibre, trouver les actions de liaison :

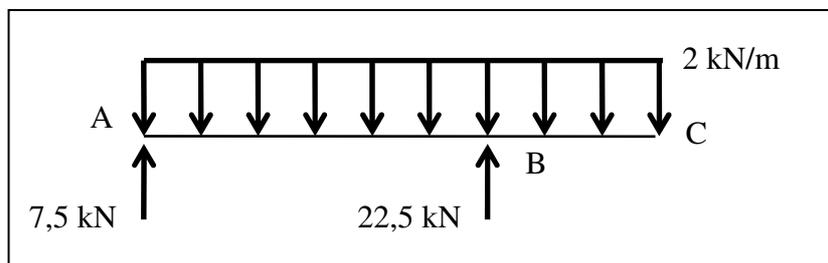


Fig. 5.4 : Détermination des actions de liaison

5.3.2 Expressions de N(x), V(x) et M(x)

5.3.2.1 Par les forces de gauche

Pour $0 < x < 10 \text{ m}$:

Nous nous servons de la Définition 48 : Torseur de cohésion « par les forces de droite »

Nous en déduisons dans le repère local :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = \sum_{\text{gauche}} F_x \\ V(x) = \sum_{\text{gauche}} F_y \\ M(x) = \sum_{\text{gauche}} M_G \end{array} \right.$$

Application :

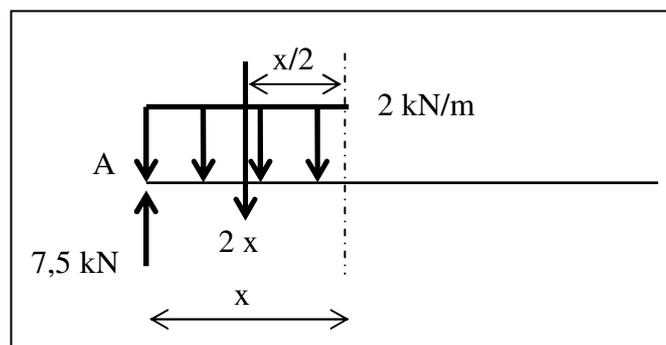


Fig. 5.5 – Sollicitations « par les forces de gauche »

Nous mettons en place la force globalement équivalente à l'aide de la Définition 9 : force globalement équivalente

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 2x - 7,5 \text{ kN} \\ M(x) = -x^2 + 7,5x \text{ kN.m} \end{cases}$$

5.3.2.2 Par les forces de droite

Pour $10 \text{ m} < x < 15 \text{ m}$:

Nous nous servons de la Définition 47 : Torseur de cohésion « par les forces de gauche »

Nous en déduisons dans le repère local :

$$\begin{cases} N(x) = - \sum_{\text{droite}} F_x \\ V(x) = - \sum_{\text{droite}} F_y \\ M(x) = - \sum_{\text{droite}} M_G \end{cases}$$

Application :

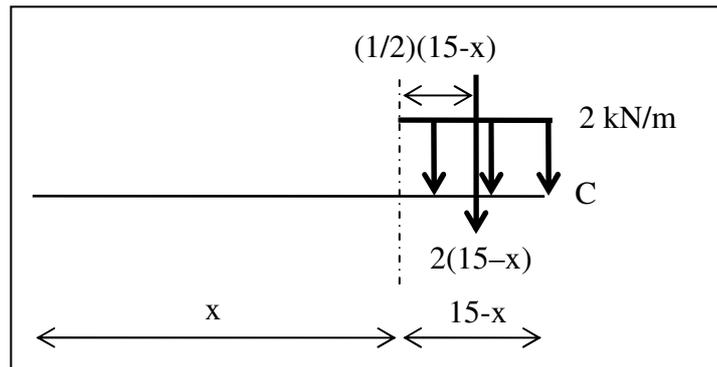


Fig. 5.6 – Sollicitations « par les forces de droite »

Nous mettons en place la force globalement équivalente à l'aide de la Définition 9 : force globalement équivalente

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 2x - 30 \text{ kN} \\ M(x) = -(15-x)^2 \text{ kN.m} \end{cases}$$

5.3.3 Tracé de $N(x)$, $V(x)$ et $M(x)$

L'effort normal $N(x)$ est nul sur la longueur de la poutre ; ce qui est toujours le cas des poutres isostatiques horizontales chargées verticalement.

Nous ne représenterons que $V(x)$ et $M(x)$, qui sont des fonctions définies par intervalles.

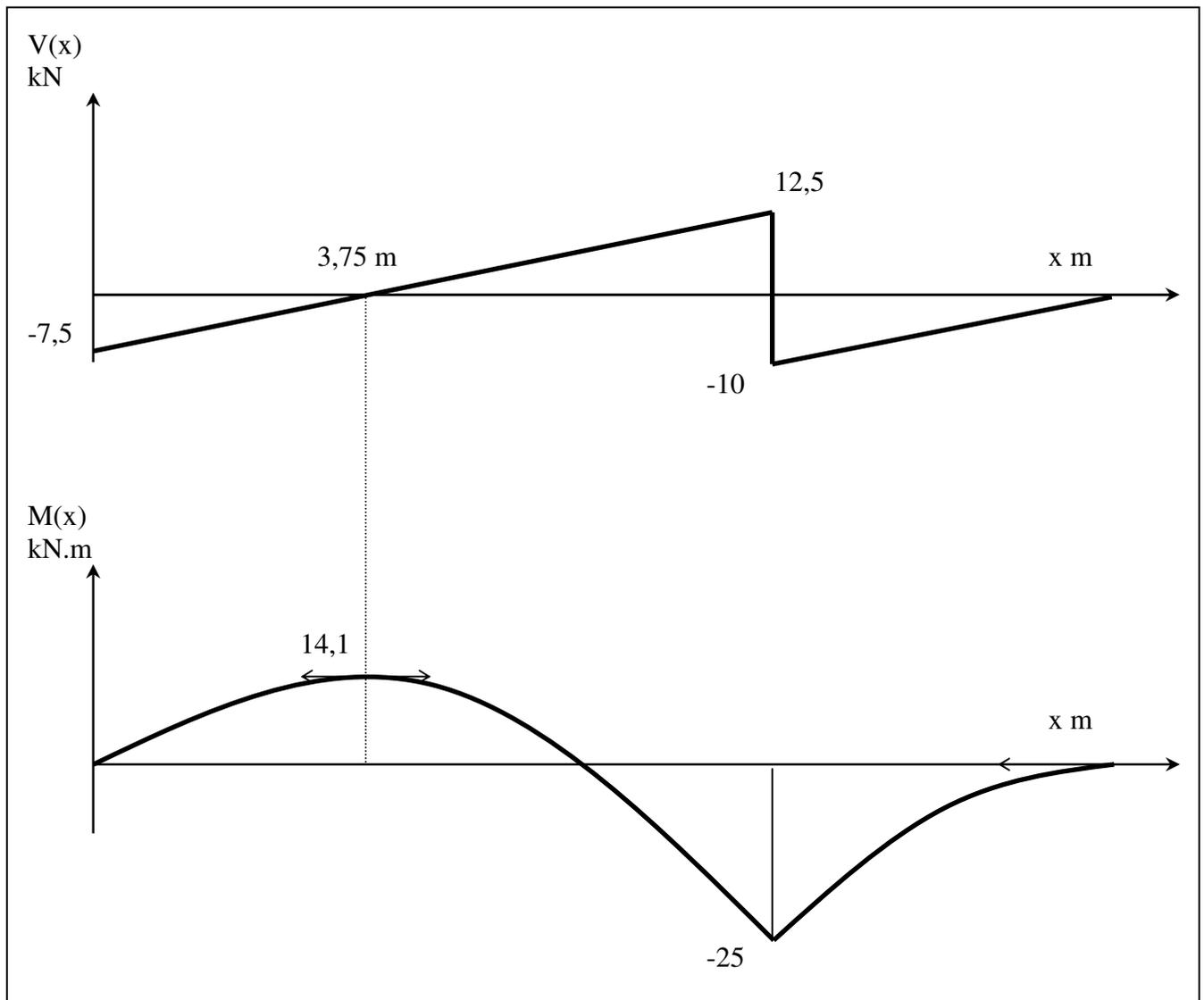


Fig. 5.7 – Tracé de $V(x)$ et $M(x)$

Remarque : Nous avons mis en évidence dans le paragraphe 5.2 (Equations d'équilibre en sollicitations) que : $\frac{dM}{dx} = -V$; nous aurons donc toujours intérêt à tracer en correspondance la courbe représentative de $M(x)$ et (au signe près) sa dérivée.

5.4 Tracé direct des sollicitations

5.4.1 Trucs et astuces

Nous nous limiterons dans ce paragraphe aux cas des poutres droites dans les problèmes plans.

Nous ferons également l'hypothèse que comme dans la plupart des cas de charge, les actions se résument à des actions ponctuelles : $\vec{F} = F\vec{j}$ et $\vec{C} = C\vec{k}$, ainsi qu'à des actions réparties uniformes : $\vec{p} = p\vec{j}$.

Les équations d'équilibre en sollicitations nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = p \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{cases}$$

Nous en déduisons que l'effort tranchant V est au mieux un polynôme du premier degré et que le moment fléchissant est au mieux un polynôme du deuxième degré.

La détermination de certains points sera donc suffisante pour tracer les courbes représentatives des sollicitations.

De plus, la deuxième équation peut s'exprimer sous la forme :

$$M(x_2) = M(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$

L'intégrale de cette équation pouvant être interprétée graphiquement comme une surface algébrique déterminée sur la courbe représentative de l'effort tranchant.

Les différents comportements des courbes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont résumés dans la figure ci-après :

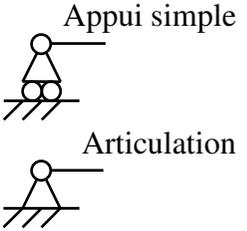
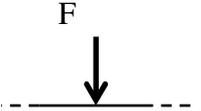
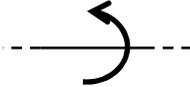
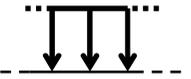
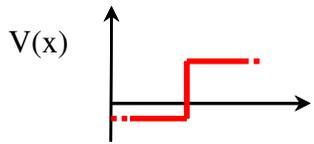
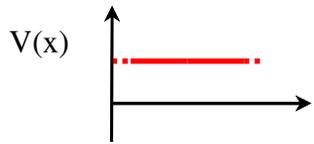
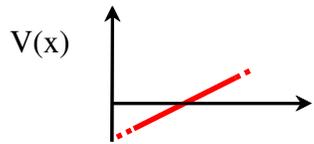
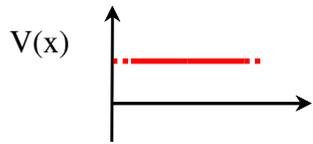
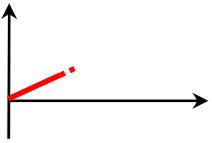
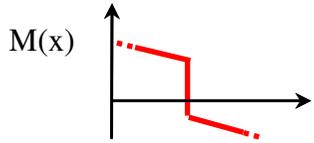
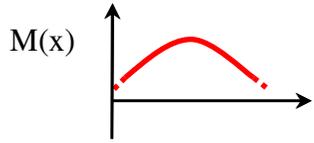
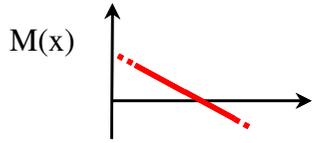
Effets des actions ponctuelles			Effets des actions réparties	
Action de liaison	Force suivant y	Couple suivant z	Action répartie	Pas d'action répartie
<p>Appui simple</p>  <p>Articulation</p>	<p>F</p> 	<p>C</p> 	<p>p</p> 	
<p>V(x)</p> 	<p>V(x)</p>  <p>Saut de F</p>	<p>V(x)</p>  <p>Sans effet</p>	<p>V(x)</p>  <p>Droite Pente p inclinée</p>	<p>V(x)</p>  <p>Droite horizontale</p>
<p>M(x)</p> 	<p>M(x)</p>  <p>Changement de pente</p>	<p>M(x)</p>  <p>Saut de C</p>	<p>M(x)</p>  <p>Arc de parabole</p>	<p>M(x)</p>  <p>Droite inclinée</p>

Fig. 5.8 Comportement des courbes – Effort tranchant – Moment fléchissant

5.4.2 Exemple d'application

Nous reprenons le problème défini au paragraphe 5.3.

1. Nous calculons les actions de liaison comme au paragraphe 5.3.1.
2. Nous déterminons le premier et le dernier point des courbes.
3. Nous traçons les courbes de l'origine jusqu'à l'extrémité.

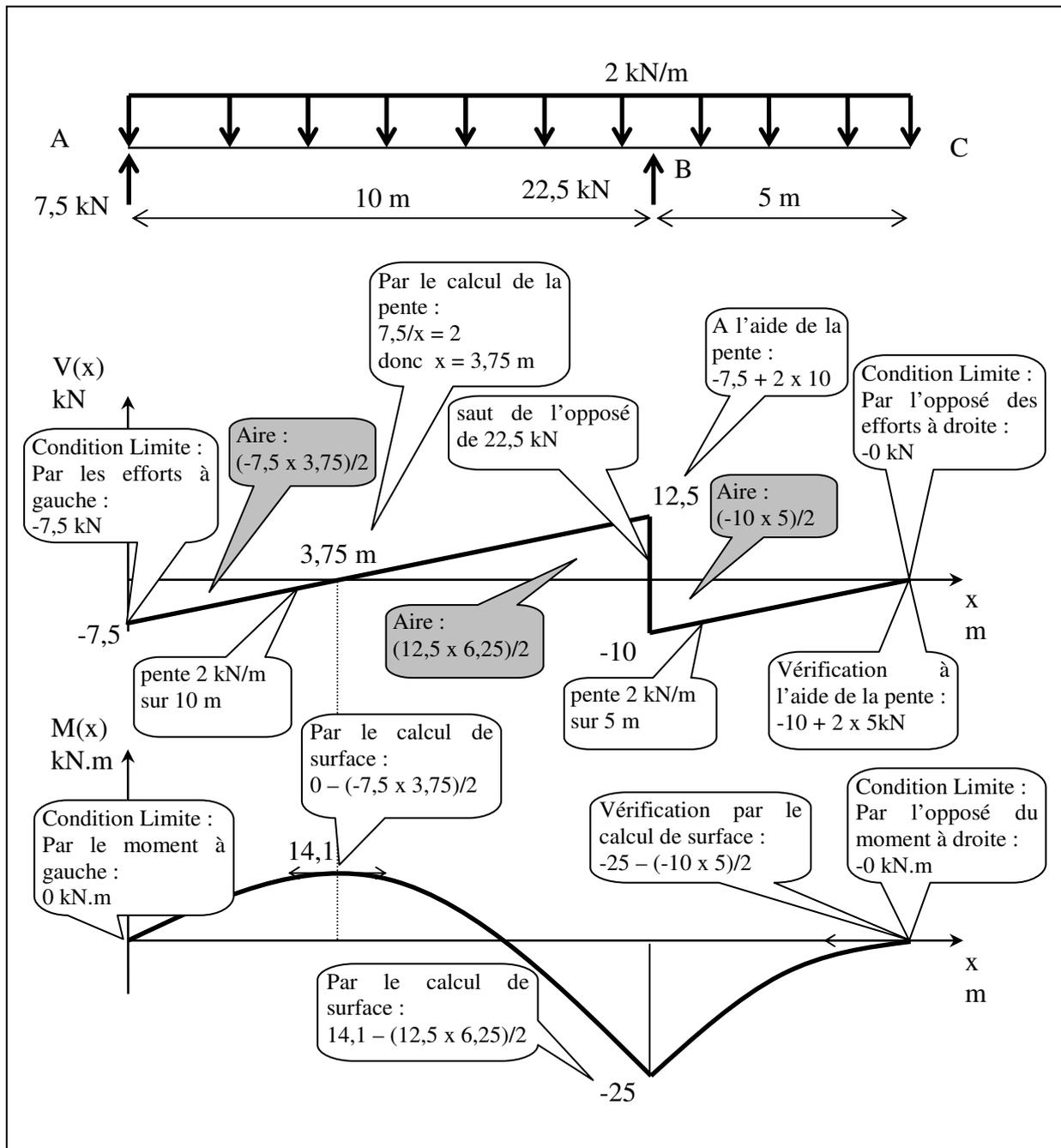


Fig. 5.9 – Tracé direct des sollicitations

5.4.3 Cas d'un tronçon de poutre uniformément chargé

Un cas d'étude souvent rencontré est la mise en place de la courbe du moment fléchissant dans un tronçon de poutre uniformément chargé ; connaissant les moments fléchissants aux extrémités du tronçon.

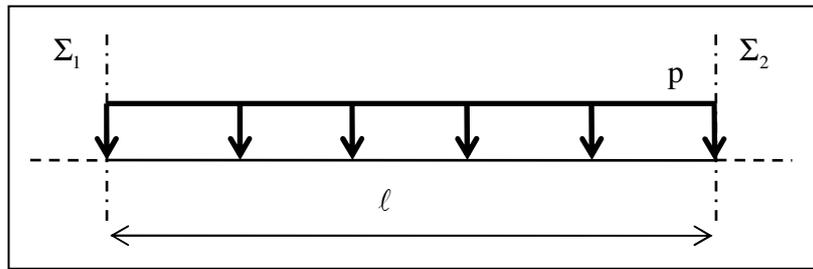


Fig. 5.10 – Tronçon de poutre uniformément chargé (1/2)

Les moments dans les sections droites Σ_1 et Σ_2 seront notés respectivement M_1 et M_2 .
L'effort normal dans la section Σ_2 sera noté N_2 .

En libérant les rotations des sections Σ_1 et Σ_2 et le déplacement horizontal de la section Σ_2 , et en introduisant les sollicitations correspondantes, on aboutit à la poutre mécaniquement équivalente suivante :

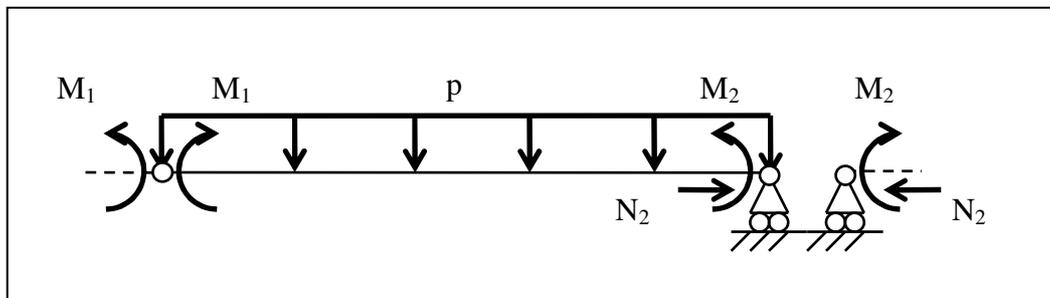


Fig. 5.11 – Tronçon de poutre uniformément chargé (2/2)

En remarquant que l'effort N_2 n'a pas d'incidence sur le moment fléchissant ; on peut affirmer que le tronçon isostatique associé suivant à le même moment fléchissant (et par suite le même effort tranchant).

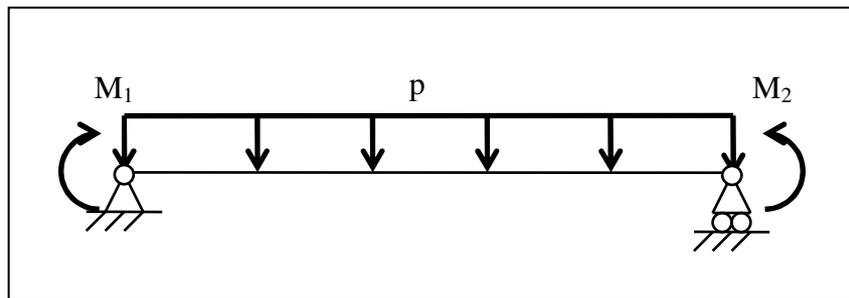


Fig. 5.12 – Tronçon isostatique associé

Le moment fléchissant et l'effort tranchant sont obtenus par principe de superposition :

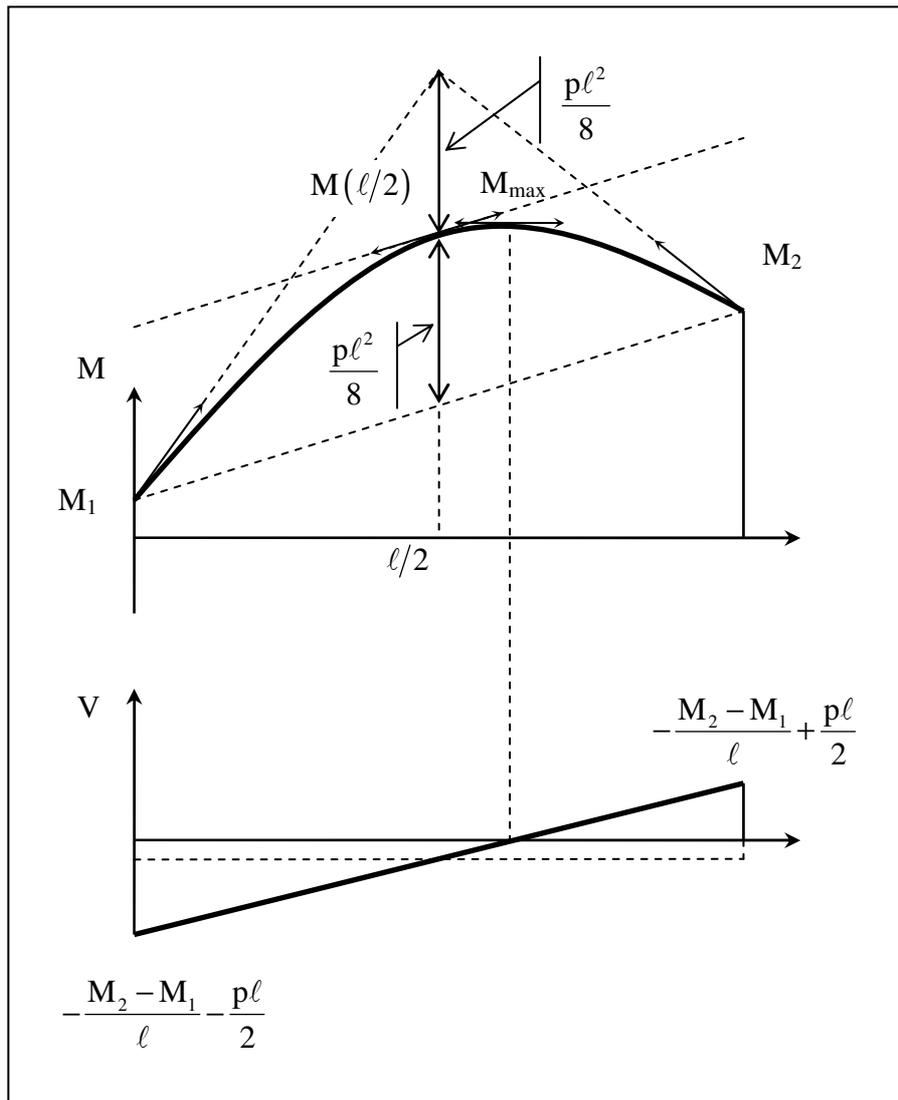


Fig. 5.13 – Sollicitations dans le tronçon isostatique associé

Les pentes à l'origine de la courbe des moments fléchissant peuvent être tracées à l'aide des propriétés des paraboles indiquées sur la Fig. 5.13 ci-dessus.

Dans le cas où l'effort tranchant s'annule sur le tronçon, le moment maximum diffère du moment à mi travée.

$$M_{\max} = M(\ell/2) + \Delta M$$

Avec :

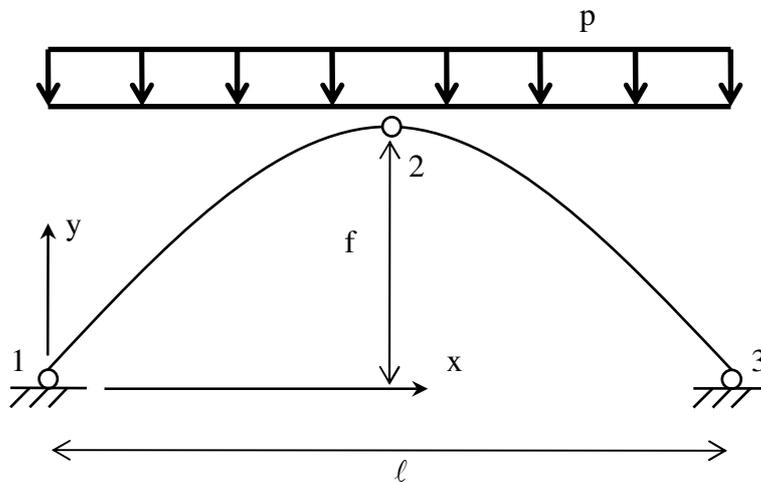
$$M(\ell/2) = \frac{M_1 + M_2}{2} + \frac{p\ell^2}{8}$$

On montre que :

$$|M_2 - M_1| \leq \frac{p\ell^2}{2} \Rightarrow \Delta M = \frac{1}{16} \frac{(M_2 - M_1)^2}{\frac{p\ell^2}{8}}$$

Exercice 1 : Arc parabolique uniformément chargé

On considère un arc à 3 articulations de portée ℓ et de hauteur f , soumis à une charge répartie : p



Déterminer les actions de liaison

Déterminer l'équation de l'arc

Montrer que l'action de liaison en 1 est tangente à l'arc

En déduire les sollicitations dans la section 1 origine ($x=0$)

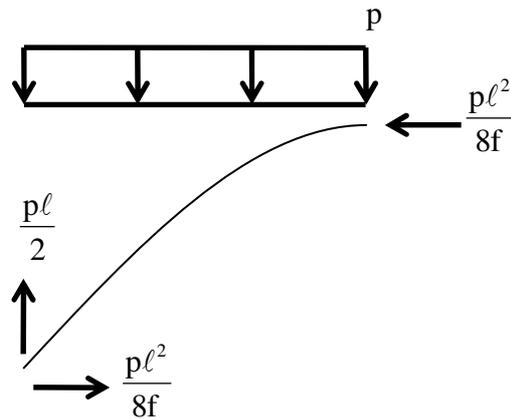
Déterminer les sollicitations dans la section 2 ($x=\ell/2$)

Montrer que pour une section d'abscisse x , le moment fléchissant est nul.

En déduire les sollicitations dans une section quelconque

Solution :

En étudiant l'équilibre d'une demi structure, il vient :



L'équation de l'arc est : $y(x) = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$

La tangente de l'angle de l'action de liaison avec l'horizontale vaut : $\frac{p\ell}{2} / \frac{p\ell^2}{8f} = \frac{4f}{\ell}$

La tangente à l'origine de l'arc vaut : $y'(0) = \frac{4f}{\ell}$

L'action de liaison en 1 est bien tangente à l'arc.

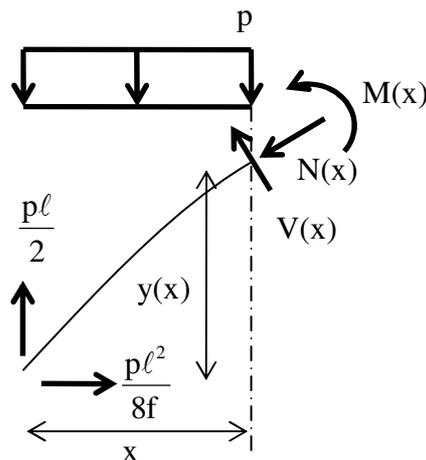
En projetant dans le repère local, il vient :

$$\begin{cases} N(0) = \frac{p\ell}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{4f}\right)^2} \\ V(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{cases}$$

Dans la section 2 :

$$\begin{cases} N\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{p\ell^2}{8f} \\ V\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \\ M\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Sollicitations dans une section d'abscisse x :



Détermination du moment fléchissant :

$$M(x) = \frac{p\ell}{2}x - \frac{p\ell^2}{8f}y(x) - p\frac{x^2}{2} \text{ avec } y(x) = \frac{4f}{\ell^2}x(\ell - x)$$

D'où :

$$M(x) = \frac{p\ell}{2}x - \frac{p}{2}x(\ell - x) - p\frac{x^2}{2}$$

Soit :

$$M(x) = 0 \text{ par suite, } V(x) = 0$$

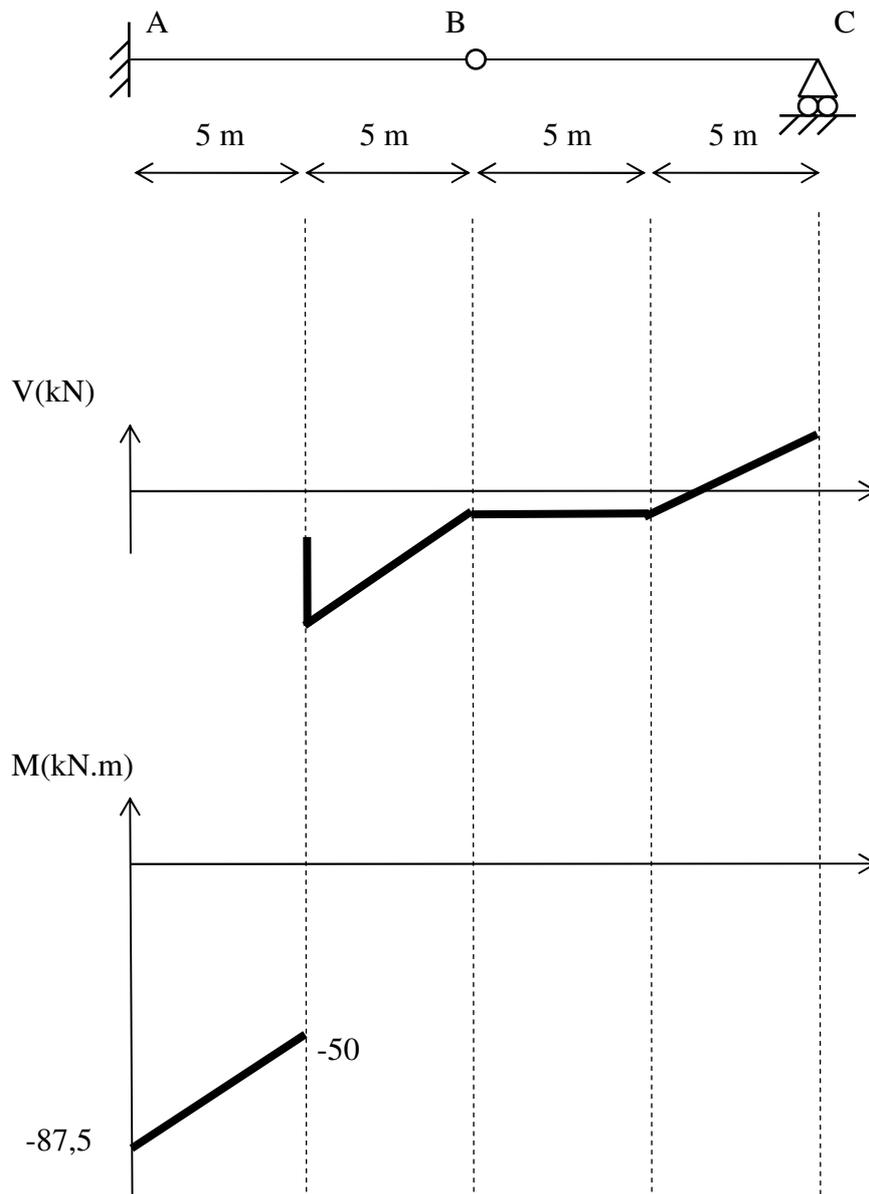
L'effort normal est donc au signe près, l'intensité des forces de gauche :

$$N(x) = \sqrt{\left(\frac{p\ell}{2} - px\right)^2 + \left(\frac{p\ell^2}{8f}\right)^2} \text{ soit : } N(x) = \frac{p\ell}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{4f}\right)^2}$$

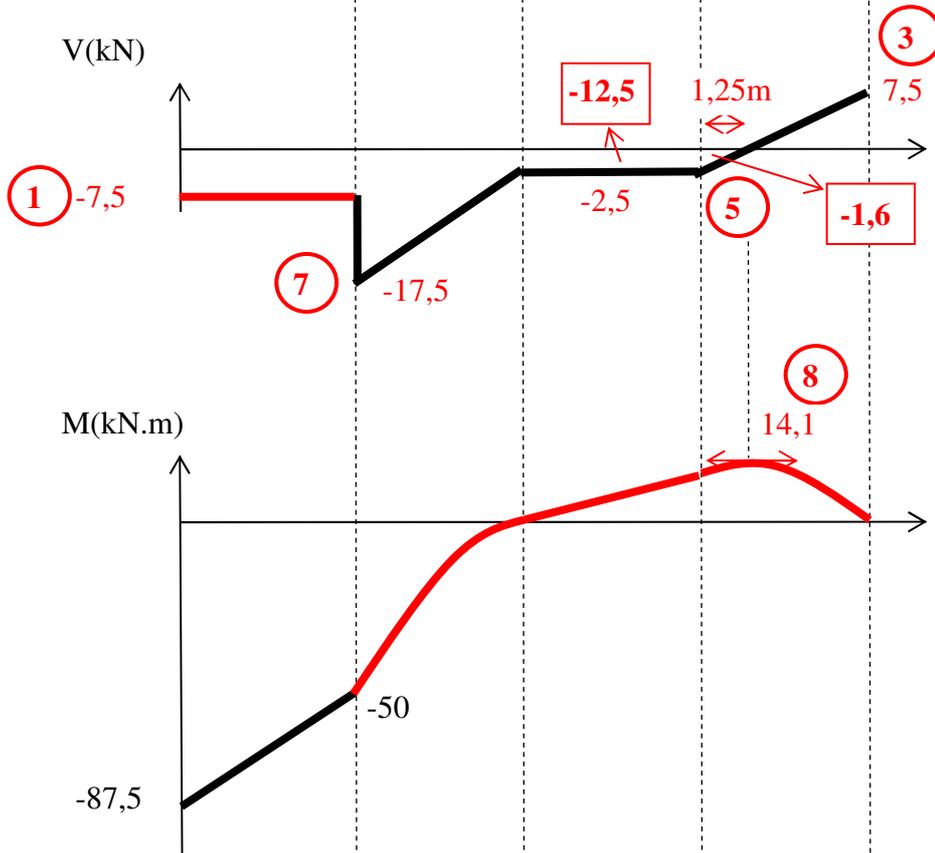
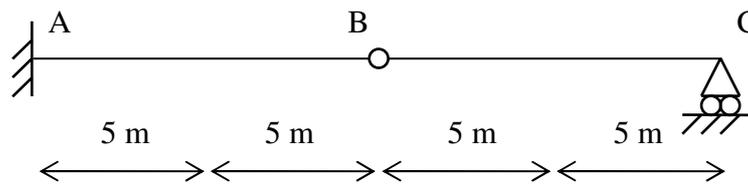
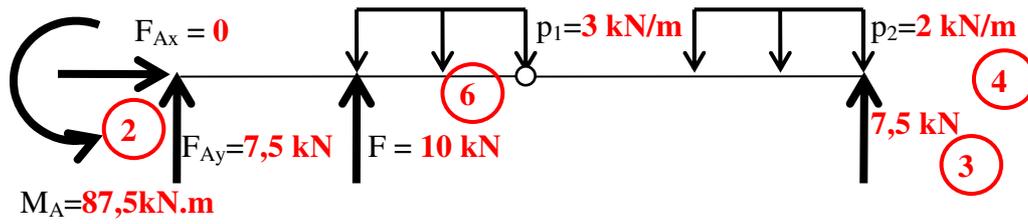
Exercice 2 : Retrouver un cas de charge

Retrouver le cas de charge correspondant aux courbes suivantes :

Vous vous souvenez juste que les actions de liaison en A et C avaient la même composante verticale, et que la poutre était soumise à des charges verticales uniformes et ponctuelles



Solution :



1 La relation : $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$ considérée sur la partie $0 \leq x \leq 5$ nous permet de dire que l'effort tranchant est constant et qu'il vaut l'opposé de la pente du moment fléchissant.

$$V(0) = -\frac{-50 + 87,5}{5} = -7,5 \text{ kN}$$

2 Les sollicitations en A peuvent être lues sur les courbes et exprimées à l'aide des forces de gauche.

$$\text{Sollicitations en A : } \begin{cases} -87,5 = -M_A \\ -7,5 = -F_{Ay} \\ 0 = -F_{Ax} \end{cases}$$

3 Les composantes verticales des actions en A et C sont égales.

$$F_{Cy} = F_{Ay} = 7,5 \text{ kN}$$

4 Le moment fléchissant sur l'articulation en B est nécessairement nul.

En considérant les forces de droite :

$$7,5 \cdot 10 - p_2 \cdot 5 \cdot 7,5 = 0 \quad p_2 = 2 \text{ kN/m}$$

5 Effort tranchant en B à droite : $V_B = 7,5 - 2 \times 5 = -2,5 \text{ kN}$

6 V et M en B à gauche :
$$\begin{cases} -7,5 - F + p_1 \cdot 5 = -2,5 \\ 7,5 \cdot 10 + F \cdot 5 - p_1 \cdot 5 \cdot 2,5 - 87,5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F = 10 \text{ kN} \\ p_2 = 3 \text{ kN/m} \end{cases}$$

7 Effort tranchant en $x = 5^+$ par les forces de gauche.

$$V(5^+) = -7,5 - 10 = -17,5 \text{ kN}$$

8 Le moment maximum peut être déterminé par intégration des surfaces à partir du point B.

$$M_{\max} = - \left(-2,5 \times 5 - \frac{1}{2} 2,5 \times 1,25 \right) = 14,1 \text{ kN.m}$$

Chapitre 6 Répartition des contraintes normales

6.1 Traction et compression simple

6.1.1 Définition

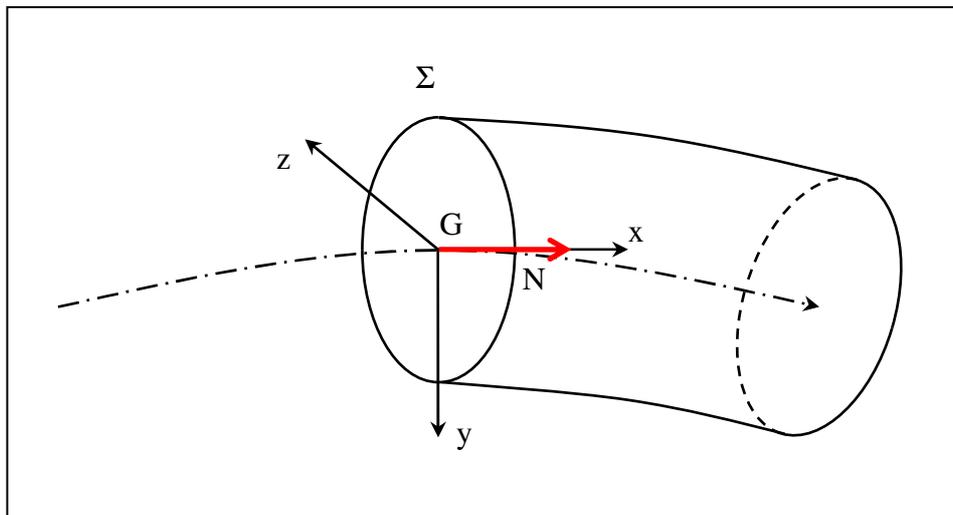


Fig. 6.1 – Traction simple – Compression simple

Définition 62 : Traction simple Compression simple

Une section droite est sollicitée en traction simple (resp. compression simple) si et seulement si les sollicitations se résument à un effort normal $N < 0$ (resp. $N > 0$).

Une poutre est sollicitée en traction simple (resp. compression simple) si et seulement si toutes les sections droites de la poutre sont sollicitées en traction simple (resp. compression simple).

Cette définition correspond à la Fig. 6.1 – Traction simple – Compression simple

Les relations sollicitations contraintes du paragraphe 3.4.1 page 53 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\tau_y dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\tau_z dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} \tau_y z - \tau_z y dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ 0 = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

6.1.2 Répartition des contraintes

Nous recherchons dans une section droite sollicitée en traction (ou compression) simple, une répartition des contraintes de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(y, z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifiant :

$$\begin{cases} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ 0 = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{cases}$$

Remarque : les coordonnées y et z d'un point de la section sont définies dans le repère local.

Avec comme hypothèses :

Loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon$$

NAVIER BERNOULLI :

$$\varepsilon = a + by + cz$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} N = \int_{\Sigma} -E(a + by + cz) dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -E(a + by + cz) z dS \\ 0 = \int_{\Sigma} E(a + by + cz) y dS \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} N = -Ea \int_{\Sigma} dS - Eb \int_{\Sigma} y dS - Ec \int_{\Sigma} z dS \\ 0 = -Ea \int_{\Sigma} z dS - Eb \int_{\Sigma} yz dS - Ec \int_{\Sigma} z^2 dS \\ 0 = Ea \int_{\Sigma} y dS + Eb \int_{\Sigma} y^2 dS + Ec \int_{\Sigma} yz dS \end{cases}$$

A l'aide des définitions du Chapitre 4 Caractéristiques géométriques page 61, nous avons :

$$\int_{\Sigma} dS = A$$

Les coordonnées y et z étant définies dans le repère local, nous avons :

$$\int_{\Sigma} y dS = S_z = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} z dS = S_y = 0$$

$$\int_{\Sigma} yz dS = I_{yz} = 0, \int_{\Sigma} y^2 dS = I_z \text{ et } \int_{\Sigma} z^2 dS = I_y$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} N = -EaA \\ 0 = EcI_y \\ 0 = EbI_z \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} a = -\frac{N}{EA} \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc une répartition constante des contraintes normales dans la section droite :

$$\sigma(y, z) = -\frac{N}{A}$$

Cette fonction ne dépendant pas de z , nous la représentons en fonction de y ; nous obtenons la répartition des contraintes normales dans la section droite suivante :

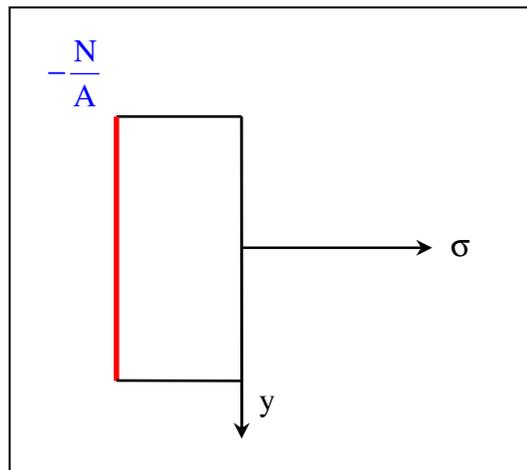


Fig. 6.2 – Répartition des contraintes normales – Traction compression simple

6.1.3 Déformations

La répartition des déformations est également constante dans la section droite :

$$\epsilon(y, z) = -\frac{N}{EA}$$

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx sollicité en traction compression simple.

Chaque tronçon de fibre de longueur dx s'allonge de ϵdx soit : $-\frac{N}{EA} dx$

Nous traçons alors la déformée du tronçon de poutre :

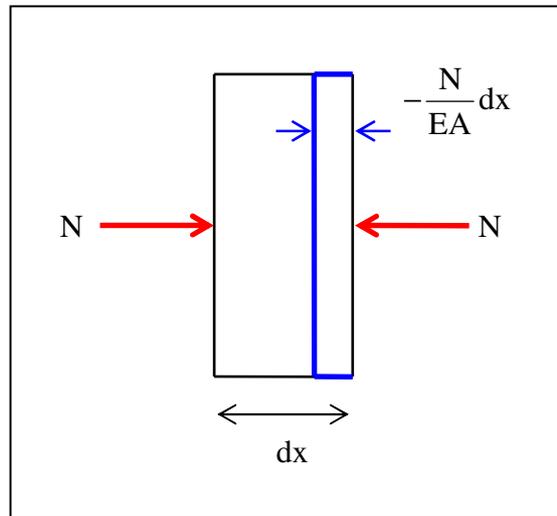


Fig. 6.3 – Déformations – Traction Compression simple

6.2 Flexion simple

6.2.1 Définitions

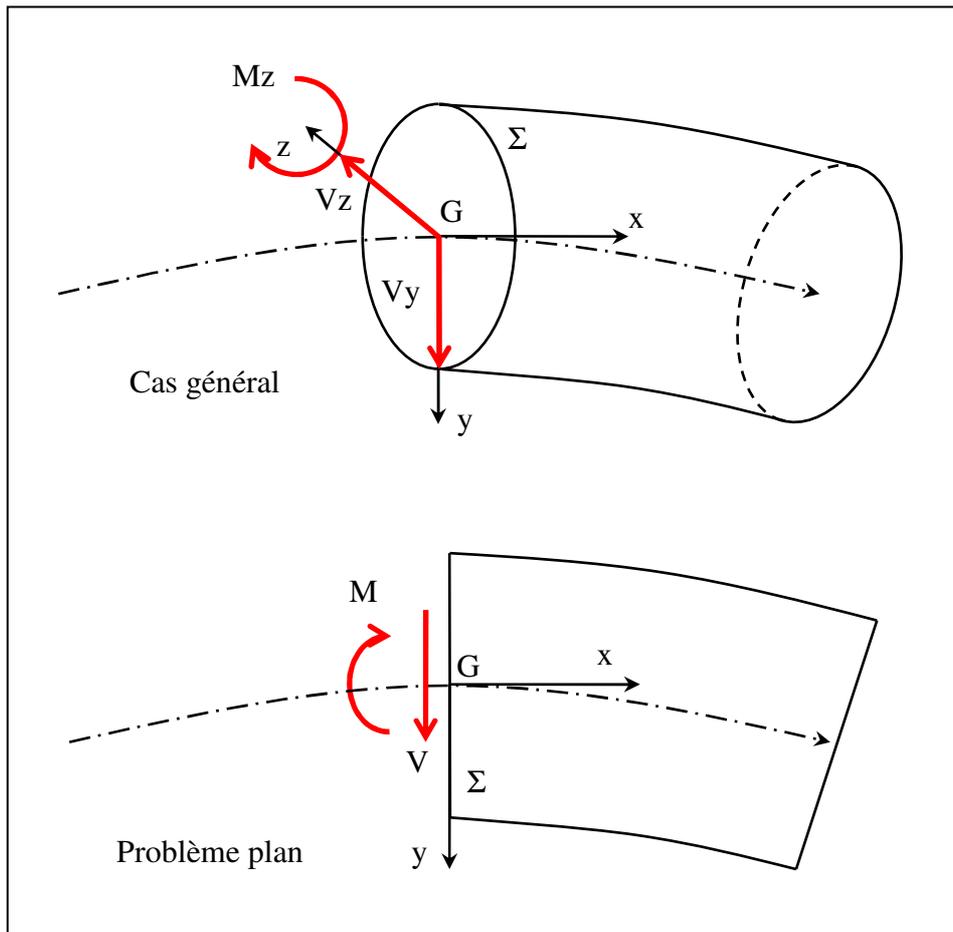


Fig. 6.4 – Flexion simple

Définition 63 : Flexion simple

Une section droite est sollicitée en flexion simple autour de l'axe z (resp. y) si les sollicitations se résume à un unique moment fléchissant M_z (resp. M_y) et éventuellement un effort tranchant.

Dans les problèmes plans, une section est sollicitée en flexion simple si les sollicitations se résument à un moment fléchissant M et éventuellement un effort tranchant V .

Une poutre est sollicitée en flexion simple si et seulement si toutes les sections droites de la poutre sont sollicitées en flexion simple.

Ces définitions correspondent à la Fig. 6.4 – Flexion simple

Les relations sollicitations contraintes du paragraphe 3.4.1 page 53 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ V_y = \int_{\Sigma} -\tau_y dS \\ V_z = \int_{\Sigma} -\tau_z dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} \tau_{yz} - \tau_{zy} dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

6.2.2 Répartition des contraintes

Nous recherchons dans une section droite sollicitée en flexion simple autour de l'axe z , une répartition des contraintes de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les contraintes tangentés τ_y et τ_z sont liées aux efforts tranchants V_y et V_z .

Les contraintes normales σ sont liées au moment fléchissant M_z .

A l'aide du principe de superposition défini au paragraphe 5.1, nous cherchons les contraintes normales dues uniquement au moment fléchissant M_z .

Nous ne nous intéressons dans ce chapitre qu'aux contraintes normales σ ; nous recherchons une expression de $\sigma(y, z)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ 0 = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

Remarque : les coordonnées y et z d'un point de la section sont définies dans le repère local.

Avec comme hypothèses :

$$\begin{aligned} \text{Loi de Hooke :} & \quad \sigma = E\varepsilon \\ \text{NAVIER BERNOULLI :} & \quad \varepsilon = a + by + cz \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} -E(a + by + cz) dS \\ 0 &= \int_{\Sigma} -E(a + by + cz) z dS \\ M_z &= \int_{\Sigma} E(a + by + cz) y dS \end{aligned} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= -Ea \int_{\Sigma} dS - Eb \int_{\Sigma} y dS - Ec \int_{\Sigma} z dS \\ 0 &= -Ea \int_{\Sigma} z dS - Eb \int_{\Sigma} yz dS - Ec \int_{\Sigma} z^2 dS \\ M_z &= Ea \int_{\Sigma} y dS + Eb \int_{\Sigma} y^2 dS + Ec \int_{\Sigma} yz dS \end{aligned} \right.$$

A l'aide des mêmes remarques qu'au paragraphe précédent :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= EaA \\ 0 &= EcI_y, \text{ soit :} \\ M_z &= EbI_z \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \\ b &= \frac{M_z}{EI_z} \end{aligned} \right.$$

Nous avons donc une répartition des contraintes normales dans la section droite comme suit :

$$\boxed{\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y}$$

Remarque : on montre de même que pour une section droite sollicitée en flexion simple par un moment fléchissant M_y :

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_y}{I_y} z$$

Pour un moment M_z :

En fibre supérieure ($y = -v$) :

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{M_z}{I_z} v$$

En fibre inférieure ($y = v'$)

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M_z}{I_z} v'$$

Au centre de gravité G ($y = 0$)

$$\sigma(G) = 0$$

Cette fonction ne dépendant pas de z , nous la représentons en fonction de y ; nous obtenons la répartition des contraintes normales dans la section droite.

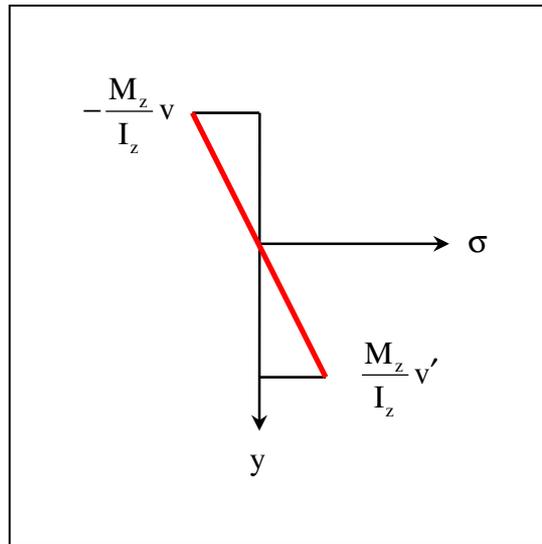


Fig. 6.5 – Répartition des contraintes normales – Flexion simple

6.2.3 Déformations

La répartition des déformations dans la section droite vaut :

$$\epsilon(y, z) = \frac{M_z}{EI_z} y$$

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx sollicité en flexion simple par un moment fléchissant M_z .

Le tronçon de fibre de longueur dx en y s'allonge de ϵdx soit : $\frac{M_z}{EI_z} y dx$

La section droite d'abscisse x tourne d'un angle $\omega_z(x)$ autour de l'axe z .

Remarque : l'axe z étant fuyant, $\omega_z(x)$ est compté positif dans le sens horaire.

Les sections tournent relativement entre elles d'un angle $d\omega_z(x) : -\frac{\epsilon dx}{y}$, soit $-\frac{M_z}{EI_z} dx$

Nous traçons alors la déformée du tronçon de poutre :

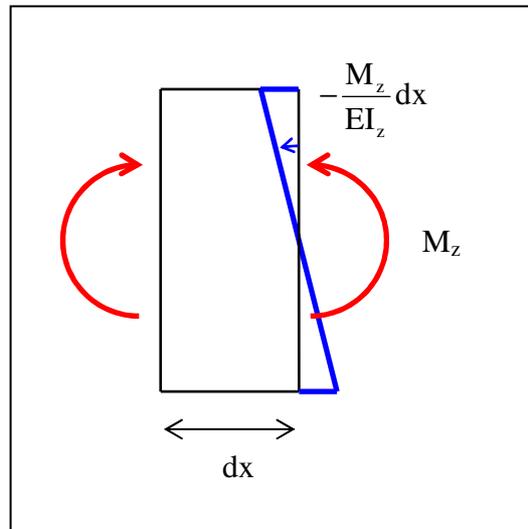


Fig. 6.6 – Déformations – Flexion simple

6.2.4 Courbure

La courbure $\chi_z(x)$ de la poutre à la section d'abscisse x est l'inverse du rayon de courbure.

A l'aide de la figure suivante, nous pouvons exprimer la courbure en fonction du moment fléchissant.

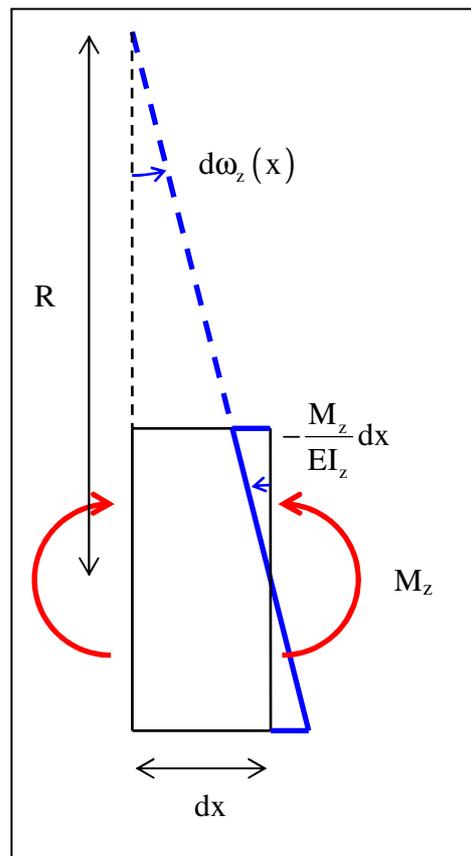


Fig. 6.7 – Courbure – Flexion simple

Soit $\omega_z(x)$ la rotation de la section d'abscisse x .

Nous avons : $d\omega_z(x) = -\frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \frac{dx}{R(x)} = \chi_z(x) dx$

Nous en déduisons l'expression de la courbure :

$$\chi_z(x) = \frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\frac{M_z(x)}{EI_z}$$

De même pour la flexion simple autour de l'axe y, nous obtenons :

$$d\omega_y(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y} dx = \chi_y(x) dx$$

D'où l'expression de la courbure dans le plan G,z,x

$$\chi_y(x) = \frac{d\omega_y(x)}{dx} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

Considérons une poutre droite avec le cas de charge suivant :

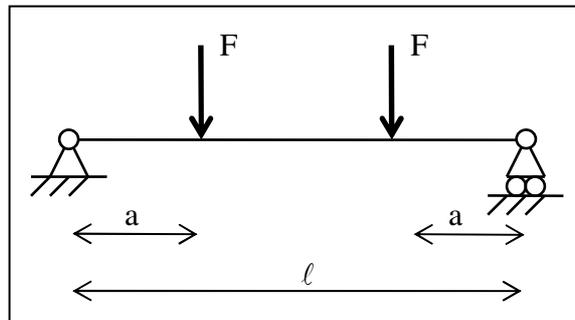


Fig. 6.8 – Flexion circulaire

Nous vérifions que les sollicitations sur la partie centrale de la poutre se résument à un moment fléchissant constant et un effort tranchant nul :

$$a < x < l - a : M(x) = Fa \text{ et } V(x) = 0$$

La courbure sur le tiers central de la poutre est donc constante ; nous en déduisons que la déformée de la poutre sur ce tronçon est circulaire.

Définition 64 : Flexion pure

Une section droite est sollicitée en flexion pure autour de z (resp. y) si les sollicitations se résument à un unique moment fléchissant M_z (resp. M_y).

Une poutre est sollicitée en flexion pure si et seulement si toutes les sections droites de la poutre sont sollicitées en flexion pure ; la déformée étant alors circulaire, le type de sollicitation se nomme également flexion circulaire.

Remarque : Le schéma mécanique de la Fig. 6.8 correspond à une manipulation de laboratoire de structures ; une instrumentation de la zone centrale permet d'étudier l'influence d'un unique moment fléchissant comme sollicitation, cette manipulation s'appelle également flexion quatre points (deux points d'appuis et deux points de chargement) ; une instrumentation en section médiane s'affranchit également de l'hypothèse de Saint VENANT.

6.2.5 Module de flexion élastique

Considérons une section sollicitée en flexion simple autour de l'axe z par un moment positif M_z .

Pour un matériau donné, supposons connus les contraintes limites élastiques :

En traction σ_e et en compression $-\sigma_e$

Pour que la section reste dans le domaine élastique, nous en déduisons :

La fibre supérieure est comprimée :
$$\sigma(-v) = -\frac{M_z}{I_z} v \geq -\sigma_e$$

La fibre inférieure est tendue :
$$\sigma(v') = \frac{M_z}{I_z} v' \leq \sigma_e$$

Ainsi, plus M_z est grand, plus $\frac{I_z}{v}$ et $\frac{I_z}{v'}$ doivent être grand pour que la section reste dans le domaine élastique.

Définition 65 : Module de flexion élastique

Les caractéristiques géométriques de la section $\frac{I_z}{v}$ et $\frac{I_z}{v'}$ s'appellent module de flexion élastique.

C'est cette caractéristique géométrique qui sera optimisée pour valider une poutre sollicitée en flexion simple selon un critère élastique.

Elle est donnée dans les catalogues de profilés métalliques symétriques : $W_{el} = \frac{I_z}{v} = \frac{I_z}{v'}$

Le moment limite M_e pour rester dans le domaine élastique vaut donc : $M_e = W_{el}\sigma_e$

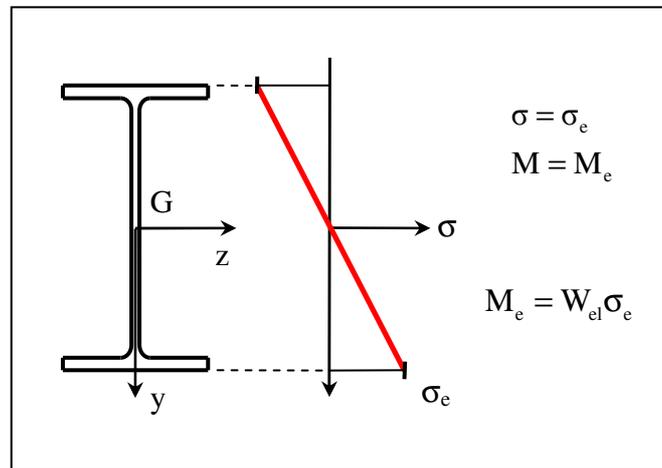


Fig. 6.9 – Module de flexion élastique

6.2.6 Module de flexion plastique

Supposons maintenant le matériau élasto-plastique.

Si on augmente encore le moment fléchissant, la contrainte σ_e va progressivement être atteinte dans tous les points de la section.

A la limite, tous les points de la section droite auront une contrainte normale σ_e ou $-\sigma_e$

Le moment fléchissant limite correspondant est appelé moment plastique : M_p

Définition 66 : Module de flexion plastique

Le moment plastique en fonction de la contrainte limite élastique est donné par la relation : $M_p = W_{pl} \sigma_e$ la caractéristique géométrique W_{pl} est appelé module de flexion plastique.

C'est cette caractéristique géométrique qui sera optimisée pour valider une poutre sollicitée en flexion simple selon un critère plastique.

Elle est donnée dans les catalogues de profilés métalliques symétriques : W_{pl}

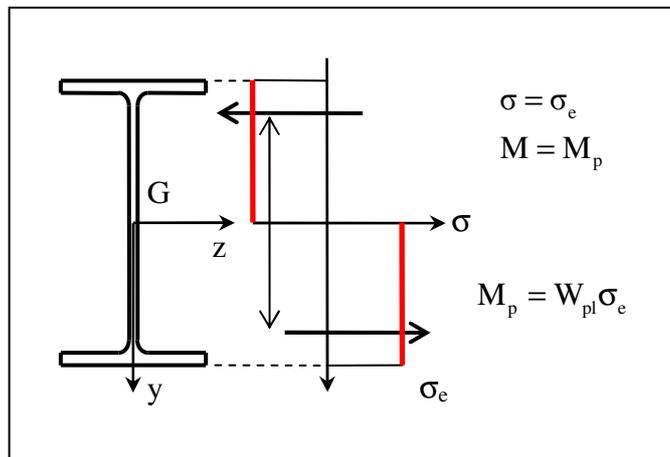


Fig. 6.10 – Module de flexion plastique

Soit S le moment statique d'une demi section symétrique par rapport à l'axe z , on montre que : $W_{pl} = 2S$

La différence entre le module de flexion élastique et plastique met en évidence la « réserve » de plasticité de la section droite.

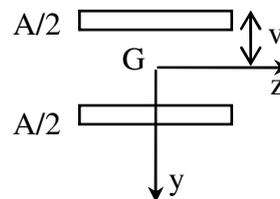
6.2.7 Rendement en flexion

Considérons une section symétrique par rapport à l'axe z , d'aire A et de hauteur h données

$$v = v' = \frac{h}{2}$$

Pour que cette section soit idéale en flexion simple, toutes les fibres doivent être sollicitées au maximum, c'est-à-dire extrêmes.

L'inertie de cette section idéale vaut :



$$I_{idéale} = 2 \frac{A}{2} v^2 = Av^2$$

Pour un telle section, le module de flexion élastique et plastique sont égaux.

$$W_{el} = W_{pl} = Av$$

Il n'y a pas de réserve plastique

Définition 67 : Rendement en flexion

Le rendement ρ d'une section droite est le rapport de l'inertie réelle sur l'inertie idéale :

$$\rho = \frac{I_{\text{réel}}}{I_{\text{idéal}}} = \frac{I_z}{Av^2}$$

Quelques valeurs du rendement en flexion :

Profils en I :	$\approx 2/3$
Tubes à parois mince	$\approx 1/2$
Rectangle	$1/3$
Disque	$1/4$
Losange	$1/6$

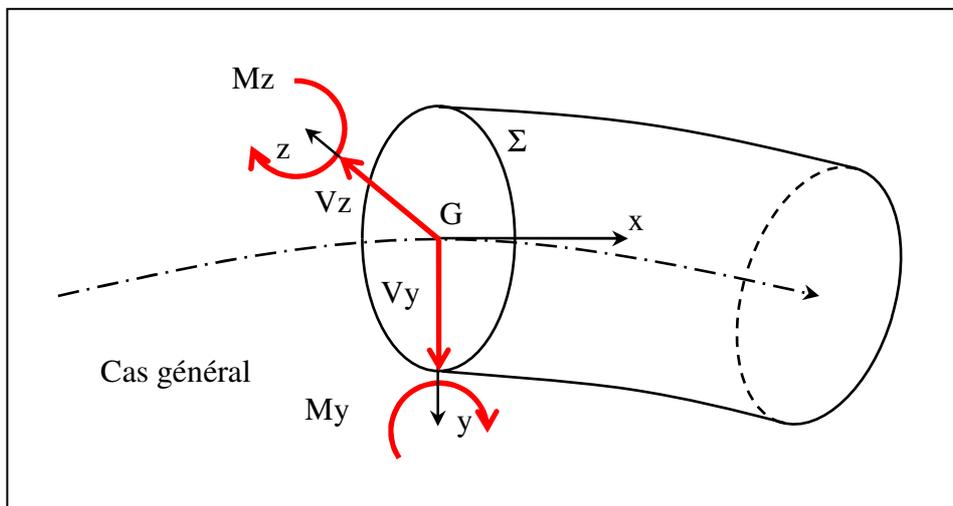
6.3 Flexion déviée**6.3.1 Définition**

Fig. 6.11 – Flexion déviée

Définition 68 : Flexion déviée

Une section droite est sollicitée en flexion déviée si et seulement si les sollicitations se résument à deux moments fléchissants M_z et M_y et éventuellement un effort tranchant.

Une poutre est sollicitée en flexion déviée si et seulement si toutes les sections droites de la poutre sont sollicitées en flexion déviée.

Cette définition correspond à la Fig. 6.11 – Flexion déviée

Les relations sollicitations contraintes du paragraphe 3.4.1 page 53 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ V_y = \int_{\Sigma} -\tau_y dS \\ V_z = \int_{\Sigma} -\tau_z dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} \tau_y z - \tau_z y dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

6.3.2 Répartition des contraintes

Avec les mêmes remarques qu'au paragraphe 6.2.2, nous recherchons une expressions de $\sigma(y, z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{cases}$$

Nous remarquons que la flexion déviée est la superposition d'une flexion simple autour de l'axe z et une flexion simple autour de l'axe y.

Nous appliquons donc le principe de superposition sur les contraintes :

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Cette fonction dépendant de y et de z, nous représentons la répartition des contraintes normales dans la section droite en perspective.

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h, la répartition des contraintes est comme suit :

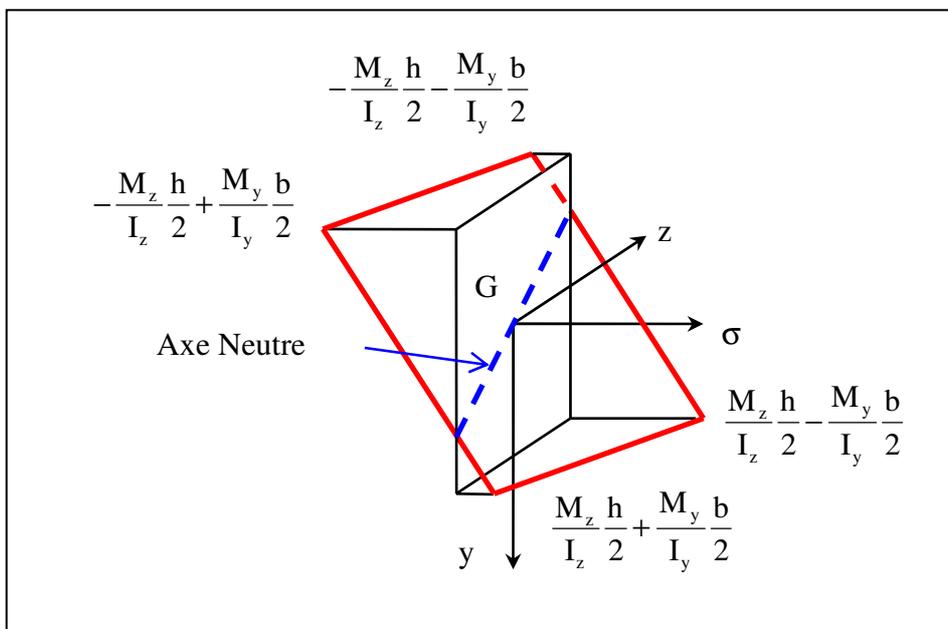


Fig. 6.12 – Répartition des contraintes normales – Flexion déviée

6.3.3 Déformations

Nous appliquons le principe de superposition sur les déformations :

La répartition des déformations dans la section droite vaut :

$$\varepsilon(y, z) = \frac{M_z}{EI_z} y - \frac{M_y}{EI_y} z$$

Nous appliquons le principe de superposition sur les rotations des sections :

La section droite d'abscisse x tourne d'un angle $\omega_z(x)$ autour de l'axe z et d'un angle $\omega_y(x)$ autour de l'axe y .

Les sections tournent relativement entre elles d'un angle autour de l'axe z :

$$d\omega_z(x) = -\frac{M_z}{EI_z} dx$$

Et d'un angle autour de l'axe y :

$$d\omega_y(x) = -\frac{M_y}{EI_y} dx$$

6.3.4 Axe neutre

Définition 69 : Axe neutre

L'axe neutre est défini dans le plan d'une section droite d'une poutre composée d'un matériau élastique linéaire.

C'est la droite : lieu des points où les déformations longitudinales sont nulles.

C'est également de part la loi de HOOKE, la droite : lieu des points où les contraintes normales sont nulles.

Dans le cas de la flexion déviée, cette droite passe par le point G et a pour équation :

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

6.4 Flexion composée

6.4.1 Définition

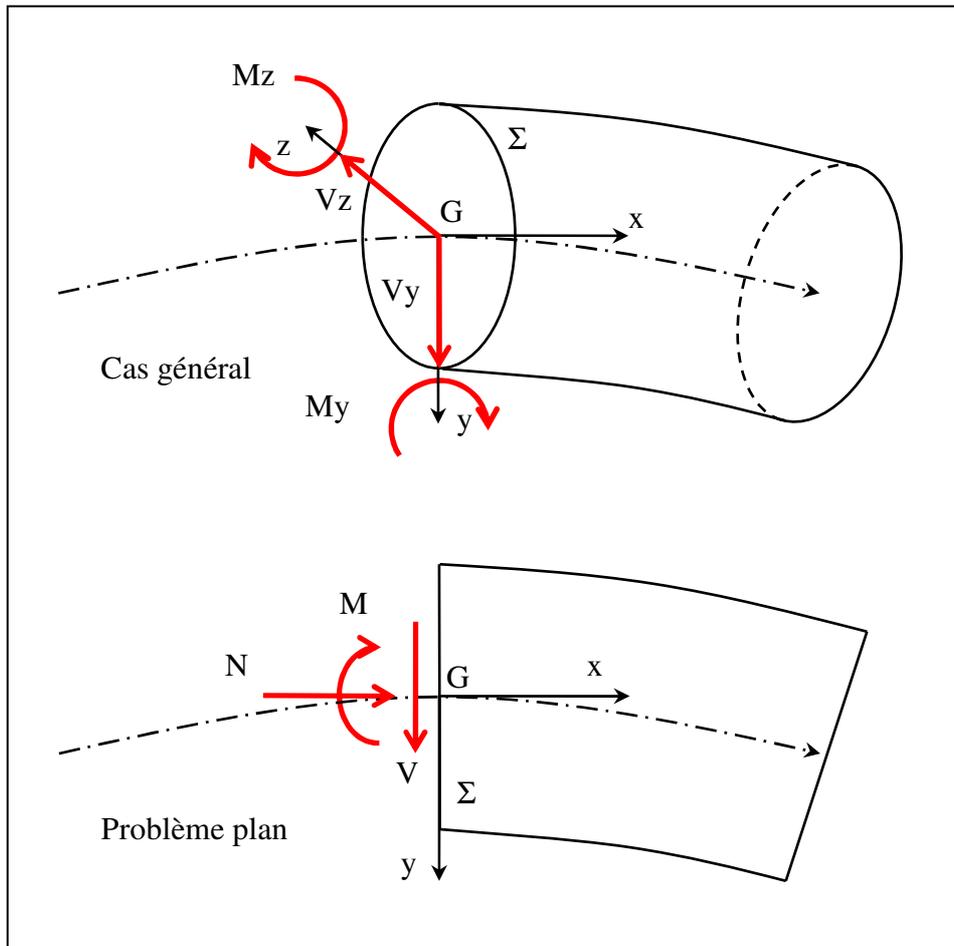


Fig. 6.13 – Flexion composée

Définition 70 : Flexion composée

Une section droite est sollicitée en flexion composée si et seulement si les sollicitations se résument à deux moments fléchissants M_z et M_y , un effort normal N et éventuellement un effort tranchant.

Dans les problèmes plans, une section est sollicitée en flexion composée si les sollicitations se résument à un moment fléchissant M , un effort normal N et éventuellement un effort tranchant V .

Une poutre est sollicitée en flexion composée si et seulement si toutes les sections droites de la poutre sont sollicitées en flexion composée.

Cette définition correspond à la Fig. 6.13 – Flexion composée.

Les relations sollicitations contraintes du paragraphe 3.4.1 page 53 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ V_y = \int_{\Sigma} -\tau_y dS \\ V_z = \int_{\Sigma} -\tau_z dS \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Sigma} \tau_{yz} - \tau_{zy} dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{array} \right.$$

6.4.2 Répartition des contraintes

Avec les mêmes remarques qu'au paragraphe 6.2.2, nous recherchons une expression de $\sigma(y, z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} N = \int_{\Sigma} -\sigma dS \\ M_y = \int_{\Sigma} -\sigma z dS \\ M_z = \int_{\Sigma} \sigma y dS \end{cases}$$

Nous remarquons que la flexion composée est la superposition d'une flexion déviée et d'une traction (ou compression).

Nous appliquons donc le principe de superposition sur les contraintes :

$$\sigma(y, z) = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Cette fonction dépendant de y et de z , nous représentons la répartition des contraintes normales dans la section droite en perspective.

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h , la répartition des contraintes est comme suit :

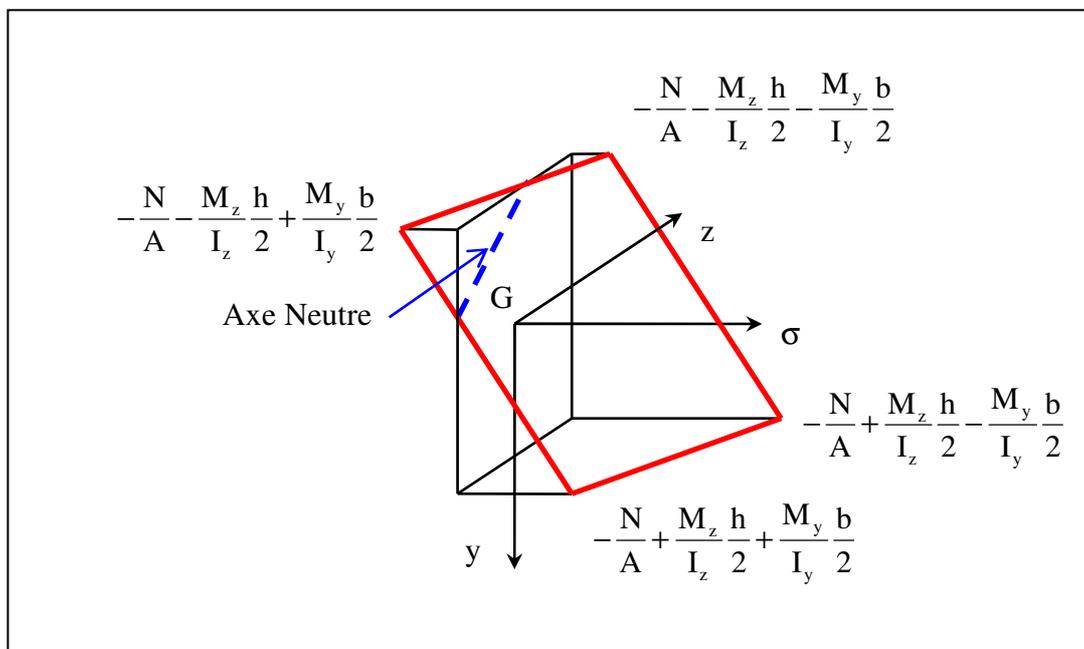


Fig. 6.14 – Répartition des contraintes normales – Flexion composée – Cas général

Dans le cas de problème plan, l'expression des contraintes normales se réduit à :

$$\sigma(y, z) = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y$$

Cette fonction indépendante de z se trace en fonction de y :

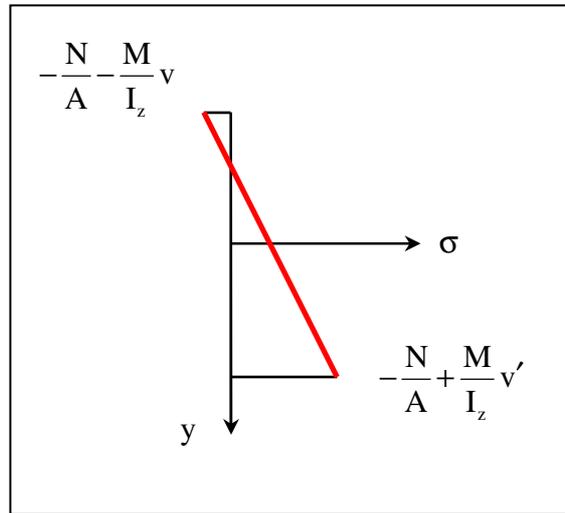


Fig. 6.15 – Répartition des contraintes normales – Flexion composée – Problème plan

6.4.3 Centre de pression

Définition 71 : Centre de pression

Le centre de pression est le point C du plan de la section droite, tel que si l’effort normal N est appliqué en C, il induit en G les moments fléchissants :

$$\vec{M}_G(N) = M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

Nous pouvons donner une interprétation graphique en disant que les actions mécaniques sont équivalentes dans les deux cas suivant :

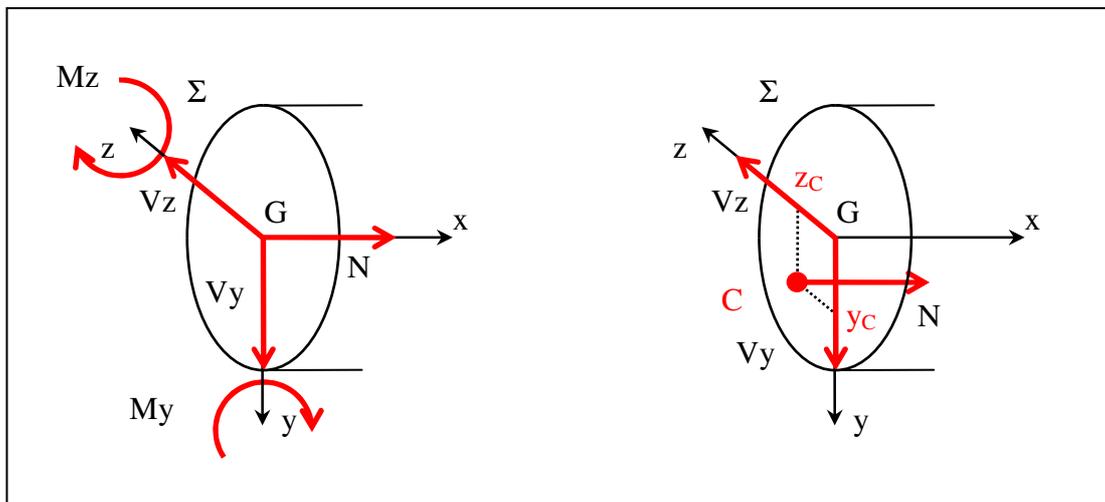


Fig. 6.16 – Centre de pression

D’après la définition de C, nous avons :

$$\begin{cases} Nz_C = M_y \\ Ny_C = -M_z \end{cases}$$

Les coordonnées du point C dans le repère (G, y, z) sont donc :

$$C \begin{pmatrix} -\frac{M_z}{N} \\ \frac{M_y}{N} \end{pmatrix}$$

Dans le cas des problèmes plans, nous avons l'interprétation graphique suivante :

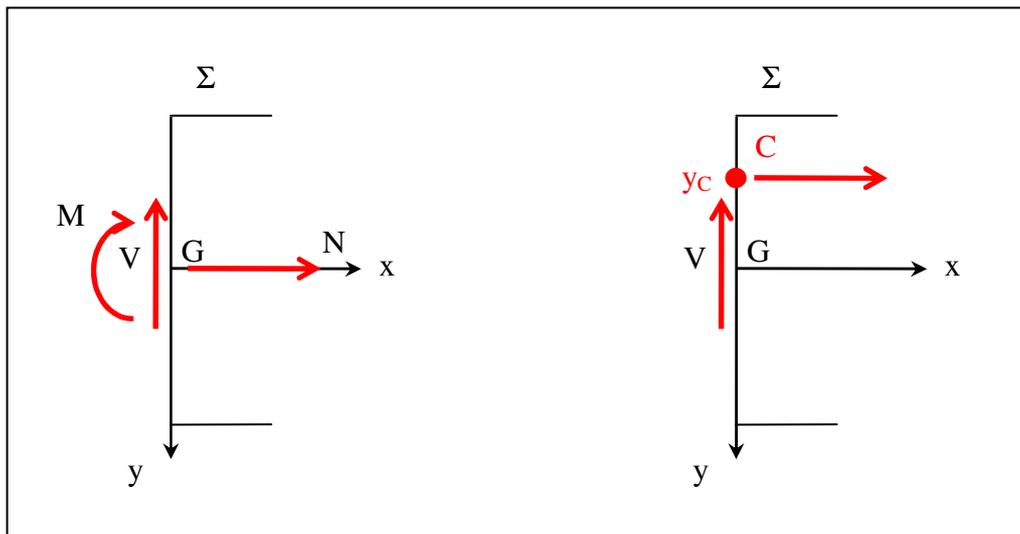


Fig. 6.17 – Centre de pression – Problème plan

Les coordonnées du point C dans le repère (G, y, z) sont :

$$C \begin{pmatrix} -\frac{M}{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4.4 Axe neutre

L'axe neutre étant le lieu des points du plan de la section droite où les contraintes normales sont nulles, nous avons :

$$-\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

Soit :

$$1 - \frac{M_z}{N} \frac{A}{I_z} y + \frac{M_y}{N} \frac{A}{I_y} z = 0$$

En faisant intervenir les coordonnées du centre de pression :

$$1 + y_c \frac{A}{I_z} y + z_c \frac{A}{I_y} z = 0$$

En faisant intervenir les rayons de girations $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ et $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, nous obtenons :

$$1 + \frac{y_c}{i_z^2} y + \frac{z_c}{i_y^2} z = 0$$

L'axe neutre est donc une droite qui ne passe pas par le centre de gravité de la section. Il peut être en dehors de la section, dans ce cas, la section est entièrement tendue ou entièrement comprimée. Lorsque l'axe neutre traverse la section droite, il partage celle-ci en une zone comprimée et une zone tendue.

6.5 Noyau central

Certains matériaux, ont une faible résistance à la traction (maçonnerie, béton), on essaie d'avoir des sections toujours entièrement comprimées.

6.5.1 Définition

Définition 72 : noyau central

En flexion composée avec un effort normal de compression ($N < 0$), le noyau central d'une section droite est le lieu des centres de pression tel que la section soit entièrement comprimée ; l'axe neutre est alors à l'extérieur de la section droite.

Quand l'axe neutre enveloppe la section droite, le centre de pression décrit une courbe fermée qui délimite le Noyau central de la section droite.

6.5.2 Section circulaire

Déterminons le noyau central d'une section droite circulaire de rayon R.

De part la symétrie, nous savons que la limite du noyau central sera un cercle.

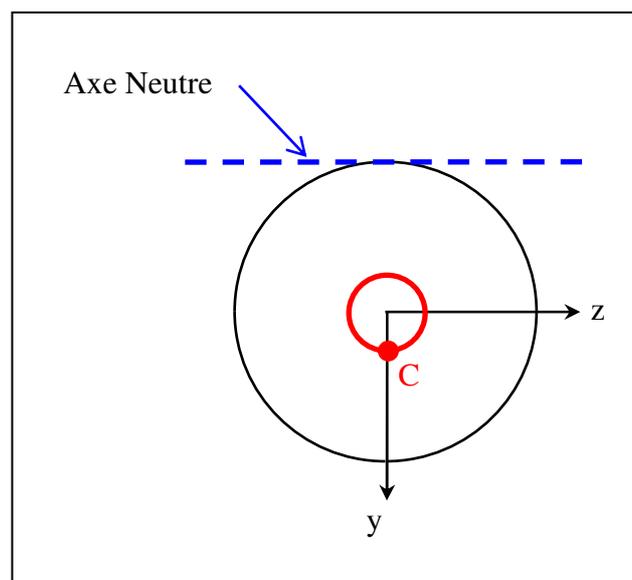


Fig. 6.18 – Centre de pression – Section circulaire

Dans le cas d'une section circulaire, nous avons :

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} \text{ d'où : } i_y = i_z = \frac{R}{2}$$

L'équation de l'axe neutre devient :

$$1 + 4 \frac{y_c}{R^2} y + 4 \frac{z_c}{R^2} z = 0$$

Choisissons un axe neutre tangent à la section droite d'équation :

$$y = -R \text{ soit : } 1 + \frac{y}{R} = 0$$

Nous en déduisons que les coordonnées du centre de pression correspondant vérifient :

$$\begin{cases} 4 \frac{y_c}{R^2} = \frac{1}{R} \\ 4 \frac{z_c}{R^2} = 0 \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} y_c = \frac{R}{4} \\ z_c = 0 \end{cases}$$

Le noyau central est donc un disque de rayon $\frac{R}{4}$

Remarque : ce résultat peut s'obtenir plus rapidement en cherchant la valeur y_c telle que la contrainte en fibre supérieure soit nulle.

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{N}{A} + \frac{N y_c}{I_z} v = \frac{N}{A} \left(1 - y_c \frac{4}{R} \right) = 0$$

6.5.3 Construction graphique

Rappel mathématique : polaire d'un point par rapport à une ellipse

Nous considérons une ellipse d'équation :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ dans un repère } (G, y, z) \text{ et un point } M_0 \text{ de coordonnées } (y_0, z_0)$$

Nous traçons les deux droites passant par M_0 tangentes à l'ellipse.

Nous construisons la droite Δ passant par les deux points de tangence.

Nous disons que M_0 est le pôle de Δ et que Δ est la polaire de M_0 par rapport à l'ellipse.

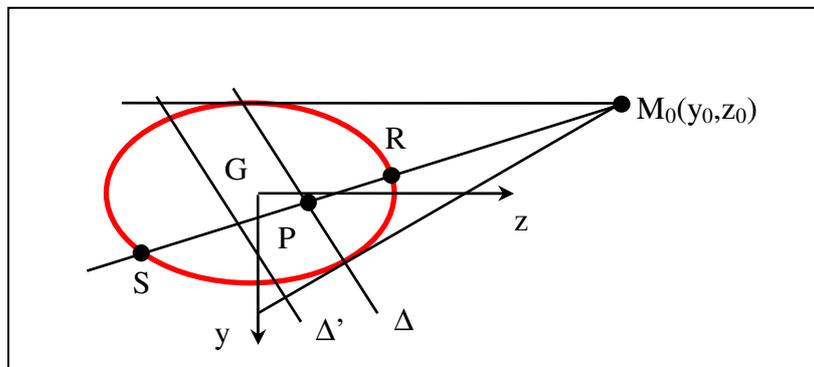


Fig. 6.19 – Polaire d'un point par rapport à une ellipse

L'équation de Δ est :

$$\frac{y_0}{a^2} y + \frac{z_0}{b^2} z = 1$$

Nous considérerons la droite Δ' : symétrique de Δ par rapport à G.

L'équation de Δ' est :

$$-\frac{y_0}{a^2} y - \frac{z_0}{b^2} z = 1$$

Montrons que si M_0 est un point autour duquel tourne l'axe neutre, et en considérant l'ellipse centrale d'inertie, alors les centres de pression se trouvent sur Δ' .

Démonstration :

L'ellipse centrale d'inertie a pour équation

$$\frac{y^2}{i_z^2} + \frac{z^2}{i_y^2} = 1$$

D'où l'équation de la polaire Δ de M_0 par rapport à l'ellipse d'inertie

$$\frac{y_0}{i_z^2} y + \frac{z_0}{i_y^2} z = 1$$

La droite symétrique Δ' par rapport à G a pour équation

$$-\frac{y_0}{i_z^2} y - \frac{z_0}{i_y^2} z = 1$$

De plus, les coordonnées du point M_0 vérifient l'équation de l'axe neutre

$$1 + \frac{y_c}{i_z^2} y_0 + \frac{z_c}{i_y^2} z_0 = 0$$

On en déduit que les coordonnées du centre de pression vérifient l'équation de la symétrie par rapport à G de la polaire de M_0 par rapport à l'ellipse centrale d'inertie.

6.5.4 Section rectangulaire

Déterminons le noyau central d'une section droite rectangulaire de largeur b et de hauteur h .

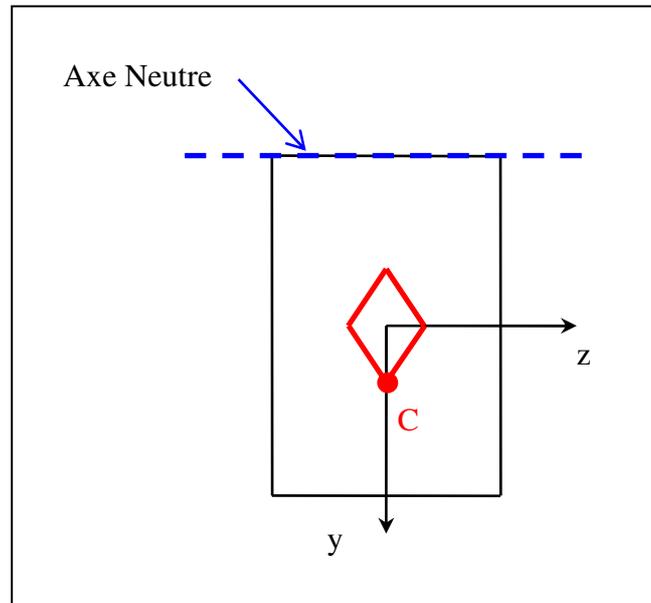


Fig. 6.20 – Centre de pression – Section rectangulaire

Dans le cas d'une section rectangulaire, nous avons :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \text{ et } I_y = \frac{hb^3}{12} \text{ d'où : } i_z = \frac{h}{2\sqrt{3}} \text{ et } i_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

L'équation de l'axe neutre devient :

$$1 + 12 \frac{y_c}{h^2} y + 12 \frac{z_c}{b^2} z = 0$$

Choisissons un axe neutre tangent à la section droite d'équation :

$$y = -\frac{h}{2} \text{ soit : } 1 + \frac{2y}{h} = 0$$

Nous en déduisons que les coordonnées du centre de pression correspondant vérifient :

$$\begin{cases} 12 \frac{y_c}{h^2} = \frac{2}{h} \\ 12 \frac{z_c}{b^2} = 0 \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} y_c = \frac{h}{6} \\ z_c = 0 \end{cases}$$

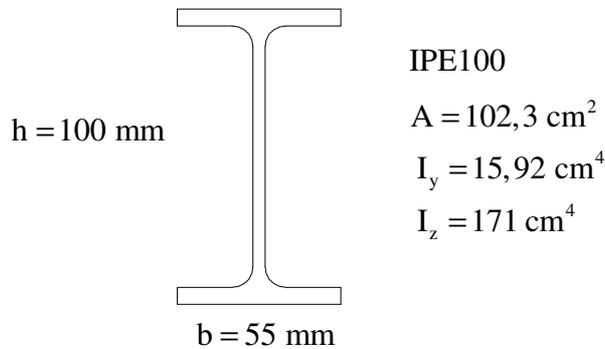
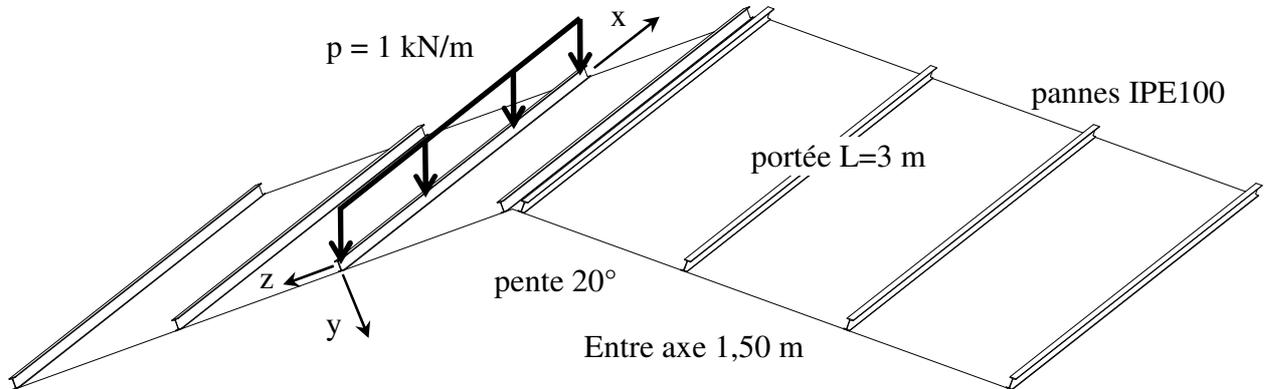
Remarque : ce résultat peut s'obtenir plus rapidement en cherchant la valeur y_c telle que la contrainte en fibre supérieure soit nulle.

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{N}{A} + \frac{Ny_c}{I_z} v = \frac{N}{A} \left(1 - y_c \frac{6}{h} \right) = 0$$

Nous pouvons par suite mettre en place quatre points de la limite du noyau central. Nous pouvons rejoindre ces points par des segments de droite (l'axe neutre tournant autour de chaque angle).

Exercice 1 : Panne de toiture

On considère une panne de toiture intermédiaire sur appuis simples définie ci-dessous :



L'acier a une limite d'élasticité de 235 MPa

Déterminer les contraintes normales dans la section droite la plus sollicitée.

Tracer l'axe neutre correspondant.

Calculer la flèche à mi travée prise par le profilé.

On donne : $\vec{f} = \frac{5p_y L^4}{384EI_z} \vec{y} + \frac{5p_z L^4}{384EI_y} \vec{z}$ avec $E = 200\,000$ Mpa

Solution :

A mi travée :

$$M_z = 1 \cos 20^\circ \frac{3^2}{8} = 1,06 \text{ kN.m}$$

$$M_y = -1 \sin 20^\circ \frac{3^2}{8} = -0,38 \text{ kN.m}$$

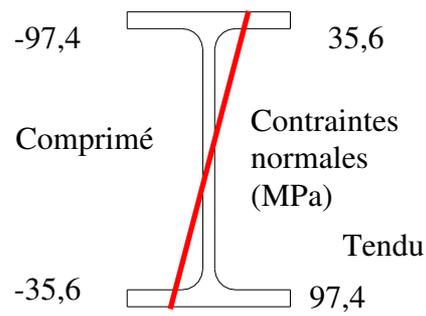
La section est sollicitée en flexion déviée.

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{avec } y = \pm \frac{h}{2} = \pm 50 \text{ mm} \text{ et } z = \pm \frac{b}{2} = \pm 27,5 \text{ mm}$$

$$\frac{M_z}{I_z} \frac{h}{2} = \frac{1,06 \cdot 10^3}{171 \cdot 10^{-8}} 50 \cdot 10^{-3} = 30,9 \text{ MPa}$$

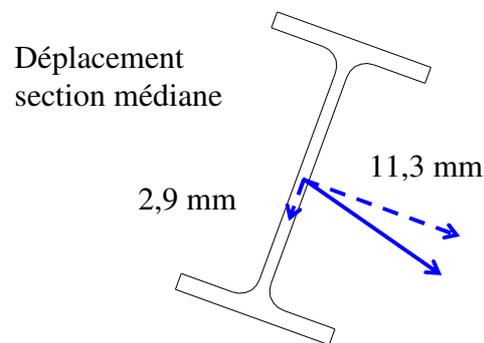
$$\frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} = \frac{-0,38 \cdot 10^3}{15,92 \cdot 10^{-8}} 27,5 \cdot 10^{-3} = -66,5 \text{ MPa}$$

D'où la répartition des contraintes normales et la position de l'axe neutre :



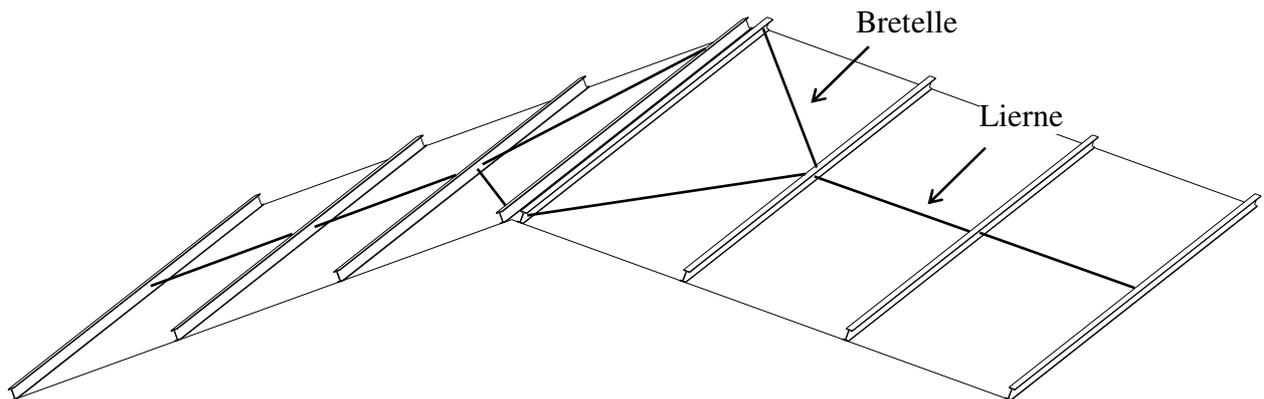
Calcul de la flèche :

$$\vec{f} = 2,9 \text{ mm } \vec{y} + 11,3 \text{ mm } \vec{z}$$



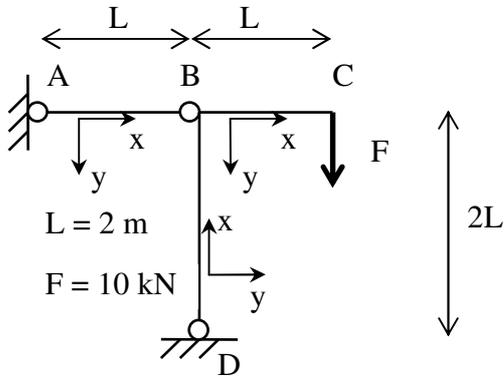
On peut constater et vérifier que la section droite se déplace perpendiculairement à l'axe neutre et que ce déplacement est loin d'être vertical.

Pour réduire le déplacement important dans le plan de la toiture on est amené à disposer des bretelles et des liernes.



Exercice 2 : potence haubanée

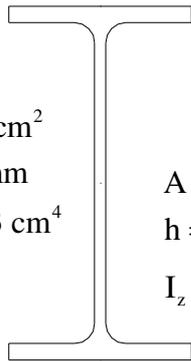
On considère la potence haubanée suivante :



Les différentes sections sont définies ci après :

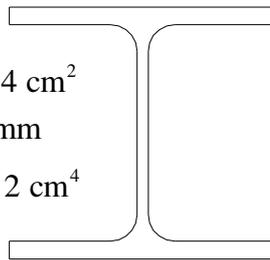
Poutre BC :
IPE160

$A = 20,1 \text{ cm}^2$
 $h = 160 \text{ mm}$
 $I_z = 869,3 \text{ cm}^4$



Poutre DB :
HE 120 A

$A = 25,34 \text{ cm}^2$
 $h = 114 \text{ mm}$
 $I_z = 606,2 \text{ cm}^4$



Poutre AB :
 $\Phi 10 \text{ mm}$

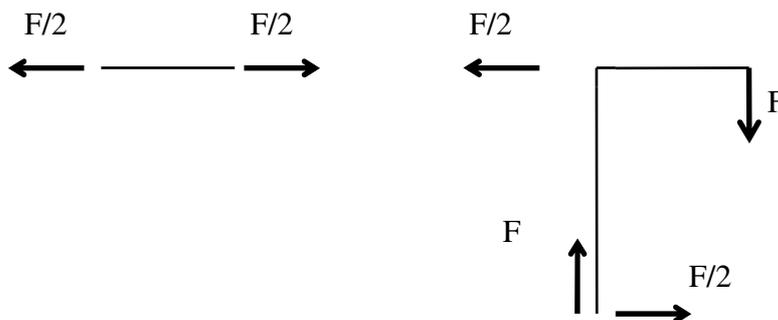


Déterminer pour chaque poutre la section la plus sollicitée.

Indiquer son type de sollicitation et tracer la répartition des contraintes dans cette section.

Solution :

L'analyse de l'équilibre des deux sous structures montre que la structure est isostatique.

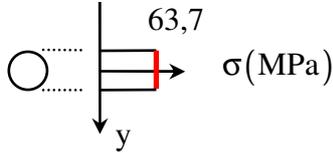


Poutre AB :

Cette poutre est sollicitée en traction simple : $N = -5 \text{ kN}$

$$\text{Contraintes normales : } \sigma(y, z) = -\frac{N}{A} \quad \sigma(y, z) = -\frac{-5 \cdot 10^3}{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2} = 63,7 \text{ MPa}$$

Poutre AB :

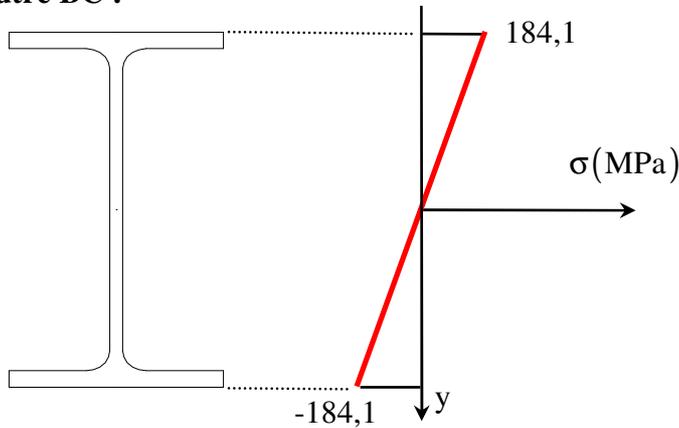


Poutre BC :

Cette poutre est sollicitée en Flexion simple : en B $M = -20 \text{ kN.m}$

$$\text{Contraintes normales : } \sigma_{\text{sup}} = -\sigma_{\text{inf}} = -\frac{M_z}{I_z} v \quad \sigma_{\text{sup}} = -\sigma_{\text{inf}} = \frac{20 \cdot 10^3}{869,3 \cdot 10^{-8}} 80 \cdot 10^{-3} = 184,1 \text{ MPa}$$

Poutre BC :



Poutre DB :

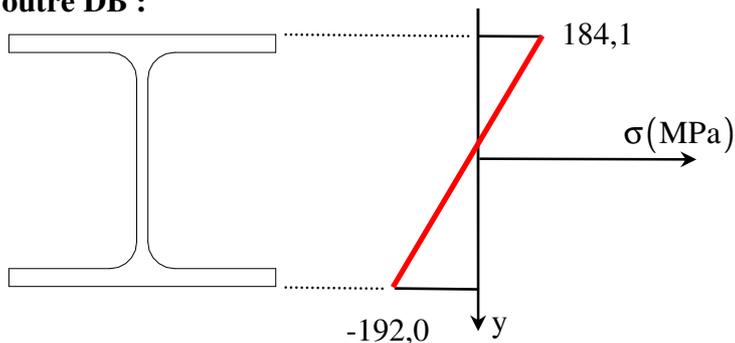
Cette poutre est sollicitée en Flexion composée : en B $N = 10 \text{ kN}$ $M = -20 \text{ kN.m}$

Contraintes normales :

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} v \quad \sigma_{\text{sup}} = -\frac{10 \cdot 10^3}{25,34 \cdot 10^{-4}} + \frac{20 \cdot 10^3}{606,2 \cdot 10^{-8}} 57 \cdot 10^{-3} = 184,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{inf}} = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} v \quad \sigma_{\text{inf}} = -\frac{10 \cdot 10^3}{25,34 \cdot 10^{-4}} - \frac{20 \cdot 10^3}{606,2 \cdot 10^{-8}} 57 \cdot 10^{-3} = -192 \text{ MPa}$$

Poutre DB :



Chapitre 7 Contraintes tangentés Effort tranchant

7.1 Propriétés des contraintes tangentés

On rappelle la forme, du tenseur des contraintes dans une section droite :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.1.1 Réciprocité

Considérons un élément de volume dont une face est comprise dans une section droite.

Les contraintes agissant sur les différentes facettes du volume élémentaire sont représentées sur l'élément agrandi.

Sur deux facettes orthogonales, les composantes des contraintes tangentés, perpendiculaires à l'arête commune, sont égales et dirigées soit vers l'arête, soit dans le sens contraire.

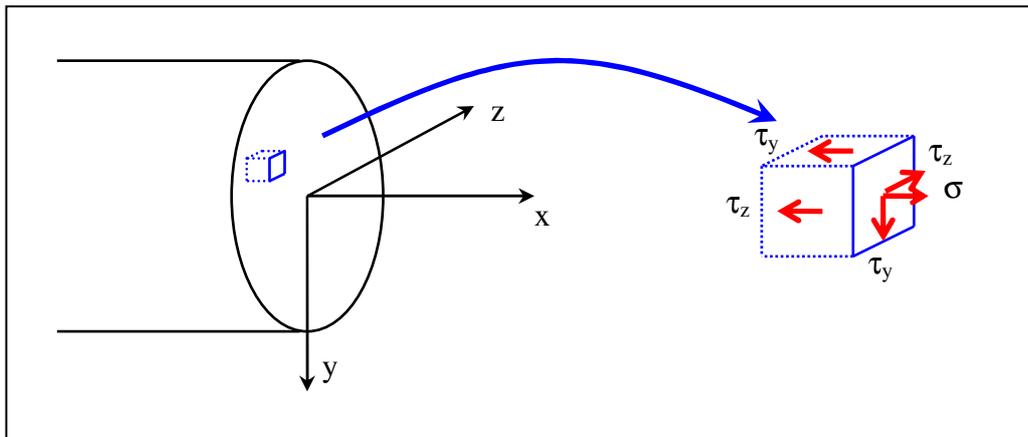


Fig. 7.1 – Réciprocité des contraintes

7.1.2 Conséquence

Dans une section droite, en un point du contour extérieur, la contrainte de cisaillement est tangente à ce contour.

Cette conséquence est illustrée sur la Fig. 7.2

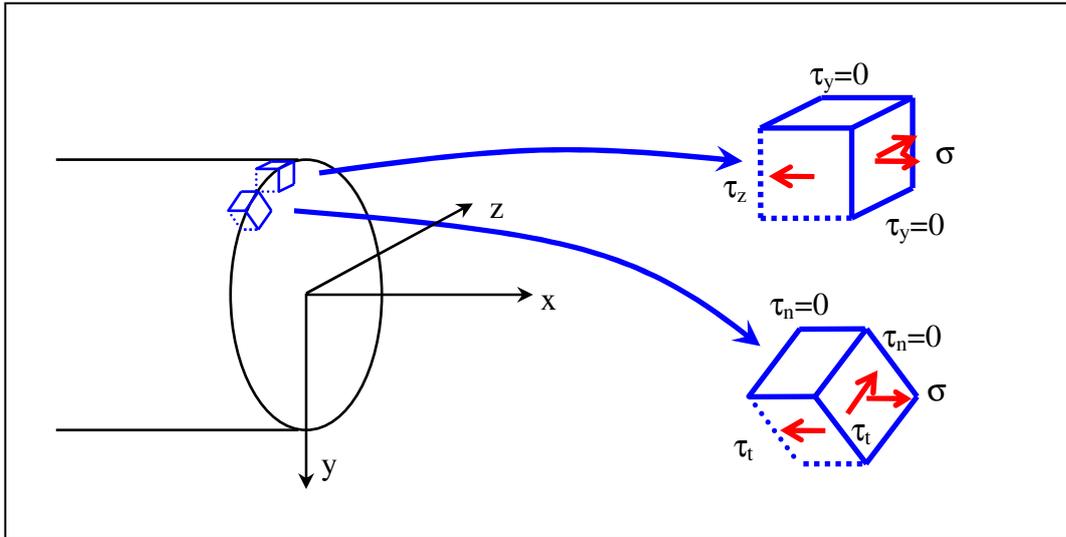


Fig. 7.2 – Réciprocité des contraintes – Bord libre

7.2 Définition

Nous considérerons dans ce chapitre une section droite d'une poutre sollicitée par un effort tranchant V_y et un effort tranchant V_z , Le moment de torsion étant nul.

Dans le cas d'un problème plan, la section droite sera sollicitée par un effort tranchant V .

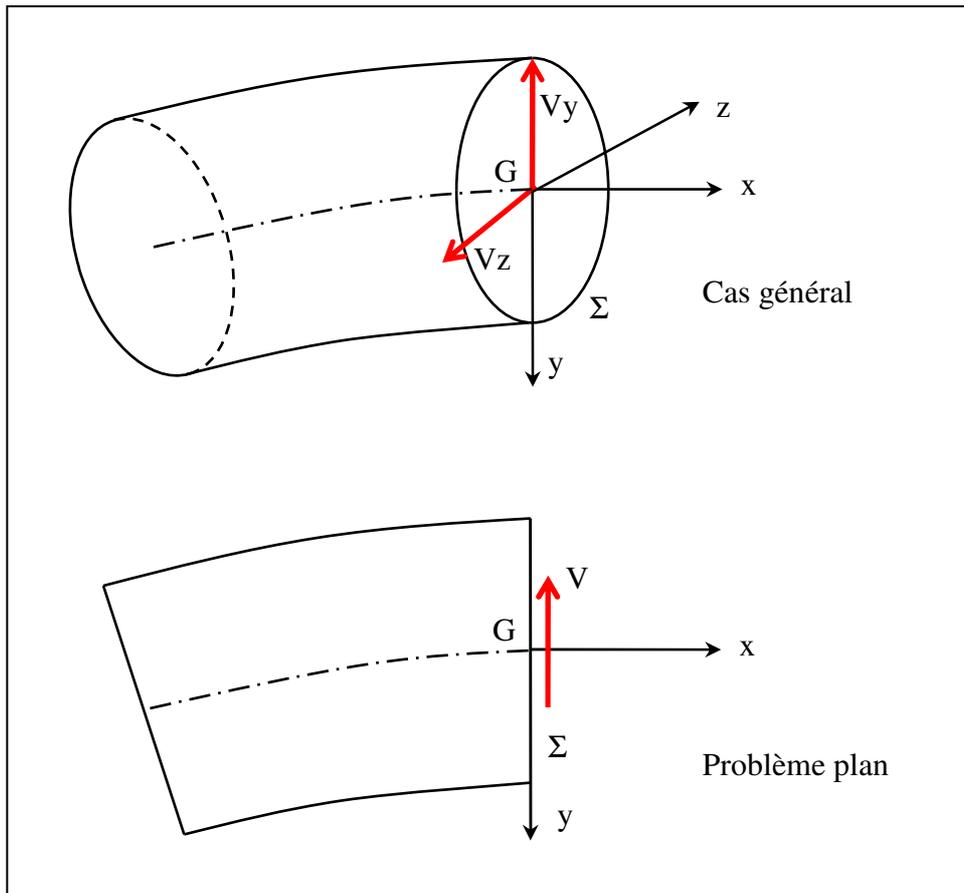


Fig. 7.3 – Sollicitations - Effort tranchant

Les relations entre les contraintes tangentés et les efforts intérieurs imposent :

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = V_z \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \end{cases}$$

Remarque : la présence d'un effort tranchant dans une section droite, nous impose celle d'un moment fléchissant suite aux relations

$$V_y = -\frac{dM_z}{dx} \text{ et } V_z = \frac{dM_y}{dx}$$

De part le principe de superposition, les composantes M_z et M_y du moment fléchissant ont pu être étudiées séparément.

Les relations entre le moment fléchissant et les contraintes ne font intervenir que les contraintes normales, les relations entre les contraintes tangentés et les efforts tranchants n'en sont donc pas affectées.

7.3 Théorème de la coupure

7.3.1 Hypothèses

1. La poutre est de section constante.
2. Pas de variation de l'effort normal N sur le tronçon de poutre dx .

On note Σ_x la section d'abscisse x et G_x son centre de gravité.

On note (C) une courbe orientée séparant la section Σ_x en deux parties.

On note Σ_x^+ la partie à gauche de (C) de la section de Σ_x .

On note σ_x la contrainte normale σ dans la section Σ_x .

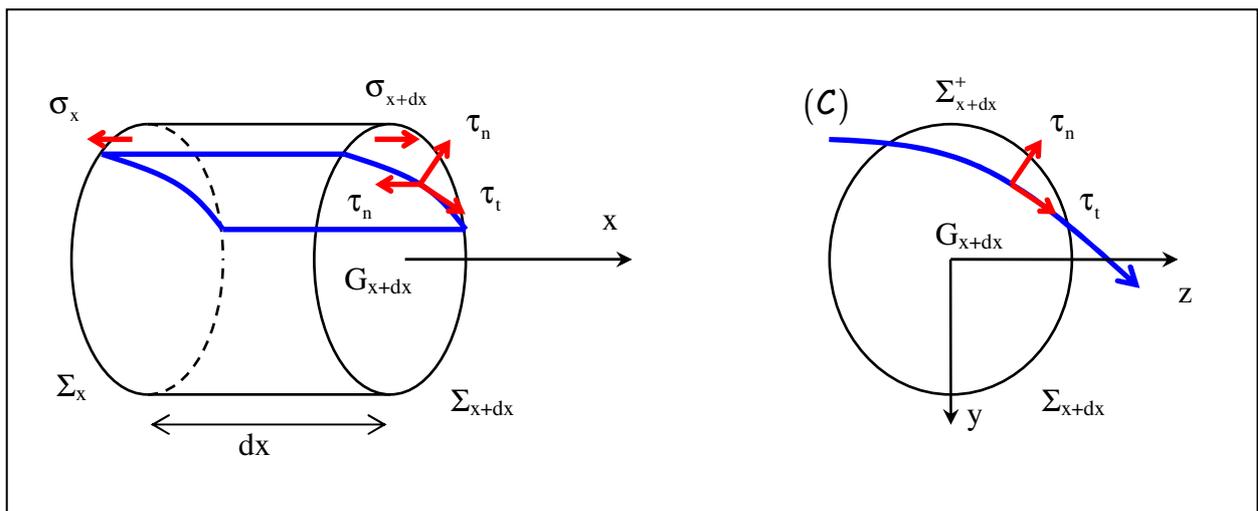


Fig. 7.4 –Équilibre d'un tronçon de poutre – Théorème de la coupure

La contrainte tangente se décompose en τ_t tangent à (C) et τ_n perpendiculaire à (C) dirigé vers Σ_x^+ .

Remarque : le trièdre $(\vec{i}, \vec{t}, \vec{n})$ est un trièdre direct.

7.3.2 Equation d'équilibre

Nous étudions l'équilibre de la partie supérieure du tronçon du point de vue des forces selon l'axe x :

$$-\int_{(C)} \tau_n dx dl + \int_{\Sigma_{x+dx}^+} \sigma_{x+dx} dS - \int_{\Sigma_x^+} \sigma_x dS = 0$$

Soit :

$$-\int_{(C)} \tau_n dx dl + \int_{\Sigma_x^+} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dS = 0$$

Ou encore :

$$\int_{(C)} \tau_n dl = \int_{\Sigma_x^+} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS$$

Remarque : lorsque l'on raisonne pour une section donnée, l'indice x n'est plus une variable et sera omis pour alléger l'écriture :

$$\boxed{\int_{(C)} \tau_n dl = \int_{\Sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dS}$$

On exprime la contrainte normale en fonction de N , M_y et M_z :

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

D'où, en tenant compte des hypothèses :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y}{I_z} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{z}{I_y}$$

Soit :

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{V_y}{I_z} y + \frac{V_z}{I_y} z$$

D'où en remplaçant dans l'équation :

$$-\int_{(C)} \tau_n dl = \int_{\Sigma^+} \left(\frac{V_y}{I_z} y + \frac{V_z}{I_y} z \right) dS$$

Soit :

$$-\int_{(C)} \tau_n dl = \frac{V_y}{I_z} \int_{\Sigma^+} y dS + \frac{V_z}{I_y} \int_{\Sigma^+} z dS$$

On note $S_z(\Sigma^+)$ (resp. $S_y(\Sigma^+)$) le moment statique de la partie de section Σ^+ par rapport à l'axe z (resp. y)

$$S_z(\Sigma^+) = \int_{\Sigma^+} y dS \quad S_y(\Sigma^+) = \int_{\Sigma^+} z dS$$

Ainsi :

$$\int_{(C)} \tau_n dl = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

7.4 Section massive

7.4.1 Définition

Définition 73 : section massive

Une section massive est une section droite dont aucune dimension définissant la section n'est petite par rapport à d'autres.

7.4.2 Théorie élémentaire

Nous considérons une section droite sollicitée par un effort tranchant V_y :

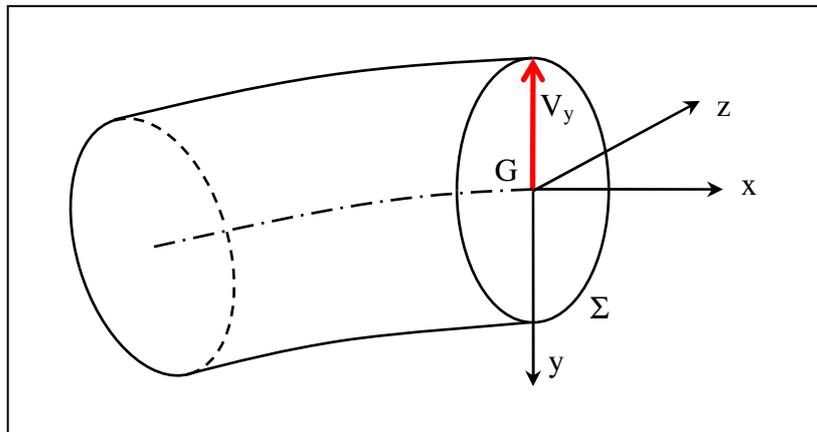


Fig. 7.5 – Section massive – Effort tranchant V_y

Nous faisons l'hypothèse que les contraintes tangentés n'ont qu'une composante τ_y se répartissant uniformément sur la section :

$$\tau_y = -\frac{V_y}{A}$$

On peut représenter la répartition des contraintes de cisaillement :

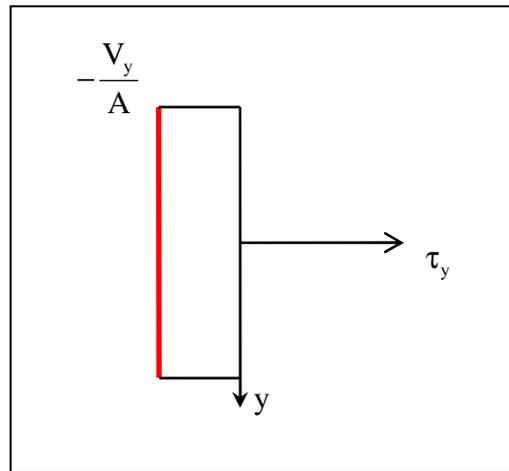


Fig. 7.6 – Contraintes tangentelles - Effort tranchant – Théorie élémentaire

Cette théorie élémentaire est en contradiction avec la réciprocity du tenseur des contraintes, en tous points des fibres extrêmes.

7.4.3 Hypothèse

On suppose qu'un effort tranchant V_y (resp. V_z) n'induit que des contraintes tangentelles τ_y (resp. τ_z) constantes dans la largeur de la section (resp. la hauteur de la section).

7.4.4 Conséquence

On applique le théorème de la coupure à la courbe (C) suivant :

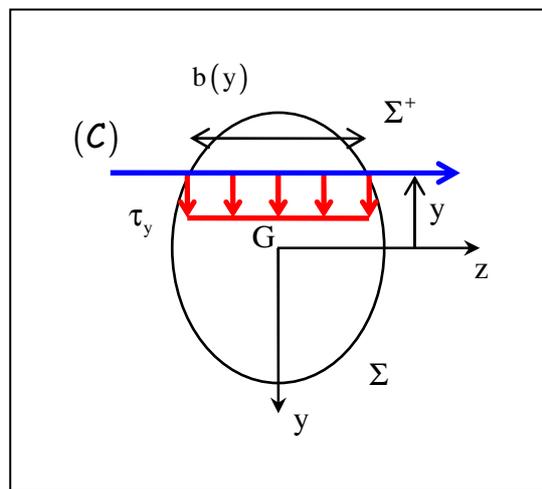


Fig. 7.7 – Coupure – Section massive - Effort tranchant V_y

Le théorème de la coupure donne :

$$\int_{(C)} -\tau_y dl = -\tau_y b(y) = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) = -\frac{V_y}{I_z} S_z(y)$$

Soit :

$$\tau_y = \frac{V_y S_z(y)}{I_z b(y)}$$

On applique le théorème de la coupure à la courbe (C) suivant :

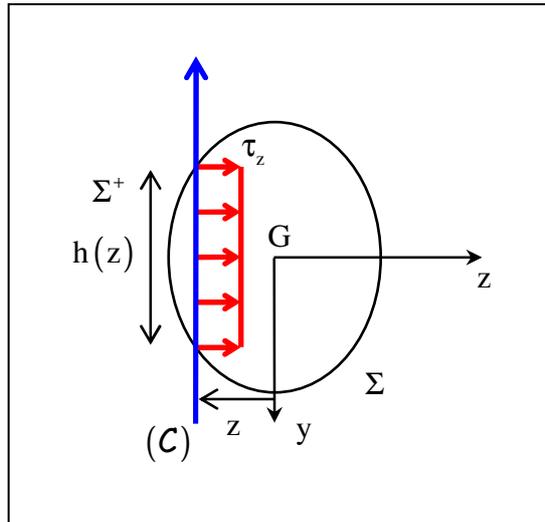


Fig. 7.8 – Coupure – Section massives - Effort tranchant V_z

Le théorème de la coupure donne :

$$\int_{(C)} -\tau_z dl = -\tau_z h(z) = -\frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+) = -\frac{V_z}{I_y} S_y(z)$$

Soit :

$$\tau_z = \frac{V_z S_y(z)}{I_y h(z)}$$

7.4.5 Section rectangulaire

Appliquons le dernier résultat à une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h , soumise à un effort tranchant V_y

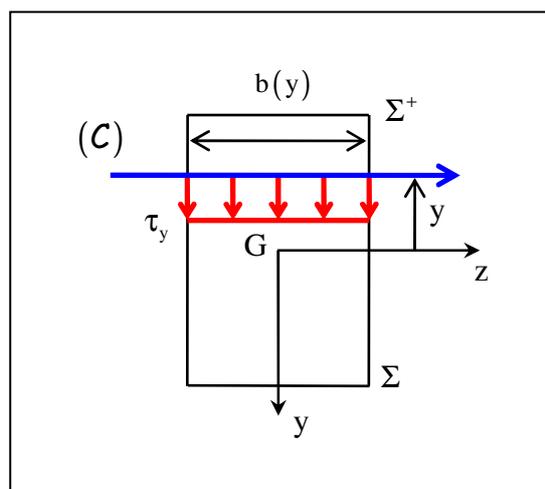


Fig. 7.9 – Coupure – Section rectangulaire - Effort tranchant V_y

Nous avons :

$$b(y) = b, \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad \text{et} \quad S_z(\Sigma^+) = -\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Ainsi :

$$\tau_y(y) = -\frac{3}{2} \frac{V_y}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

Soit la valeur du maximum :

$$\tau_{\max} = -\frac{3}{2} \frac{V_y}{A}$$

Nous représentons la répartition des contraintes de cisaillement :

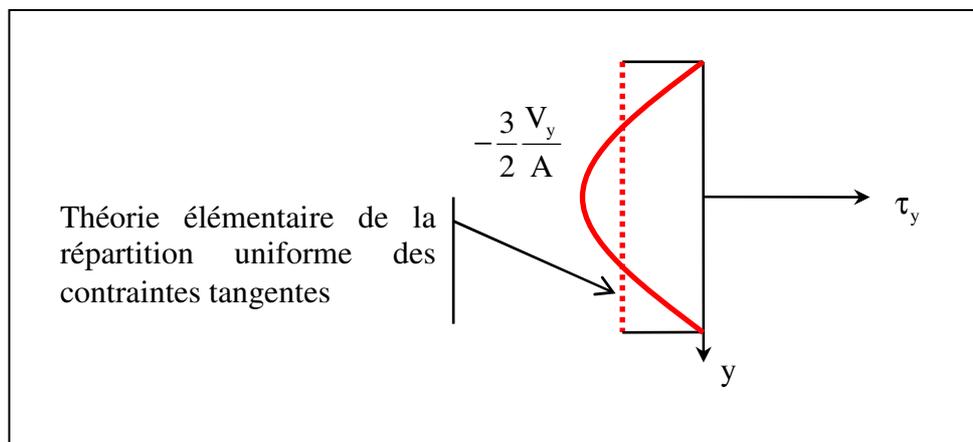


Fig. 7.10 – Contraintes tangentes – Section rectangulaire - Effort tranchant V_y

Remarques :

1. Les contraintes tangentes sont nulles sur les fibres extrêmes, ce qui est en accord avec la réciprocité du tenseur des contraintes.
2. La contrainte tangente est maximum sur la fibre moyenne (c'est le cas général).

7.4.6 Gauchissement

Nous considérons un tronçon élémentaire de poutre (de longueur dx) de section rectangulaire soumis à un effort tranchant V_y .

La répartition des gauchissements γ_y selon y se déduit de celle des contraintes tangentes τ_y et de la Loi de Comportement $\tau_y = G \gamma_y$.

Nous en déduisons qu'un volume élémentaire autour de la fibre moyenne d'une section droite rectangulaire aura un gauchissement maximum, tandis que ce dernier sera nul sur des volumes élémentaires autour des fibres extrêmes.

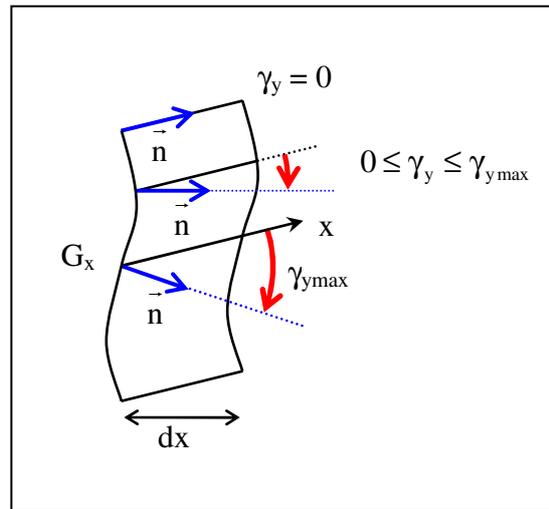


Fig. 7.11 – Gauchissement – Section rectangulaire

Les sections droites ne restent donc pas planes mais se gauchissent sous l'effet de l'effort tranchant.

7.4.7 Energie interne

Déterminons l'énergie interne dW d'un tronçon élémentaire de poutre soumis à un effort tranchant V_y .

Nous pouvons déterminer cette énergie interne en fonction de V_y si nous connaissons le déplacement relatif selon y des deux sections Σ_x et Σ_{x+dx} .

Nous exprimerons donc dans un premier temps cette énergie en fonction des contraintes et déformations.

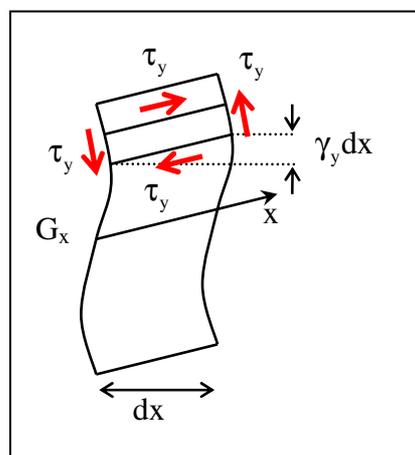


Fig. 7.12 – Contrainte tangente - Distorsion – Section massive

Pour un volume élémentaire, l'énergie en fonction des contraintes et des déformations est :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \sigma_{xy} \epsilon_{xy} dV = \frac{1}{2} \tau_y \gamma_y dx dy dz$$

Remarque : le terme $\frac{1}{2}$ provient du fait que les distorsions apparaissent de façon proportionnelle aux contraintes tangentelles.

D'où l'expression de dW :

$$dW = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \tau_y \gamma_y \, dy \, dz \right) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \tau_y \gamma_y \, b(y) \, dy \right) dx$$

Avec $\tau_y = G\gamma_y$ il vient :

$$dW = \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma} \frac{\tau_y^2}{G} \, b(y) \, dy \right) dx$$

De plus $\tau_y = \frac{V_y S_z(y)}{I_z b(y)}$, ainsi :

$$dW = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{GI_z^2} \left(\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(y)}{b(y)} \, dy \right) dx$$

Nous définissons la section réduite A_y par :

$$A_y = \frac{I_z^2}{\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(y)}{b(y)} \, dy}$$

Ainsi :

$$dW = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{GA_y} dx$$

Nous en déduisons le déplacement relatif, équivalent d'un point de vue énergétique, selon y des deux sections Σ_x et Σ_{x+dx} soumises à un effort tranchant V_y :

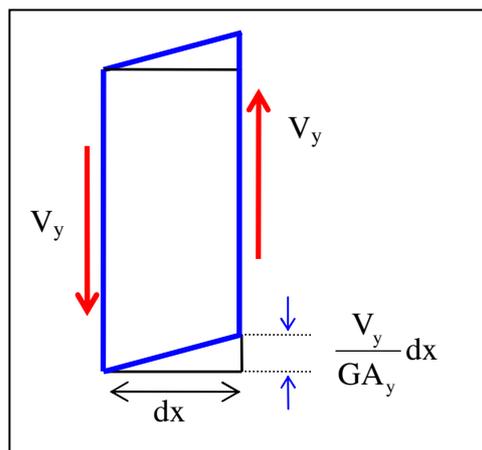


Fig. 7.13 – Déplacement équivalent – Effort tranchant – Section massive

Remarque : Pour une section rectangulaire $A_y = \frac{5}{6} A$

7.5 Profil mince fermé

7.5.1 Définitions

Définition 74 : Profil mince

Un profil mince est une section droite à parois mince dont l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions de la section.

Définition 75 : Contour moyen

Le contour moyen d'un profil mince est la courbe définie au milieu de l'épaisseur du profil mince.

Définition 76 : Profil mince fermé

Un profil mince fermé est un profil mince dont le contour moyen est une courbe fermée. On distingue les profils minces fermés monocellulaires et multicellulaires.

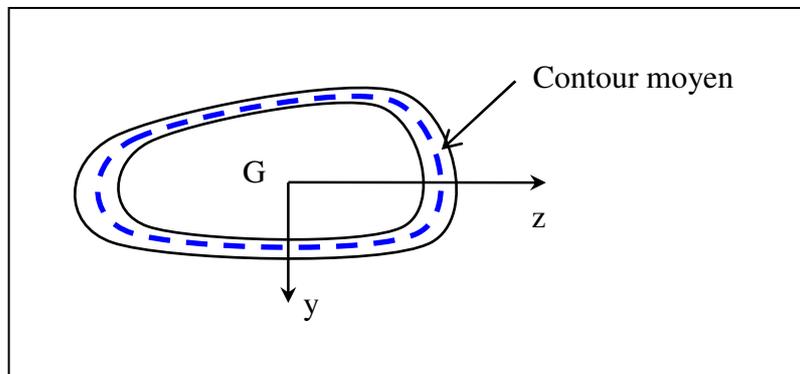


Fig. 7.14 – Profil mince fermé monocellulaire

7.5.2 Hypothèses

1. Les contraintes tangentes sont tangentes au contour moyen.
2. Les contraintes tangentes sont constantes dans l'épaisseur du profil.

Nous ne nous intéressons qu'aux profils monocellulaires.

Les relations entre les contraintes tangentes et les efforts intérieurs imposent

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = V_z \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \end{array} \right.$$

7.5.3 Application du théorème de la coupure

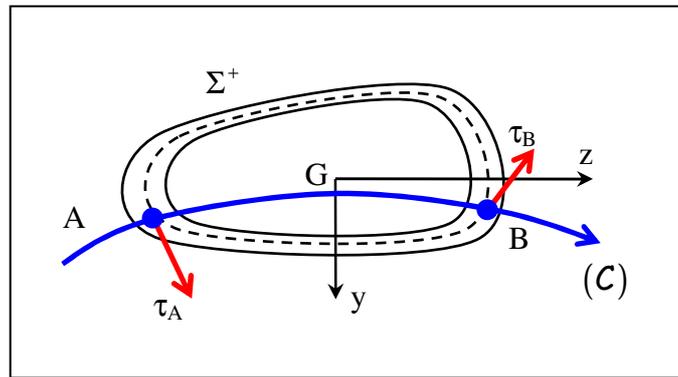


Fig. 7.15 – Profil mince fermé monocellulaire

Remarque : nous prenons comme convention de direction des contraintes tangentielles, celle qui fait parcourir un point courant du contour moyen dans le sens trigonométrique.

L'application du théorème de la coupure donne :

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

Considérons un point A fixe et un point M variable, nous avons :

$$\tau_M e_M = \tau_A e_A - \frac{V_y}{I_z} S_z(M) - \frac{V_z}{I_y} S_y(M)$$

Le terme $\tau_M e_M$ est appelé flux de cisaillement, de plus les moments statiques sont des fonctions continues en fonction du point M, nous en déduisons que le flux de cisaillement est une fonction continue en fonction de M.

7.5.4 Section symétrique

Nous considérons une section à profil mince, monocellulaire, symétrique par rapport à l'axe y et soumise à un effort tranchant V_y .

Pour ces profils, la répartition des contraintes est symétrique par rapport à l'axe y.

De plus, si l'épaisseur est continue, il en est de même de la répartition des contraintes tangentielles le long du contour moyen (le flux de cisaillement devant être continu) :

On en déduit donc que tous les points du contour moyen appartenant à l'axe de symétrie, auront une contrainte tangentielle nulle ; ceci étant illustré par la Fig. 7.16

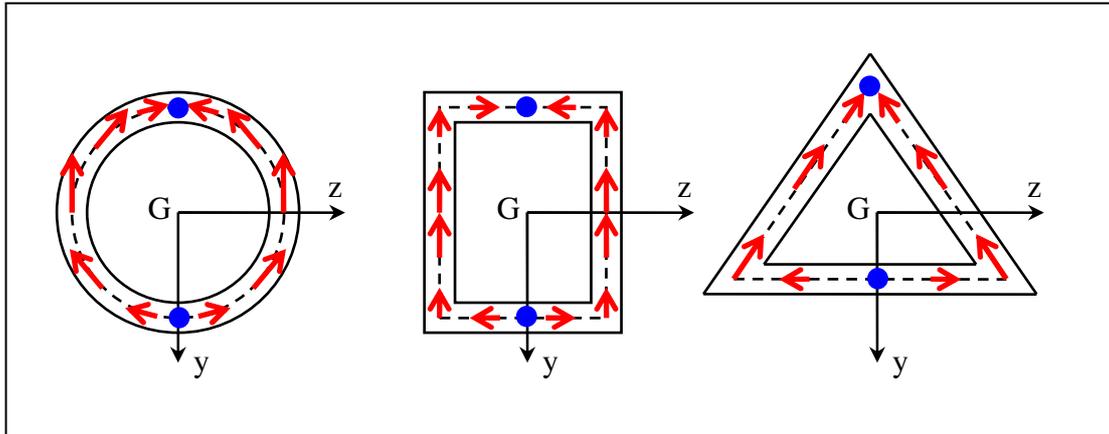


Fig. 7.16 – Profil mince fermé symétrique – Contraintes tangentés nulles

Application à un profil tubulaire :

Considérons un profil tubulaire, de rayon moyen R et d'épaisseur e (e <<. R)

Ce profil est soumis à un effort tranchant V_y .

Nous considérons une coupure (C) passant par un point M variable et un point fixe A, conformément à la Fig. 7.17.

Les conventions de signe des contraintes tangentés sont indiquées sur cette même figure.

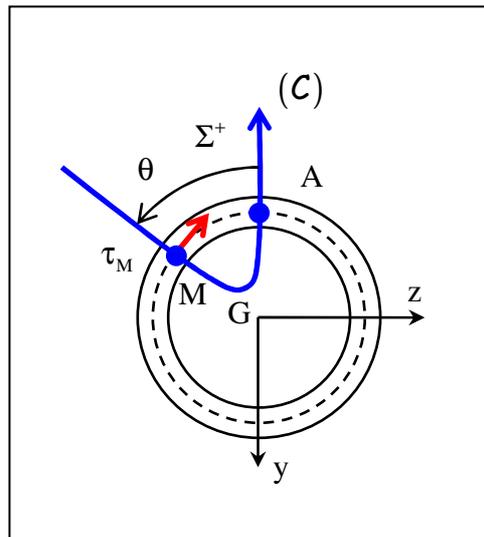


Fig. 7.17 – Profil tubulaire – Coupure

L'application du théorème de la coupure nous donne :

$$\tau_M e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_z \approx \pi R^3 e \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -\int_0^\theta R^2 e \cos \alpha d\alpha = -R^2 e \sin \theta$$

D'où :

$$\tau_M = \frac{V_y}{\pi R e} \sin \theta = \frac{V_y}{A} 2 \sin \theta$$

Soit la valeur du maximum en $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\tau_{\max} = 2 \frac{V_y}{A}$$

Nous pouvons tracer la répartition des contraintes tangentés en précisant leur direction et sens :

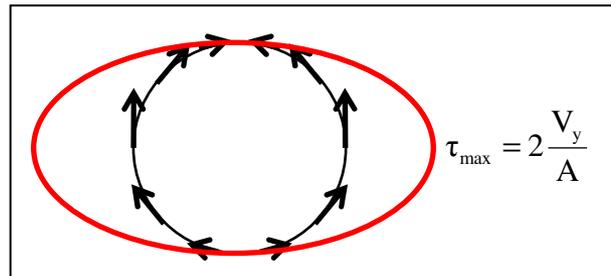


Fig. 7.18 – Profil tubulaire – Répartition des contraintes tangentés

Remarque : nous vérifions bien les relations entre les contraintes tangentés et les efforts intérieurs.

Effort tranchant V_z et moment de torsion T :

$$\int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0 \text{ et } \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \text{ par symétrie.}$$

Effort tranchant V_y :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = 2 \int_0^{\pi} \tau_M \sin \alpha e R d\alpha = 2 \int_0^{\pi} \frac{V_y}{A} 2 \sin^2 \alpha e R d\alpha$$

Soit :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = 4 \frac{V_y}{A} e R \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \text{ avec } \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Nous avons bien :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y$$

7.5.5 Section non symétrique

Remarque : nous ne nous intéressons en fait qu'aux profils minces, dissymétriques vis à vis de la direction de l'effort tranchant.

On considère le profil ci contre où toutes les parties sont d'égale épaisseur e , et d'égale longueur ℓ ($e \ll \ell$) ci après.

Les conventions de signe des contraintes tangentés sont indiquées sur cette même figure.

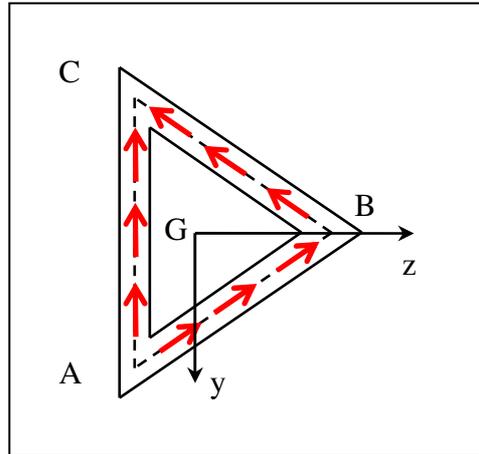


Fig. 7.19 – Profil mince fermé non symétrique

Ce profil est soumis à un effort tranchant V_y .

Considérons deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à l'axe z , nous prenons une coupure passant par ces deux points :

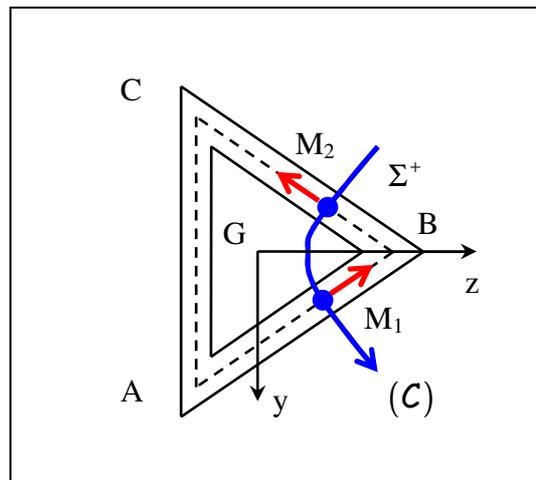


Fig. 7.20 – Profil mince fermé non symétrique – Coupure (1/3)

Nous avons :

$$\tau_{M_1} e - \tau_{M_2} e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Par symétrie :

$$S_z(\Sigma^+) = 0$$

D'où :

$$\tau_{M_2} = \tau_{M_1}$$

Nous repérons le point M_2 sur le segment BC par une abscisse x à partir du point B , et nous considérons une coupure passant par les points B et M_2 :

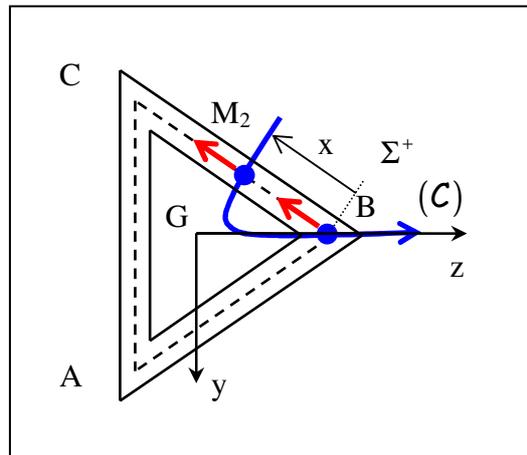


Fig. 7.21 – Profil mince fermé non symétrique – Coupure (2/3)

Nous avons :

$$\tau_B \mathbf{e} - \tau_{M_2} \mathbf{e} = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_z = \frac{1}{4} e \ell^3 \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -\frac{1}{4} e x^2$$

D'où :

$$\tau_{M_2}(x) = \tau_B - V_y \frac{x^2}{e \ell^3}$$

Nous repérons le point M_3 sur le segment AC par son abscisse y dans le repère local, et nous considérons une coupure passant par les points B et M_3 :

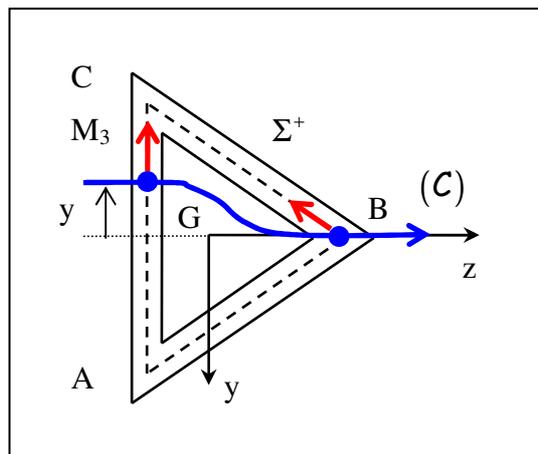


Fig. 7.22 – Profil mince fermé non symétrique – Coupure (3/3)

Nous avons :

$$\tau_B \mathbf{e} + \tau_{M_3} \mathbf{e} = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_z = \frac{1}{4} e \ell^3 \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -\frac{e}{8}(3\ell^2 - 4y^2)$$

D'où :

$$\tau_{M_3}(y) = -\tau_B + \frac{1}{2} V_y \frac{3\ell^2 - 4y^2}{e \ell^3}$$

Les contraintes tangentes le long du contour moyen s'expriment en fonction d'une inconnue τ_B ; celle-ci se détermine en vérifiant les relations sollicitations contraintes tangentes.

Exprimons les efforts sur les différentes membrures du profil :

$$F_{AB} = F_{BC} = \int_0^\ell \tau_{M_2}(x) dx$$

Soit :

$$F_{AB} = F_{BC} = \tau_B e \ell - \frac{V_y}{3}$$

De même :

$$F_{AC} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \tau_{M_3}(x) dx$$

Soit :

$$F_{AC} = -\tau_B e \ell + \frac{4}{3} V_y$$

Ces résultats sont résumés sur la figure suivante :

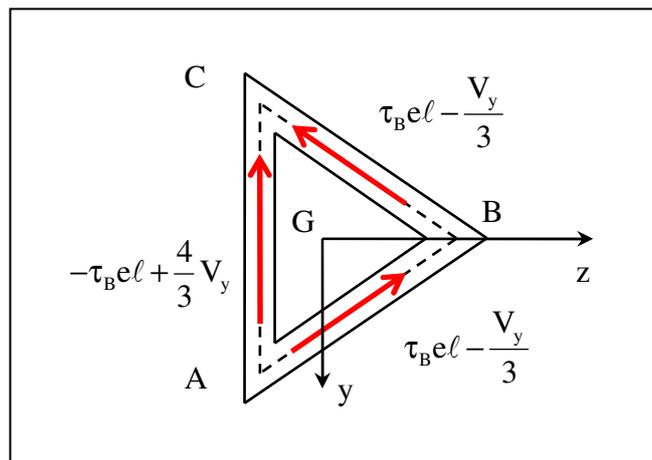


Fig. 7.23 – Profil mince fermé non symétrique – Efforts

Vérifions les relations sollicitations contraintes tangentes :

Effort tranchant V_y :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = 2 \frac{1}{2} \left(\tau_B e \ell - \frac{V_y}{3} \right) - \tau_B e \ell + \frac{4}{3} V_y$$

Soit :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y$$

Effort tranchant V_z :

$$\int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0$$

Moment de torsion :

$$\int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = -2 \left(\tau_B e \ell - \frac{V_y}{3} \right) \frac{h}{3} + \left(-\tau_B e \ell + \frac{4}{3} V_y \right) \frac{h}{3}$$

Soit :

$$\int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = -\tau_B e \ell^2 + \frac{2}{3} V_y \ell$$

On en déduit la valeur de τ_B en exprimant la nullité du moment de torsion :

$$\tau_B = \frac{2}{3} \frac{V_y}{e \ell}$$

D'où les expressions des contraintes tangentés :

$$\tau_{M_2}(x) = \frac{V_y}{A} \left(2 - 3 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$\tau_{M_3}(y) = \frac{V_y}{A} \left(\frac{5}{2} - 6 \frac{y^2}{\ell^2} \right)$$

Le profil étant à épaisseur constante, vérifions (pour contrôle) la continuité des contraintes tangentés :

$$\tau_{M_2}(\ell) = -\frac{V_y}{A}$$

$$\tau_{M_3}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{V_y}{A}$$

La continuité est bien vérifiée compte tenu des conventions de signe sur les contraintes tangentés le long du profil.

Nous pouvons tracer la répartition des contraintes tangentés en remarquant :

$$\tau_{M_2}(0) = 2 \frac{V_y}{A} \text{ et } \tau_{M_2}(\ell) = -\frac{V_y}{A}$$

De plus :

$$\tau_{M_2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \ell = 0,8165 \ell$$

Enfin :

$$\tau_{M_3}(0) = \frac{5}{2} \frac{V_y}{A} \quad \text{et} \quad \tau_{M_3}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{V_y}{A}$$

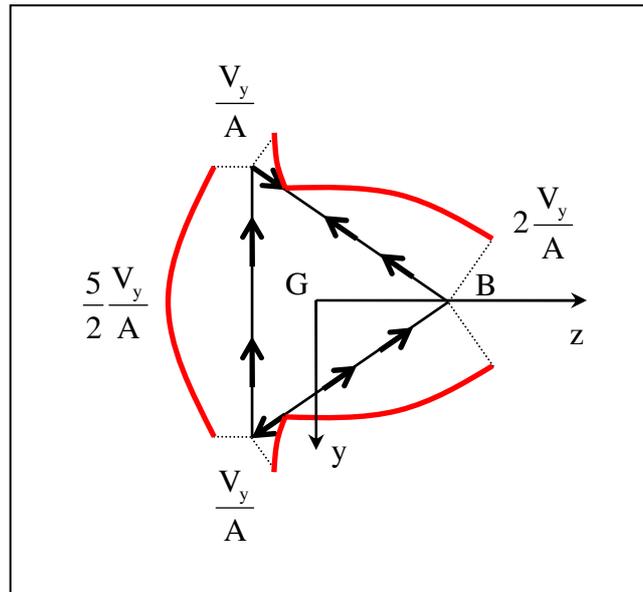


Fig. 7.24 – Profil mince fermé non symétrique – Contraintes tangentés

7.6 Profil mince ouvert

7.6.1 Section symétrique

Nous considérons une section, à profil mince ouvert, symétrique par rapport à l'axe y , et soumise à un effort tranchant V_y .

Pour ces sections, la répartition des contraintes est symétrique par rapport à l'axe Gy . De plus, si l'épaisseur est continue, il en est de même de la répartition des contraintes tangentés le long du contour moyen (le flux de cisaillement devant être continu).

On en déduit donc que tous les points du contour moyen appartenant à l'axe de symétrie, auront une contrainte tangente nulle.

Il en est de même au niveau de l'ouverture du profil du fait de la réciprocité du tenseur des contraintes.

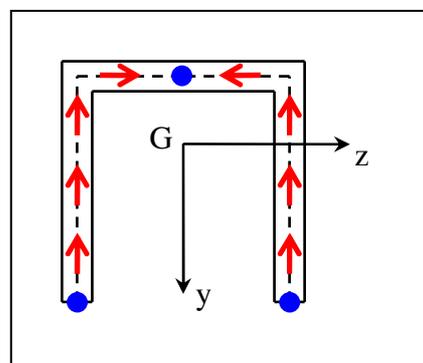


Fig. 7.25 – Profil mince ouvert symétrique – Contraintes tangentés nulles

Application à un profil en U :

Considérons le profil en U symétrique par rapport à l'axe y dont les dimensions sont définies à la Fig. 7.26.

Ce profil est soumis à un effort tranchant V_y .

Nous considérons une coupure (C) passant par un point M_1 variable entre les points A et B, conformément à la Fig. 7.26.

Les conventions de signe des contraintes tangentelles sont indiquées sur la Fig. 7.25.

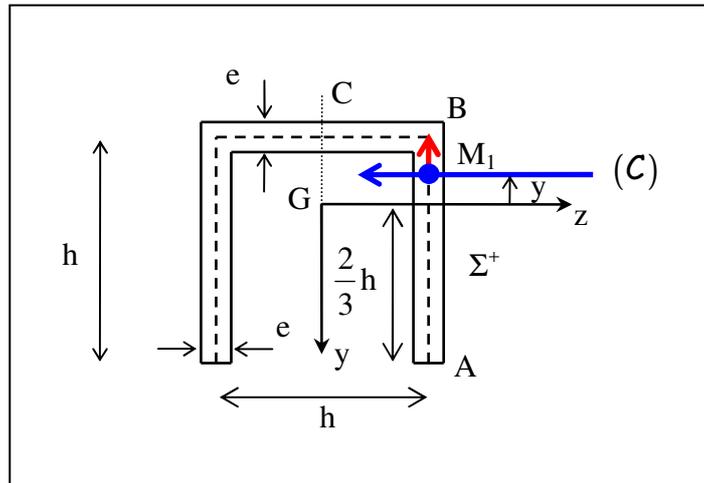


Fig. 7.26 – Profil mince ouvert symétrique – Coupure (1/2)

On repère le point M_1 sur le segment AB par son ordonnée y .

En considérant la coupure (C), nous obtenons :

$$-\tau_{M_1} e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_z \approx \frac{eh^3}{3} \text{ et } S_z(\Sigma^+) = \frac{1}{2} e \left(\frac{4}{9} h^2 - y^2 \right)$$

D'où :

$$\tau_{M_1}(y) = \frac{V_y}{2eh} \left(\frac{4}{3} - 3 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

La valeur maximum est obtenue pour $y = 0$:

$$\tau_{M_1}(0) = \frac{4}{3} \frac{V_y}{2eh}$$

Au point B, $y = -\frac{h}{3}$, nous obtenons :

$$\tau_B = \frac{V_y}{2eh}$$

Remarque : la valeur $\frac{V_y}{2eh}$ correspond à la contrainte tangente dans l'hypothèse simpliste où l'effort tranchant V_y se répartit uniformément sur les membrures verticales du profil.

Nous considérons une coupure (C) passant par un point M_2 variable entre les points B et C, conformément à la Fig. 7.27.

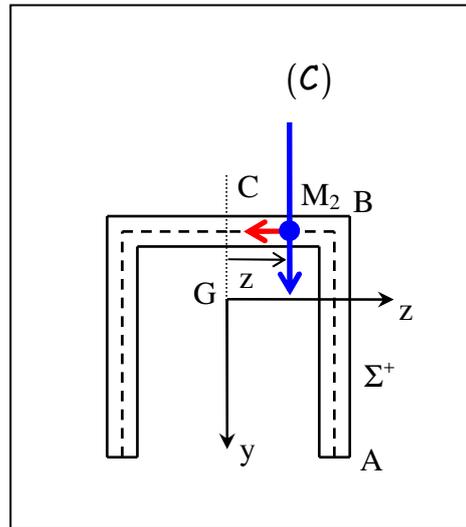


Fig. 7.27 – Profil mince ouvert symétrique – Coupure (2/2)

On repère le point M_2 sur le segment BC par son abscisse z .

En considérant la coupure (C), nous obtenons :

$$-\tau_{M_2} e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_z \approx \frac{eh^3}{3} \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -S_z(\Sigma^-) = \frac{1}{3} ehz$$

D'où :

$$\tau_{M_2}(z) = \frac{V_y}{2eh} \left(2 \frac{z}{h} \right)$$

Au point B, $z = \frac{h}{2}$, nous obtenons :

$$\tau_B = \frac{V_y}{2eh}$$

Remarque : ce résultat est attendu du fait de la continuité de l'épaisseur du profil qui induit la continuité de la contrainte tangente.

On peut représenter la répartition des contraintes tangentés le long du contour moyen du profil

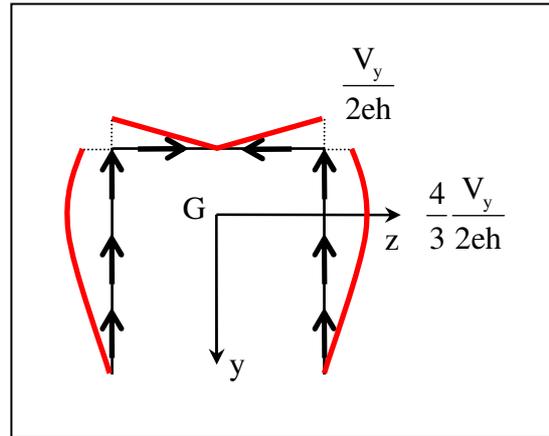


Fig. 7.28 – Profil mince ouvert symétrique – Contraintes tangentes

Vérifions les relations sollicitations contraintes tangentes :

Effort tranchant V_y :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = 2 \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \tau_{M_1}(y) edy = 2 \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{V_y}{2eh} \left(\frac{4}{3} - 3 \frac{y^2}{h^2} \right) edy$$

Soit :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = \frac{V_y}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \left(\frac{4}{3} - 3 \frac{y^2}{h^2} \right) dy = \frac{V_y}{h} \left(\frac{4}{3} h - \frac{h}{3} \right) = V_y$$

Effort tranchant V_z :

$$\int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0 \text{ par symétrie.}$$

Moment de torsion :

$$\int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \text{ par symétrie.}$$

Remarque : si nous faisons l'hypothèse de la théorie élémentaire en supposant que l'effort tranchant se répartie uniformément dans les membrures verticales, nous obtenons une contrainte tangente $\tau = \frac{V_y}{2eh}$, soit une erreur de 33% par défaut par rapport aux hypothèses des profils minces.

7.6.2 Application aux profils en I

Considérons un profil mince ouvert symétrique d'utilisation courante en construction métallique : la Poutrelle I Européenne IPE 180; le chiffre 180 indique pour ce type de poutrelle la hauteur en mm.

Nous recherchons la répartition des contraintes tangentes lorsque la section est soumise à un effort tranchant V_y .

Nous pouvons anticiper la nature de la répartition des contraintes tangentes :

parabolique dans l'âme (maximum en G) et linéaire dans les semelles (les épaisseurs étant localement constantes, il suffit de regarder les variations des moments statiques de Σ^+)

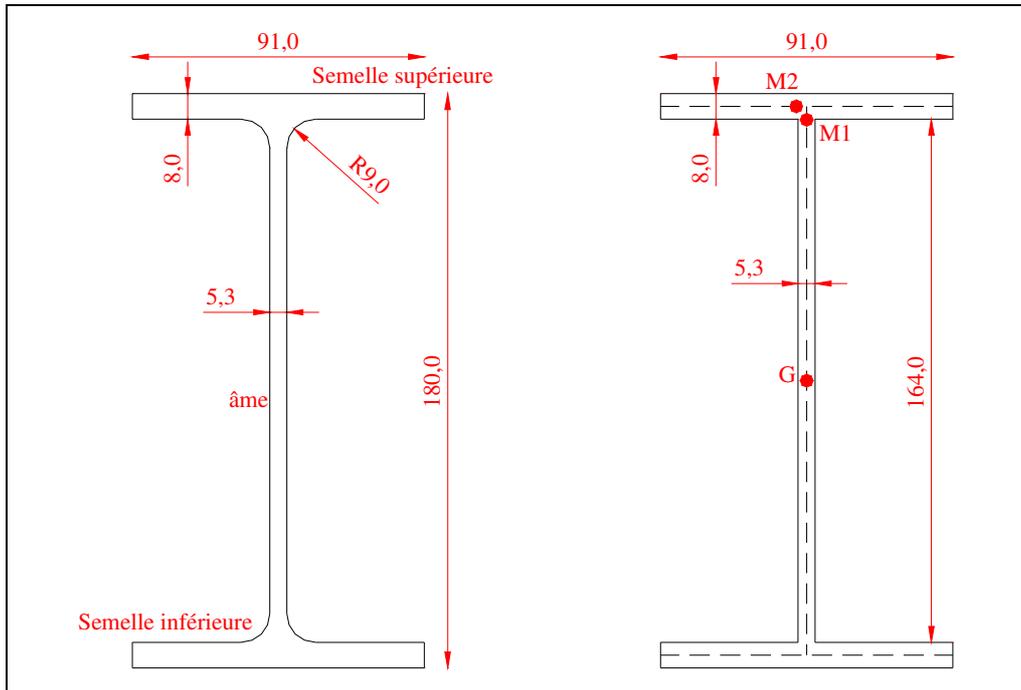


Fig. 7.29 – Poutrelles IPE 180 – Dimensions réelles et simplifiées

Il suffit donc de déterminer les contraintes tangentes en G et M_1 ; la contrainte tangente en M_2 sera déterminée à l'aide de la continuité du flux de cisaillement.

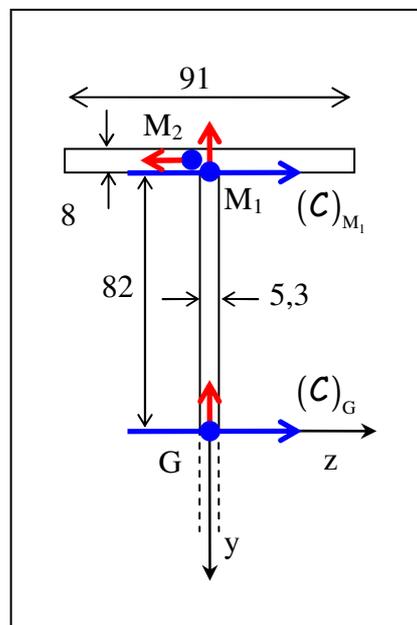


Fig. 7.30 – Poutrelle IPE 180 – Définitions des coupures

Le calcul de l'inertie donne :

$$I_z = 1272 \text{ cm}^4$$

Coupure $(C)_G$:

$$S_z(\Sigma^+) = -91.8.86 - 82.5,3.41 = -80\,427 \text{ mm}^3 = -80\,427.10^{-9} \text{ m}^3$$

$$\tau_G 5,3.10^{-3} = \frac{V_y}{1272.10^{-8}} 80\,427.10^{-9} \quad \text{d'où } \tau_G = 1193V_y$$

Soit en faisant intervenir $S_{\hat{a}me} = 869,2 \text{ mm}^2$

$$\tau_G = 1,04 \frac{V_y}{S_{\hat{a}me}}$$

Coupure $(C)_{M_1}$:

$$S_z(\Sigma^+) = -91.8.86 = -62\,608 \text{ mm}^3 = -62\,608.10^{-9} \text{ m}^3$$

$$\tau_{M_1} 5,3.10^{-3} = \frac{V_y}{1272.10^{-8}} 62\,608.10^{-9} \quad \text{d'où } \tau_{M_1} = 928V_y$$

$$\tau_{M_1} = 0,81 \frac{V_y}{S_{\hat{a}me}}$$

Continuité du flux de cisaillement :

$$\tau_{M_1} 5,3.10^{-3} - 2\tau_{M_2} 8,0.10^{-3} = 0$$

$$\tau_{M_2} = 0,27 \frac{V_y}{S_{\hat{a}me}}$$

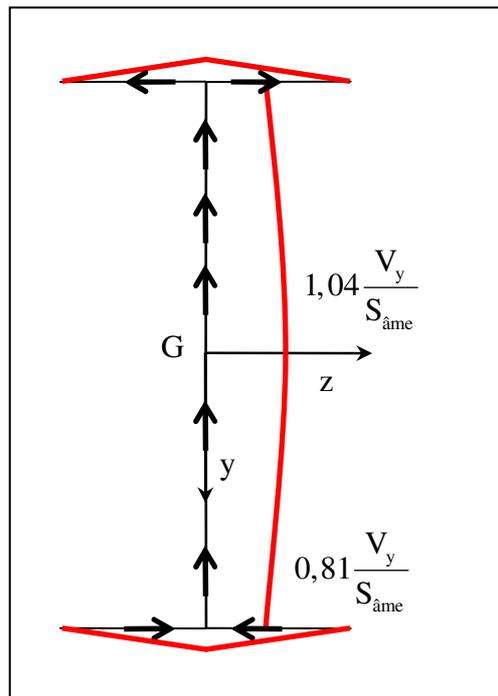


Fig. 7.31 – Poutrelle IPE 180 – Contraintes tangentés

Pour déterminer la contrainte tangente maximum, on peut dire que l'effort tranchant V_y se répartit uniformément dans l'âme :

$$\tau_{\max} \approx \frac{V_y}{S_{\hat{a}me}}$$

7.6.3 Section non symétrique

Nous considérons une section, à profil mince ouvert, non symétrique par rapport à l'axe y , et soumise à un effort tranchant V_y .

Si l'épaisseur est continue, il en est de même de la répartition des contraintes tangentés le long du contour moyen (le flux de cisaillement devant être continu).

Tous les points au niveau de l'ouverture du profil auront une contrainte tangente nulle du fait de la réciprocité du tenseur des contraintes.

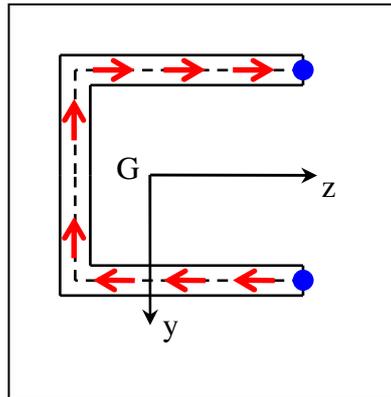


Fig. 7.32 – Profil mince ouvert non symétrique – Contraintes tangentés nulles

Application à un profil en U :

Considérons le profil en U dont les dimensions sont définies à la Fig. 7.33

Ce profil est soumis à un effort tranchant V_y .

Considérons deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à l'axe z , nous prenons une coupure passant par ces deux points :

Les conventions de signe des contraintes tangentés sont indiquées sur la Fig. 7.32.

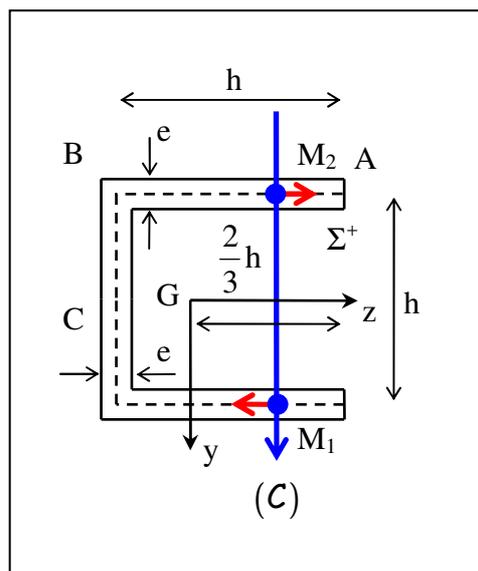


Fig. 7.33 – Profil mince ouvert non symétrique – Coupure (1/3)

Nous avons :

$$\tau_{M_2} e - \tau_{M_1} e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Par symétrie :

$$S_z(\Sigma^+) = 0$$

D'où :

$$\tau_{M_2} = \tau_{M_1}$$

Nous repérons le point M_2 sur le segment AB par sa coordonnée z et nous considérons une coupure passant par le point M_2 :

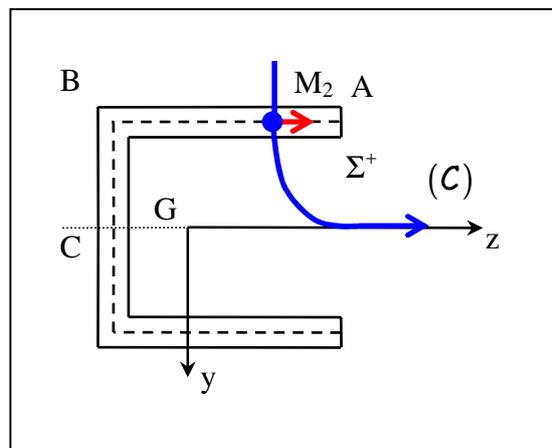


Fig. 7.34 – Profil mince ouvert non symétrique – Coupure (2/3)

Nous avons :

$$\tau_{M_2} e = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_{Gz} \approx \frac{7}{12} e h^3 \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -e \left(\frac{2}{3} h - z \right) \frac{h}{2}$$

D'où :

$$\tau_{M_2}(z) = \frac{2}{7} \frac{V_y}{e h} \left(2 - 3 \frac{z}{h} \right)$$

Au point B, $z = -\frac{h}{3}$, nous obtenons :

$$\tau_B = \frac{6}{7} \frac{V_y}{e h}$$

Remarque : la valeur $\frac{V_y}{e h}$ correspond à la contrainte tangente dans l'hypothèse simpliste où l'effort tranchant V_y se répartit uniformément sur la membrure verticale du profil.

Nous repérons le point M_3 sur le segment BC par sa coordonnée y et nous considérons une coupure passant par le point M_3 :

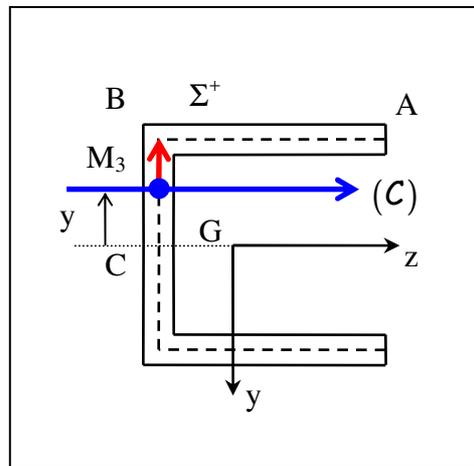


Fig. 7.35 – Profil mince ouvert non symétrique – Coupure (3/3)

Nous avons :

$$\tau_{M_3} \mathbf{e} = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

Avec :

$$I_{Gz} \approx \frac{7}{12} e h^3 \text{ et } S_z(\Sigma^+) = -\frac{e}{8} (5h^2 - 4y^2)$$

D'où :

$$\tau_{M_3}(y) = \frac{3}{14} \frac{V_y}{eh} \left(5 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Au point B, $y = -\frac{h}{2}$, nous obtenons :

$$\tau_B = \frac{6}{7} \frac{V_y}{eh}$$

Remarque : ce résultat est attendu du fait de la continuité de l'épaisseur du profil qui induit la continuité de la contrainte tangente.

La valeur maximum est obtenue en C pour $y = 0$:

$$\tau_C = \frac{15}{14} \frac{V_y}{eh}$$

On peut représenter la répartition des contraintes tangentelles le long du contour moyen du profil

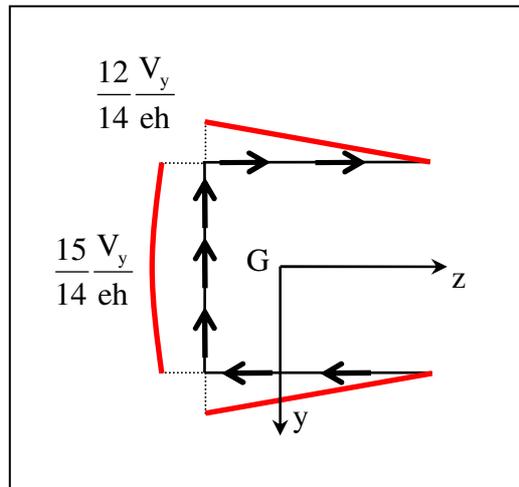


Fig. 7.36 – Profil mince ouvert non symétrique – Contraintes tangentés

Remarque : si nous faisons l'hypothèse de la théorie élémentaire en supposant que l'efforts tranchant se répartie uniformément dans la membrure verticale, nous obtenons une contrainte tangente $\tau = \frac{V_y}{eh}$, soit une erreur de 7,1% par défaut par rapport aux hypothèses des profils minces.

Nous en déduisons les efforts sur les différentes membrures du profil :

$$\int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \tau_{M_2}(z) edx = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{2}{7} \frac{V_y}{eh} \left(2 - 3 \frac{z}{h} \right) edx = \frac{2}{7} V_y$$

et :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{M_3}(y) edx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{3}{14} \frac{V_y}{eh} \left(5 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) edx = V_y$$

Ces résultats sont résumés sur la figure suivante :

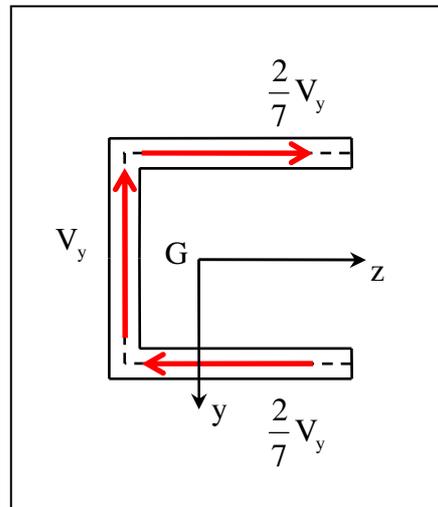


Fig. 7.37 – Profil mince ouvert non symétrique – Efforts

Vérifions les relations sollicitations contraintes tangentes :

Effort tranchant V_y :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y$$

Effort tranchant V_z :

$$\int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0$$

Moment de torsion :

$$\int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = V_y \frac{h}{3} + 2 \frac{3}{7} V_y \frac{h}{2}$$

Soit :

$$\int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = \frac{16}{21} V_y h$$

La répartition des contraintes tangentes précédemment calculée correspond donc à un effort tranchant V_y et à un moment de torsion $\frac{16}{21} V_y h$.

Cet état de sollicitation correspond également à l'application d'un effort tranchant V_y en un point C appelé centre de flexion, représenté sur la figure ci après :

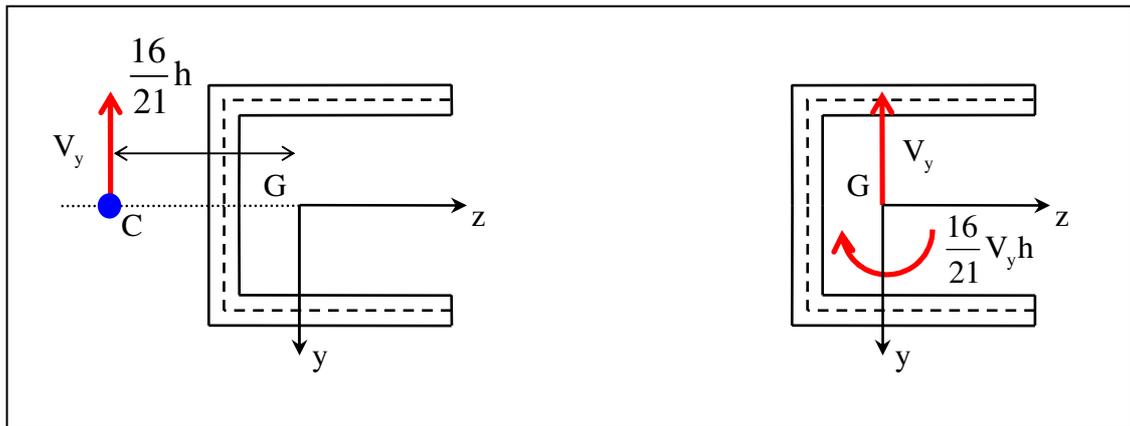


Fig. 7.38 – Profil mince ouvert non symétrique – Centre de flexion

Pour déterminer exactement la répartition des contraintes tangentés dus à un effort tranchant V_y (appliqué en G), il faut superposer aux résultats obtenus, ceux dus à l'application d'un couple de torsion de valeur $T = -\frac{16}{21}V_y h$

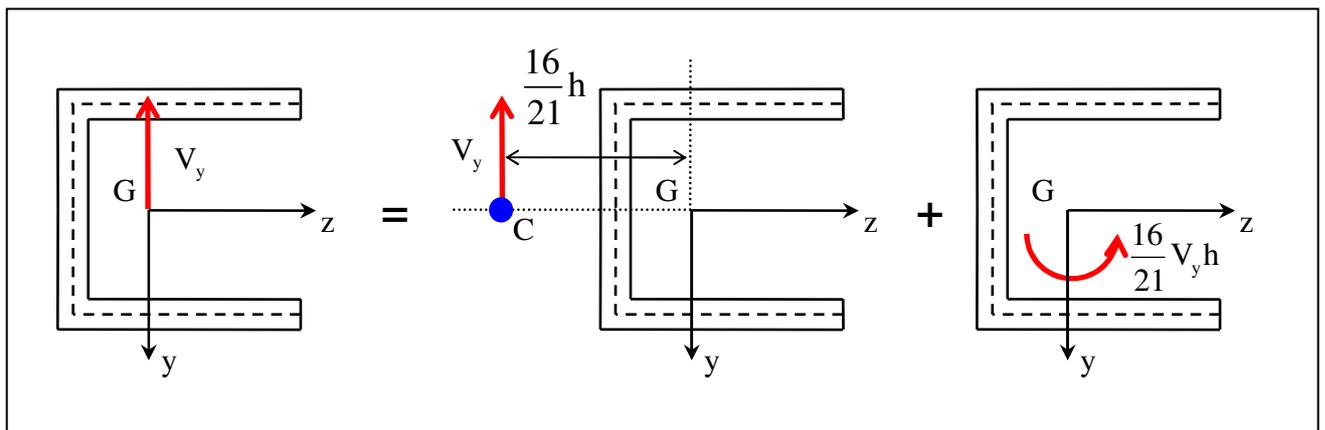
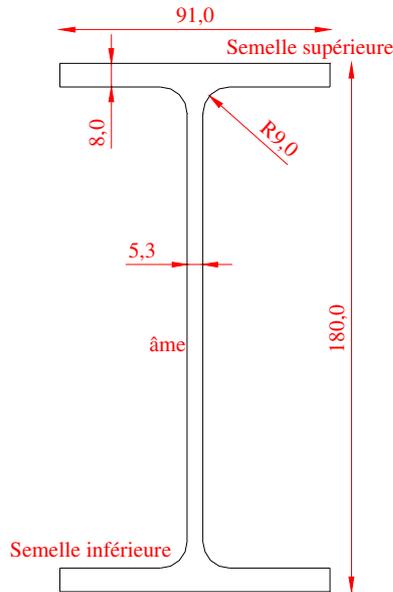


Fig. 7.39 – Profil mince ouvert non symétrique – Superposition

Exercice 1 : Profilé courant, ordre de grandeur

On considère un profilé métallique courant de portée courante :



Profil IPE 180 de longueur 6,00 m sur appuis simples.

$$A = 23,9 \text{ cm}^2 \quad I_z = 1317 \text{ cm}^4$$

Limite élastique $f_y = 235 \text{ MPa}$

Déterminer la charge répartie limite que peut reprendre ce profilé pour que la contrainte normale soit inférieure à la limite élastique.

Pour cette charge limite, déterminer la contrainte tangente maximum.

Conclure sur les vérifications à faire sur des poutres métalliques courantes.

Solution :

La poutre est sollicitée en flexion simple, la section la plus sollicitée est la section médiane :

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^2}{8}$$

Les contraintes normales sont maximales sur les fibres extrêmes :

$$\sigma_{\text{inf}} = -\sigma_{\text{sup}} = \frac{pL^2}{8} \frac{v}{I_z} < f_y$$

On en déduit la charge limite :

$$p < \frac{8}{L^2} \frac{I_z}{v} f_y = \frac{8}{6^2} \frac{1317 \cdot 10^{-8}}{90 \cdot 10^{-3}} 235 \cdot 10^6 = 7,64 \text{ kN/m}$$

La contrainte tangente maximale se trouve dans la section origine où l'effort tranchant est maximum :

$$\text{Pour } p = 7,64 \text{ kN/m} \quad V_{\max} = V(0) = \frac{pL}{2} = \frac{7,64 \cdot 10^3 \cdot 6}{2} = 22,9 \text{ kN}$$

On considère que l'effort tranchant se répartit uniformément dans l'âme :

$$\tau_{\text{âme}} = \frac{V_{\max}}{h_{\text{âme}} \cdot e_{\text{âme}}} = \frac{22,9 \cdot 10^3}{164 \cdot 10^{-3} \cdot 5,3 \cdot 10^{-3}} = 26,4 \text{ MPa}$$

Cette contrainte est très largement respectée, quel que soit le critère mécanique considéré.

Conclusion : pour les profilés courants uniformément chargés, les vérifications des critères mécaniques portent sur les contraintes normales maximales.

Exercice 2 : Section circulaire

Déterminer la répartition des contraintes tangentés dans une section massive circulaire soumise à un effort tranchant V .

On donne : $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$

Calculer la section réduite.

Montrer que les résultats obtenus ne satisfont pas la théorie de l'élasticité.

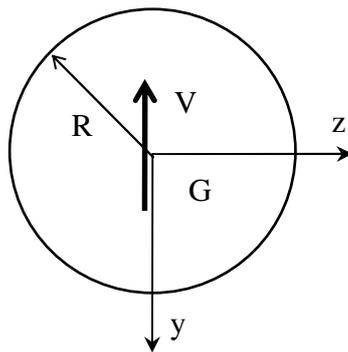
Comparer sur le diamètre $y=0$ les résultats de l'étude avec ceux trouvés par la Mécanique des Milieux Continues :

$$\tau_y = -\frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \frac{V}{I_z} \left(R^2 - y^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} z^2 \right) \quad \tau_z = -\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \frac{V}{I_z} yz$$

Remarques :

ν est le coefficient de Poisson de la Loi de Comportement élastique linéaire ; on prendra $\nu = 0,3$

La section circulaire est une des rares sections pour lesquelles la théorie de l'élasticité permet de trouver une solution analytique simple.

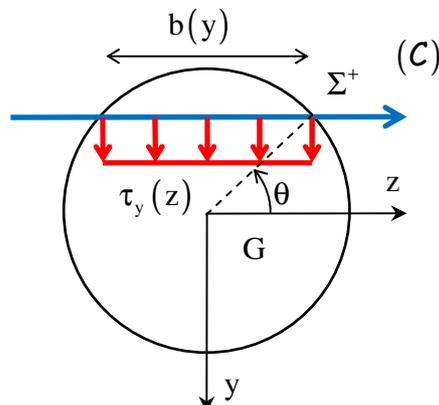


Solution :

On paramètre une coupure horizontale par un angle θ .

On applique les hypothèses de répartition de contraintes tangentés dans une section massive.

$$\vec{\tau} = \tau_y(y) \vec{y} = \tau_y(\theta) \vec{y}$$



$$b(y) = 2R \cos \theta$$

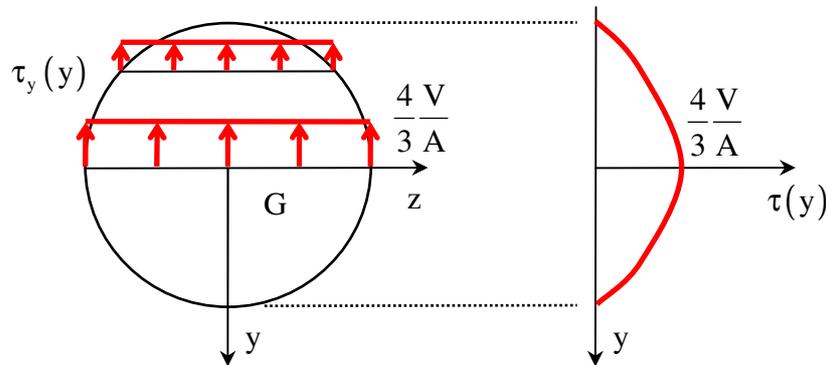
$$S_z(\Sigma^+) = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} R \sin \varphi \cdot 2R \cos \varphi \cdot d(R \sin \varphi) = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} R \sin \varphi \cdot 2R \cos \varphi \cdot d(R \sin \varphi)$$

$$S_z(\Sigma^+) = -\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} 2R^3 \cos^2 \varphi \cdot d(\cos \varphi) = \frac{2R^3}{3} \cos^3 \theta$$

Théorème de la coupure :

$$\int_{(C)} \tau_n d\ell = -\frac{V}{I_z} S_z(\Sigma^+) \quad -\tau_y(\theta) 2R \cos \theta = \frac{4V}{\pi R^4} \frac{2R^3}{3} \cos^3 \theta$$

$$\tau_y(\theta) = -\frac{4V}{3A} \cos^2 \theta \quad \tau_y(y) = -\frac{4V}{3A} \left(1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right)$$



$$\text{Section réduite : } A_y = \frac{I_z^2}{\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(\Sigma^+)}{b(y)} dy}$$

$$\int_{\Sigma} \frac{S_z^2(\Sigma^+)}{b(y)} dy = \int_{\Sigma} \frac{\left(\frac{2R^3}{3} \cos^3 \theta\right)^2}{2R \cos \theta} d(R \sin \theta) = \frac{2R^6}{9} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{2R^6}{9} \frac{5\pi}{16} = \frac{5}{72} \pi R^6$$

$$A_y = \frac{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)^2}{\frac{5}{72} \pi R^6} = \frac{9}{10} \pi R^2 = \frac{9}{10} A$$

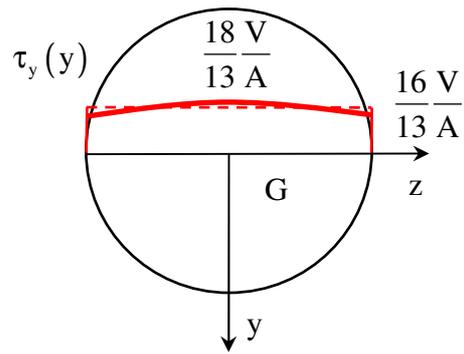
La section réduite est légèrement inférieure à la section réelle qui peut être prise par défaut.

Les contraintes tangentes ne sont pas parallèles au bord de la section ; la réciprocity du tenseur des contraintes n'est pas respectée.

Répartition sur le diamètre $y = 0$

RDM : La répartition des contraintes tangentes est constante : $\tau_y = -\frac{4V}{3A}$

MMC : avec $\nu = 0,3$ $\tau_y = -\frac{18V}{13A} \left(1 - \frac{1}{9} \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)$ $\tau_z = 0$



La RDM aboutie à une sous estimation de 3,7% de la contrainte tangente maximum.

Chapitre 8 Contraintes tangentes Torsion

8.1 Définition

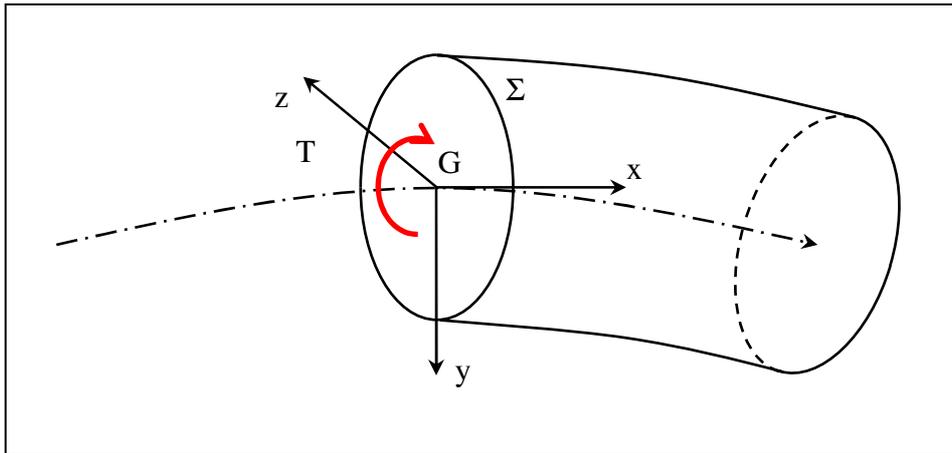


Fig. 8.1 – Torsion

Définition 77 : Torsion

La section droite d'une poutre est sollicitée en torsion si les sollicitations font apparaître un moment T autour de l'axe x , appelé moment de torsion.

Une poutre est sollicitée en torsion, si toutes ses sections droites sont sollicitées en torsion.

Remarques :

1. Si les sollicitations se résument à un unique moment de torsion, la section droite est sollicitée en torsion pure.
2. Les problèmes faisant intervenir un moment de torsion ne peuvent être des problèmes plans.

Les relations sollicitations contraintes tangentes imposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = 0 \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0 \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = T \end{array} \right.$$

8.2 Section circulaire ou annulaire

8.2.1 Constatation expérimentale

Dans une poutre sollicitée en torsion pure, les sections droites restent droites et tournent autour de l'axe x.

Nous en déduisons que deux sections droites distantes de dx , tournent entre elles d'un angle $d\theta$.

Nous considérons un point M d'une section circulaire soumise à la torsion, et nous mettons en place la déformée d'un élément de volume autour de ce point conformément à la Fig. 8.2 ci après.

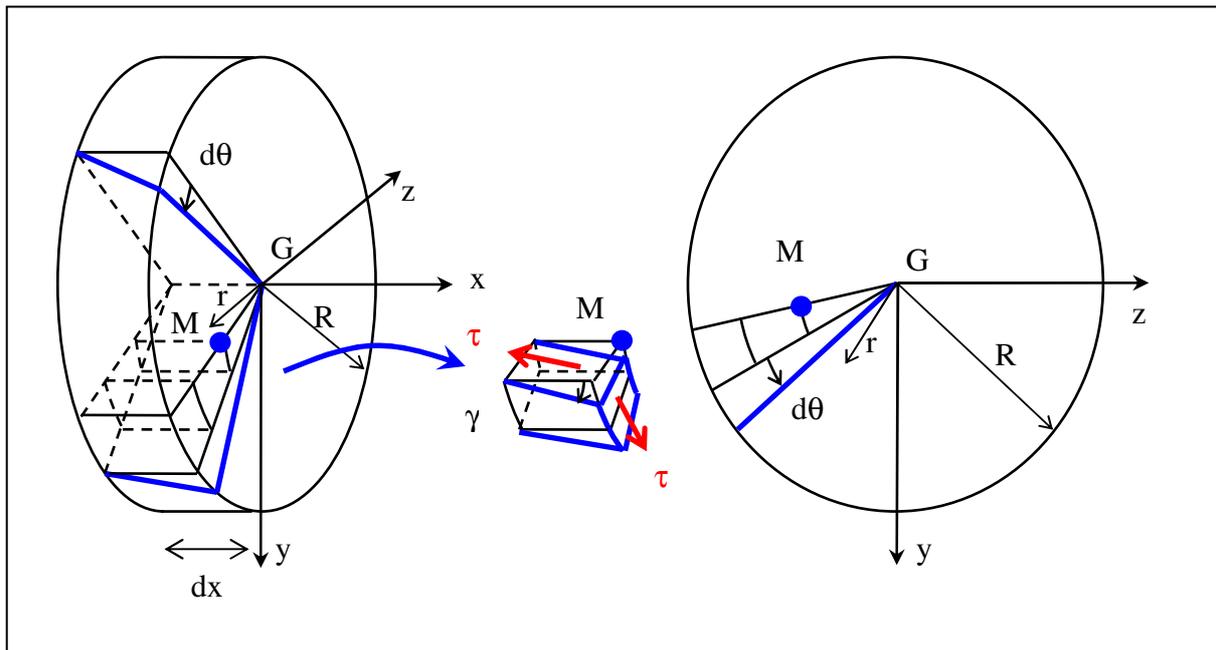


Fig. 8.2 – Torsion – Section circulaire - Déformations

8.2.2 Répartition des contraintes

La déformation du volume élémentaire autour du point M fait apparaître une distorsion γ ; les contraintes se résument donc à une contrainte tangente τ conformément à la Fig. 8.2.

L'intensité du déplacement du point M peut s'exprimer en fonction de la distorsion γ ou de la rotation $d\theta$:

$$\gamma dx = r d\theta$$

D'où :

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx}$$

A l'aide de la Loi de Comportement de HOOKE, nous en déduisons l'expression de la contrainte tangente :

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{d\theta}{dx}$$

La contrainte tangente est linéaire en fonction de r ; elle est maximum au bord de la section :

$$\tau_{\max} = GR \frac{d\theta}{dx}$$

8.2.3 Relation torsion contrainte tangente

Vérifions les relations sollicitations contraintes tangentes :

Les deux premières équations sont bien vérifiées par symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = 0 \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0 \end{array} \right.$$

La troisième équation nous donne en polaire :

$$T = \int_{\Sigma} - \left(Gr \frac{d\theta}{dx} \right) r dS$$

Le terme $\frac{d\theta}{dx}$ est indépendant des variables r et θ .

Nous rappelons l'expression de l'inertie polaire autour du point G : $I_G = \int r^2 dS$

D'où :

$$T = -GI_G \frac{d\theta}{dx}$$

Nous pouvons donner une nouvelle expression de τ et τ_{\max} :

$$\boxed{\tau = -\frac{T}{I_G} r} \text{ et } \boxed{\tau_{\max} = -\frac{T}{I_G} R}$$

Remarque : dans ce cas l'inertie polaire I_G s'appelle également moment d'inertie de torsion.

Nous pouvons tracer la répartition des contraintes tangentes suivant un rayon de la section circulaire :

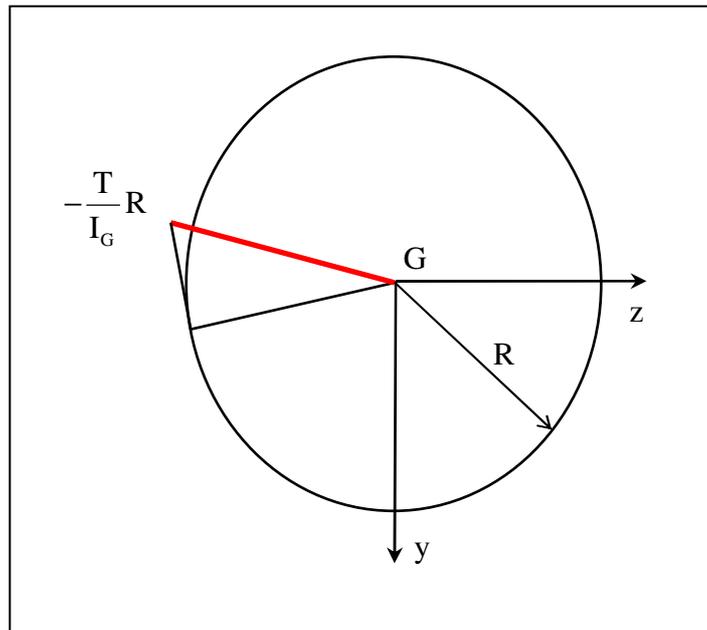


Fig. 8.3 – Torsion – Section circulaire - Contraintes

8.2.4 Déformations

Sous une sollicitation de torsion, deux sections circulaires voisines de dx tournent

relativement entre elles d'un angle : $d\theta = -\frac{T}{GI_G} dx$

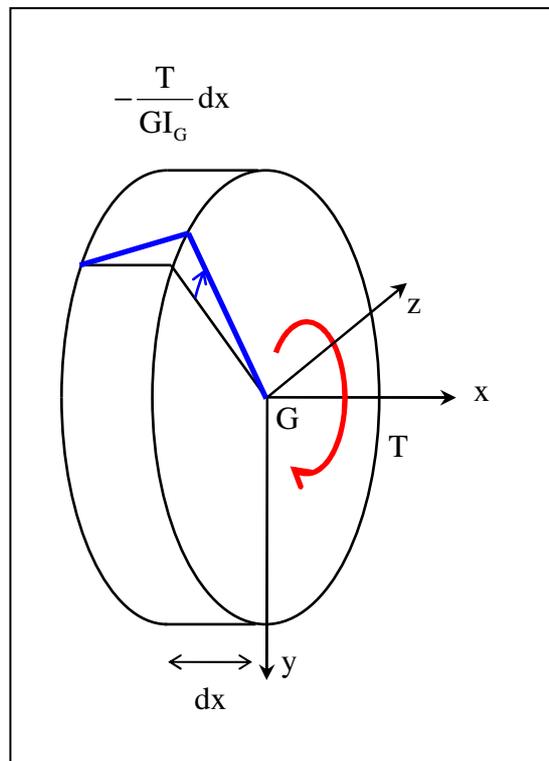


Fig. 8.4 – Torsion – Déformations – Section circulaire

8.2.5 Quelques résultats

Les résultats précédemment mis en place, s'étendent aux sections annulaires : les tubes épais et les tubes minces.

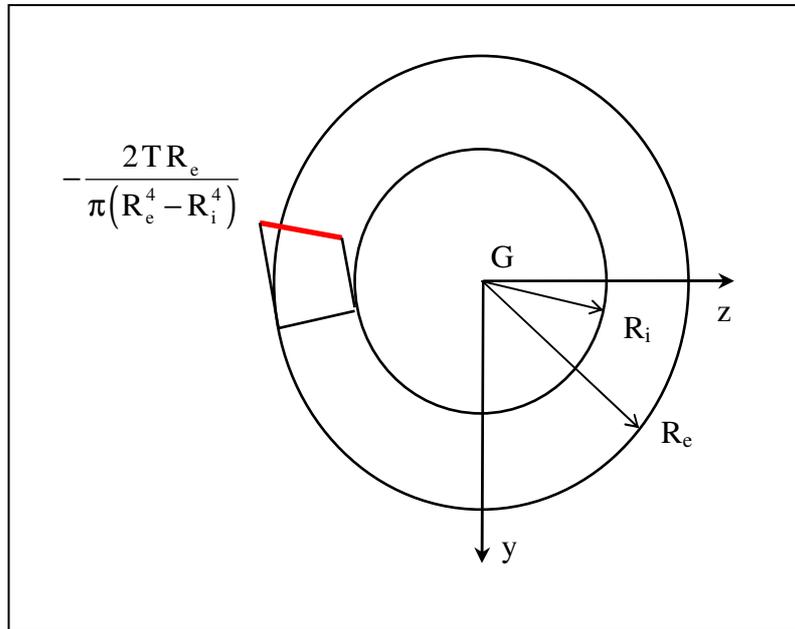


Fig. 8.5 – Torsion – Tube épais - Contraintes

Moment d'inertie de torsion :

$$I_G = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$$

$$\tau(r) = -\frac{2Tr}{\pi(R_e^4 - R_i^4)} \text{ et } \tau_{\max} = -\frac{2TR_e}{\pi(R_e^4 - R_i^4)}$$

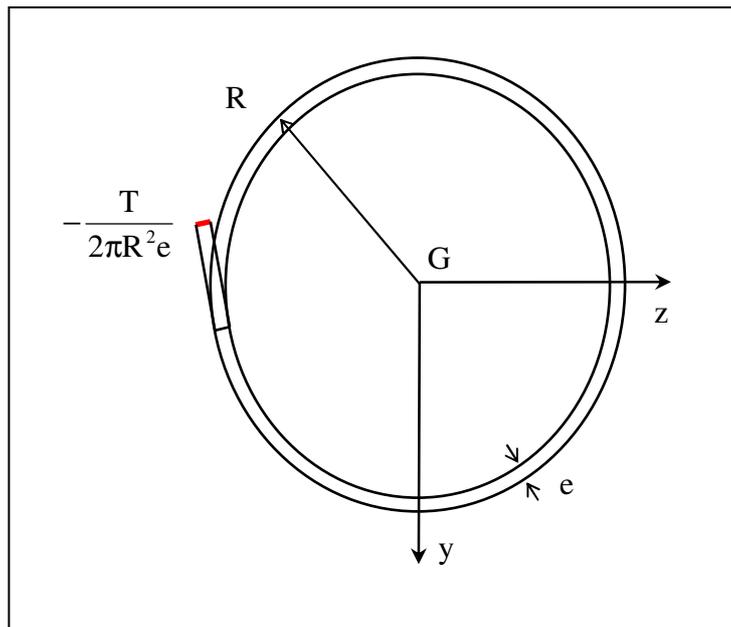


Fig. 8.6 – Torsion – Tube mince - Contraintes

Moment d'inertie de torsion :

$$I_G \approx 2\pi R^3 e$$

$$\tau = \tau_{\max} = -\frac{T}{2\pi R^2 e}$$

8.3 Profil mince fermé

8.3.1 Hypothèses

Les hypothèses sont les même qu'au paragraphe 7.5.2 :

1. Les contraintes tangentes sont tangentes au contour moyen.
2. Les contraintes tangentes sont constantes dans l'épaisseur du profil.

Nous ne nous intéressons qu'aux profils monocellulaires.

Les relations sollicitations contraintes tangentes imposent :

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = 0 \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0 \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = T \end{cases}$$

Les conventions de signe et notation sont précisées à la figure ci après :

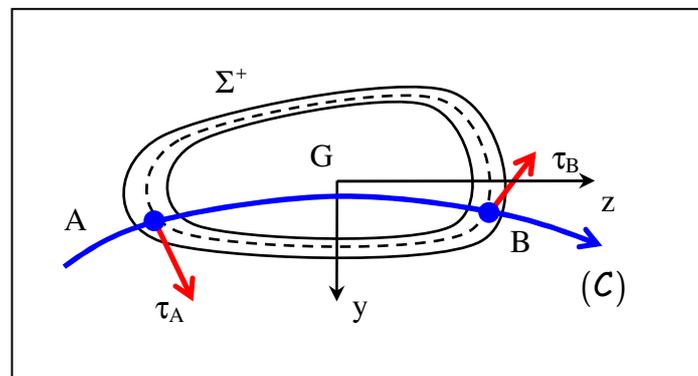


Fig. 8.7 – Torsion - Profil mince fermé monocellulaire - Coupure

8.3.2 Application du théorème de la coupure

Le fait qu'il n'y a pas d'effort tranchant nous impose :

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = 0$$

Nous en déduisons que le flux de cisaillement τe est constant le long du contour moyen.

Intégrons les contraintes tangentes pour retrouver le moment de torsion.

On calcule le moment autour du point G.

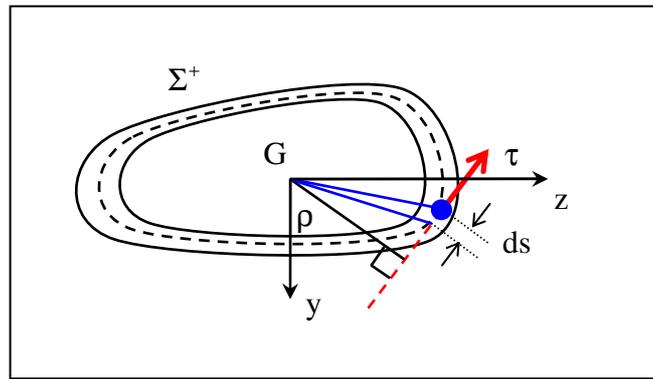


Fig. 8.8 – Torsion - Profil mince fermé monocellulaire - Contrainte

L'effort agissant sur le tronçon ds du profil vaut :

$$\tau ds$$

Notons ρ le bras de levier par rapport à G de cet effort, le moment t de torsion doit donc être :

$$T = -\oint \tau \rho ds$$

Nous savons que le flux de cisaillement τe est constant le long du contour moyen, d'où :

$$T = -\tau e \oint \rho ds$$

Notons S , l'aire à l'intérieur du contour moyen, nous avons :

$$S = \frac{1}{2} \oint \rho ds$$

Nous obtenons ainsi (première formule de BREDT) :

$$\tau = -\frac{T}{2Se} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = -\frac{T}{2Se_{\min}}$$

Remarque : si l'épaisseur e varie, il en est de même de la contrainte tangente, donc de la distorsion le long du contour moyen ; les sections droites ne restent donc pas forcément planes.

Vérifions les deux autres relations entre les contraintes tangentes et les efforts intérieurs :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = \int_{(c)} -\tau e \frac{dy}{ds} ds$$

Le flux des contraintes étant constant :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = -\tau e \int_{(c)} dy$$

Le contour moyen étant fermé :

$$\int_{\Sigma} -\tau_y dS = 0$$

Nous montrerions de même :

$$\int_{\Sigma} -\tau_z dS = 0$$

Nous venons de montrer qu'il ne sera donc pas nécessaire de vérifier les relations entre les efforts tranchants et les contraintes tangentes.

8.3.3 Energie interne

Déterminons l'énergie interne dW d'un tronçon élémentaire de poutre en profil mince fermé monocellulaire soumis à un moment de torsion T .

Nous pouvons déterminer cette énergie interne en fonction de T si nous connaissons la rotation relative $d\theta$ autour de z des deux sections Σ_x et Σ_{x+dx} .

Nous exprimerons donc dans un premier temps cette énergie en fonction des contraintes et déformations.

Pour un volume élémentaire, l'énergie en fonction des contraintes et des déformations est :

$$\frac{1}{2} \tau \gamma dx dy dz$$

Remarque : le terme $\frac{1}{2}$ provient du fait que les distorsions apparaissent de façon proportionnelle aux contraintes tangentes.

Avec $\tau = G\gamma$ et $dV = edsdx$ il vient :

$$dW = \frac{1}{2} \left(\oint \frac{\tau^2}{G} eds \right) dx$$

De plus, $\tau = -\frac{T}{2Se}$ d'où :

$$dW = \frac{T^2}{8GS^2} \left(\oint \frac{ds}{e} \right) dx$$

Soit $d\theta$ la rotation relative, équivalente d'un point de vue énergétique, autour de z des deux sections Σ_x et Σ_{x+dx} soumises à un moment de torsion T , l'énergie interne du tronçon peut donc s'exprimer comme suit :

$$dW = -\frac{1}{2} T d\theta$$

Nous en déduisons :

$$\frac{T}{4GS^2} = -\frac{d\theta}{\oint \frac{ds}{e}}$$

Notons J , la constante géométrique du profil mince fermé appelée moment d'inertie de torsion telle que :

$$d\theta = -\frac{T}{GJ} dx$$

Par analogie avec l'équation précédente, il vient (deuxième formule de BREDT) :

$$J = \frac{4S^2}{\oint \frac{ds}{e}}$$

Nous en déduisons la rotation relative, équivalent d'un point de vue énergétique, autour de z des deux sections Σ_x et Σ_{x+dx} soumises à un moment de torsion T :

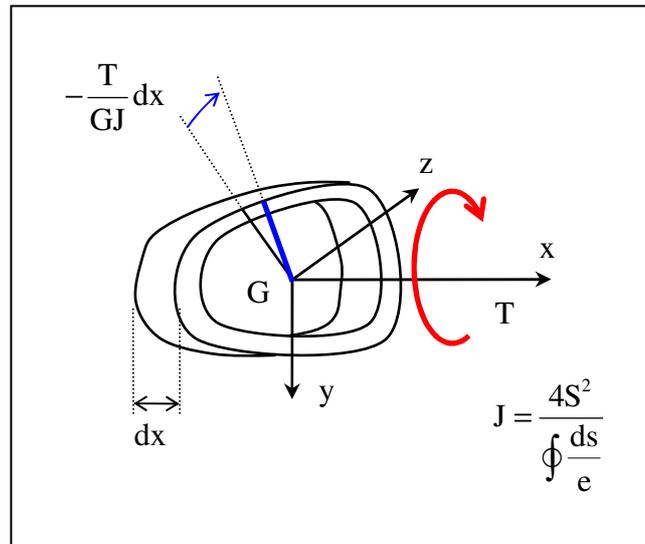


Fig. 8.9 - Torsion – Déformations - Profil mince fermé monocellulaire

8.4 Profil mince ouvert

8.4.1 Section rectangulaire infiniment haute

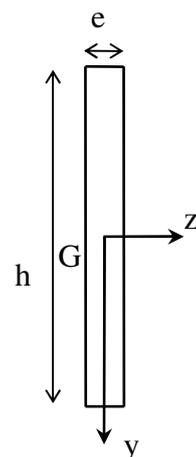
Nous admettrons les résultats suivants :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{GJ} \text{ avec } J = \frac{he^3}{3}$$

La constante géométrique du profil mince fermé J est appelée moment d'inertie de torsion.

La contrainte tangente maximum est obtenue le long du bord extérieur vertical :

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J} e$$



8.4.2 Répartition des contraintes

Dans le cas d'une section rectangulaire infiniment haute, la répartition des contraintes tangentes dans le profil à la forme suivante :

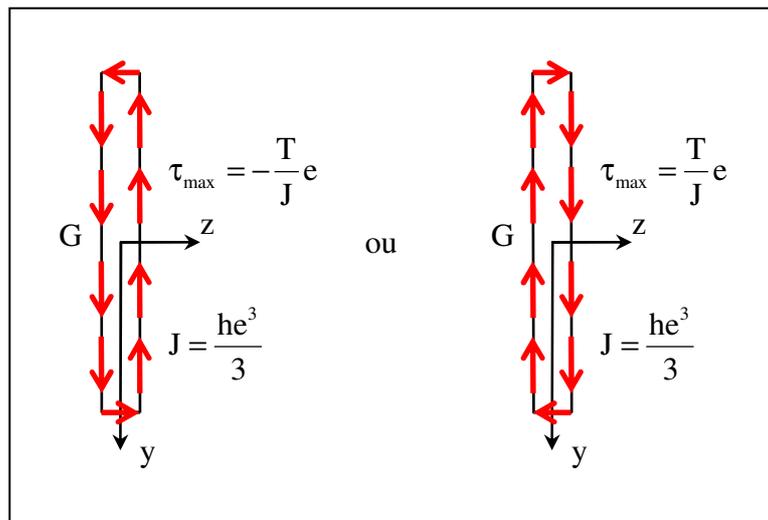


Fig. 8.10 – Torsion – Section rectangulaire infiniment haute - Contraintes

8.4.3 Déformations

Sous une sollicitation de torsion, deux sections rectangulaires infiniment hautes voisines de dx tournent relativement entre elles d'un angle : $d\theta = -\frac{T}{GJ} dx$ avec $J = \frac{he^3}{3}$.

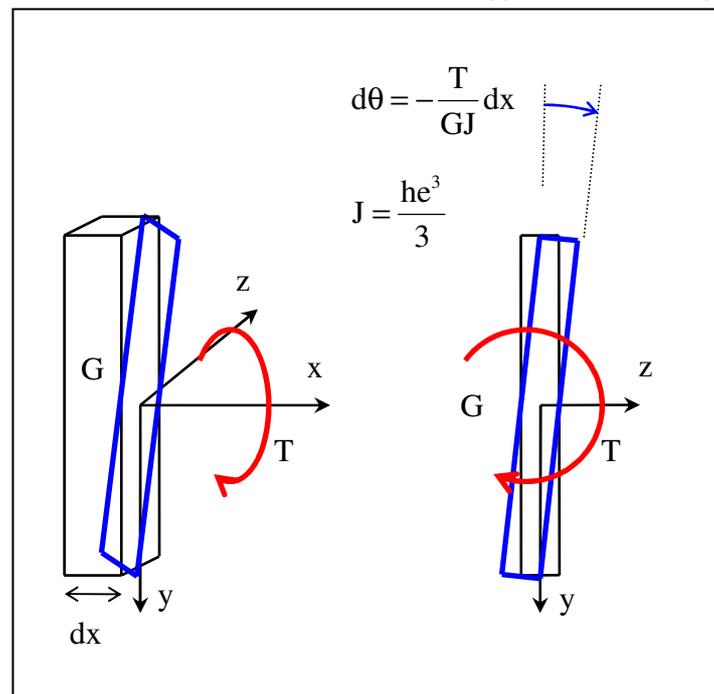


Fig. 8.11 – Torsion – Section rectangulaire infiniment haute - Déformations

8.4.4 Profils minces ouverts composés

Pour les profils ouverts composés de profils à parois minces, on peut considérer que les différents rectangles qui composent le profil influent indépendamment les uns des autres par rapport à la torsion :

Il suffit de connaître le moment d'inertie de torsion :

$$J = \sum \frac{he^3}{3}$$

La figure ci après donne quelques exemples :

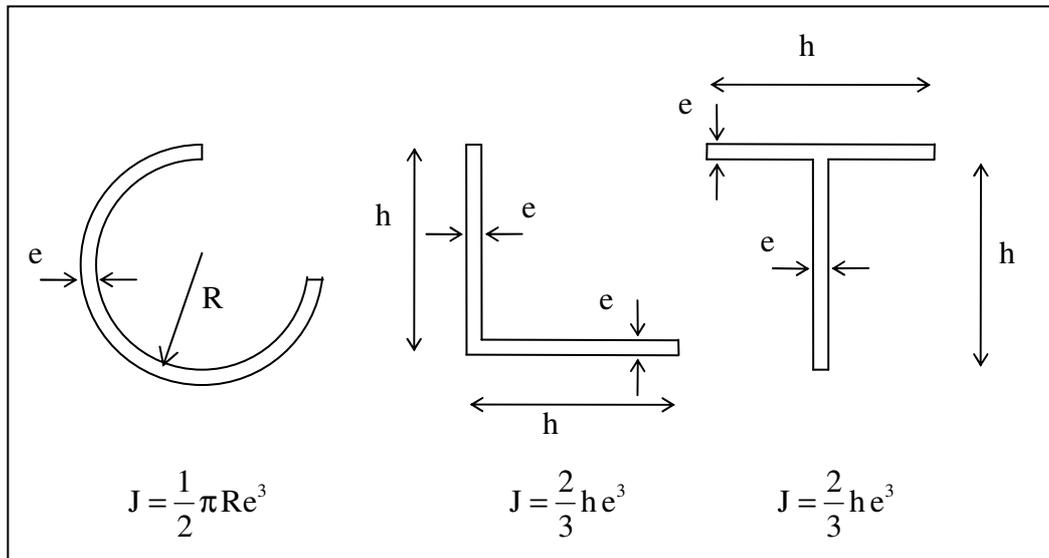


Fig. 8.12 – Torsion - Profils minces ouvert composée

La contrainte tangente maximum est obtenue le long du grand bord extérieur :

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J} e$$

Sous une sollicitation de torsion, deux sections rectangulaires infiniment hautes voisines de dx tournent relativement entre elles d'un angle : $d\theta = -\frac{T}{GJ} dx$ avec $J = \sum \frac{he^3}{3}$.

Exemple 1 :

Cornière 100 x 100 x 12 ($G = 80000$ MPa) torsion $T = 720$ Nm

$$J = \frac{1}{3} (10 \times 1,2^3 + 10 \times 1,2^3) = 11,52 \text{ cm}^4$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{720}{80000 \cdot 10^6 \times 11,52 \cdot 10^{-8}} = -0,078 \text{ 1rd/m}$$

$$\tau_{\max} = -\frac{720}{11,52 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,012 = -75 \text{ MPa}$$

Exemple 2 : Profil IPE 180 simplifié

Inertie de torsion : $3,92 \text{ cm}^4$

Catalogue : $J = 4,90 \text{ cm}^4$

On constate une augmentation de la rigidité due aux congés.

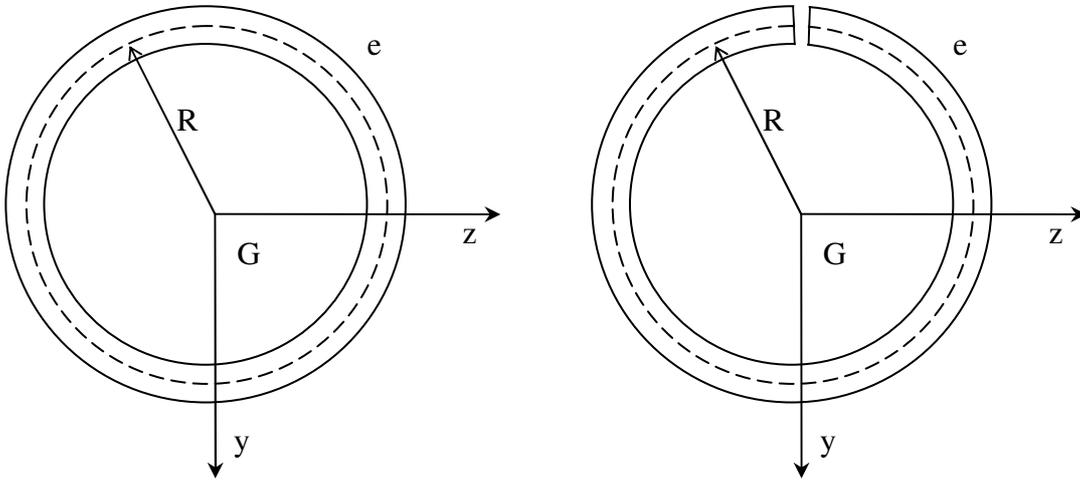
Correction de FÖPPL : $J = k\Sigma \frac{he^3}{3}$

k	1	1,1	1,25
Section			

Exercice 1 : Comparaison de sections circulaires en torsion

On considère les profils minces suivants :

Profil mince fermé :



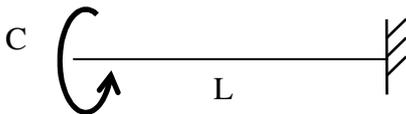
Le tube a un rayon moyen R et une épaisseur $e \ll R$

L'inertie autour de l'axe z vaut : $I_z = \pi R^3 e$

Ces sections sont soumises à un moment de torsion T

Déterminer la répartition des contraintes tangentes dans ces sections.

On considère deux poutres encastées avec les sections droites précédentes, de longueur L soumise à un couple C .



Déterminer la rotation à l'extrémité.

Application numérique :

Rayon moyen 50 mm

Épaisseur 2 mm

$C = 0,1$ kN.m

$G = 81\,000$ MPa

$L = 1$ m

Solution :

Répartition des contraintes tangentes :

Profil mince fermé :

$$S = \frac{1}{2} \oint \rho ds = \pi R^2$$

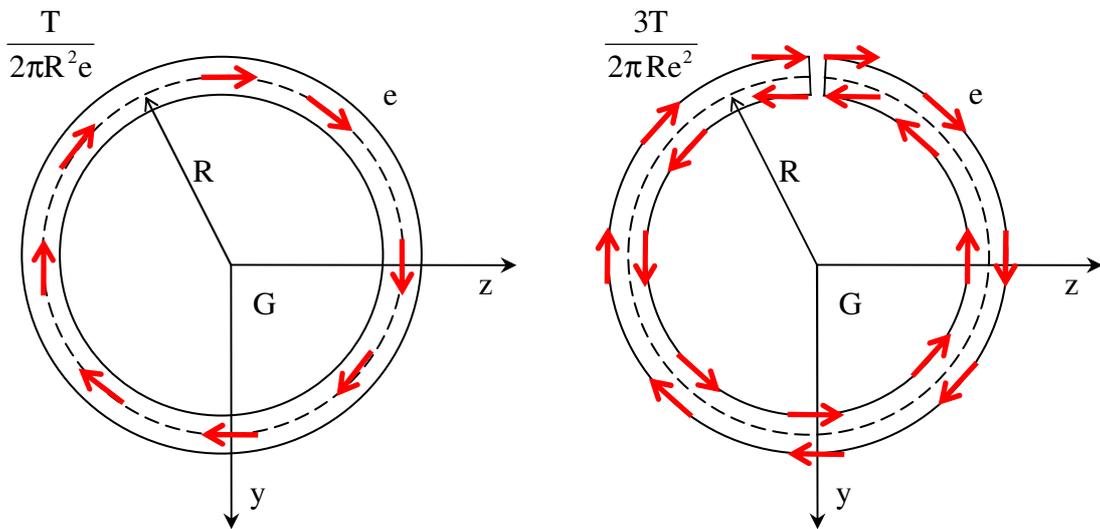
$$\tau = -\frac{T}{2Se} = -\frac{T}{2\pi R^2 e}$$

$$e_{\min} = e \quad \tau_{\max} = -\frac{T}{2\pi R^2 e}$$

Profil mince ouvert :

$$J = \frac{he^3}{3} = \frac{2\pi Re^3}{3}$$

$$\tau_{\max} = -\frac{T}{J}e = -\frac{3T}{2\pi Re^2}$$



Rotation à l'extrémité :

Profil mince fermé :

$$J = \frac{4S^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4(\pi R^2)^2}{2\pi R} = 2\pi R^3 e$$

$$d\theta = -\frac{T}{GJ} dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{GJ} = -\frac{T}{G2\pi R^3 e}$$

$$\theta = -\frac{TL}{G2\pi R^3 e}$$

Profil mince ouvert :

$$d\theta = -\frac{T}{GJ} dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{T}{GJ} = -\frac{T}{G \frac{2\pi Re^3}{3}}$$

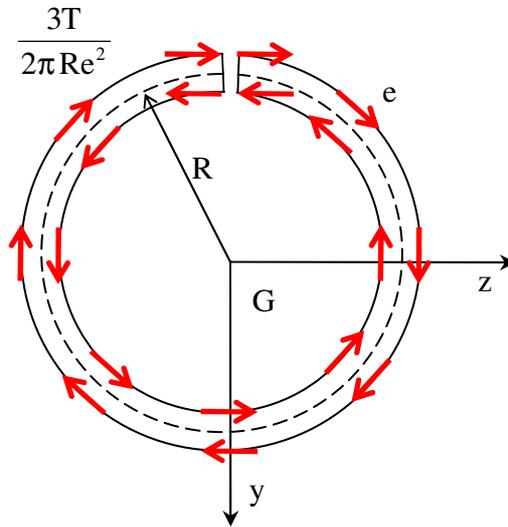
$$\theta = -\frac{3TL}{G2\pi Re^3}$$

Application numérique :

	Profil mince fermé	Profil mince ouvert
Contrainte tangente max	3,2 MPa	238,7 MPa
Rotation à l'extrémité	0,05°	84,4°

Exercice 2 : Contraintes tangentes dans un profil mince ouvert

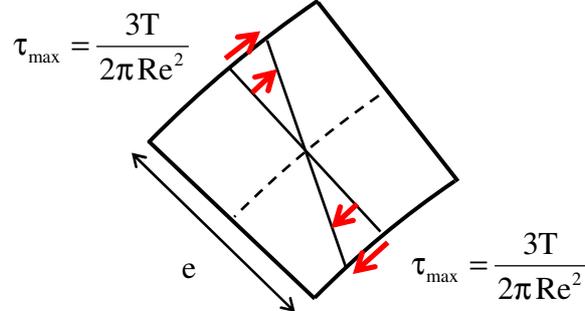
Une bonne approximation des contraintes tangentes dues à la torsion dans un profil circulaire ouvert est donné par :



On suppose une répartition transversale linéaire des contraintes tangentes. Retrouver par intégration le moment de torsion. Conclure.

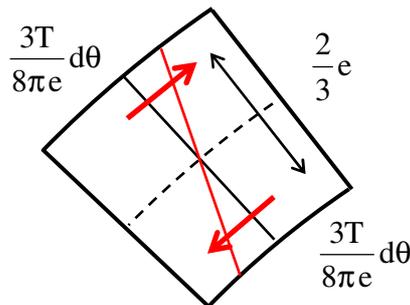
Solution :

On considère un élément du profil $d\theta$.



En intégrant sur cet élément les contraintes tangentes :

$$\frac{1}{2} \tau_{\max} \frac{e}{2} R d\theta = \frac{3T}{8\pi e} d\theta$$



Ce qui engendre un moment de torsion :

$$dT = \frac{3T}{8\pi e} d\theta \frac{2}{3} e = \frac{T}{4\pi} d\theta$$

En intégrant sur le contour :

$$T = \frac{T}{4\pi} 2\pi = \frac{T}{2}$$

L'approximation de la contrainte maximum étant bonne, la répartition transversale des contraintes tangentes n'est donc pas linéaire.

Chapitre 9 Flambement

Par souci de simplification, nous abordons dans ce chapitre, uniquement les problèmes plans.

9.1 Déformations élémentaires

Dans le cas des problèmes plans, les déformations d'un tronçon de poutre de longueur dx sont reliées aux sollicitations par les relations suivantes :

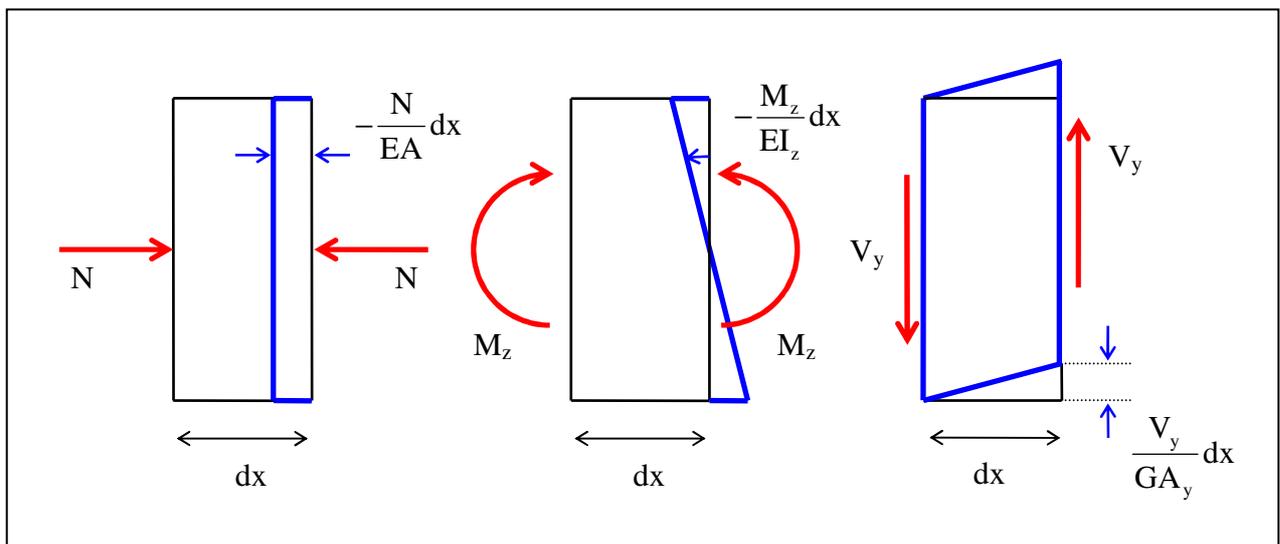


Fig. 9.1 – Déformations – Sollicitations élémentaires

Ces différents résultats sont extraits des chapitres précédents sur l'étude de sollicitations simples : traction et compression simple, flexion simple et effort tranchant.

La torsion n'existant pas dans les problèmes plans, ses déformations ne seront pas prises en compte.

9.2 Equation différentielle de la déformée

9.2.1 Hypothèses des petites perturbations

Après déformation, un point M d'une section droite Σ se retrouve en M' .

Le déplacement de ce point M est dû aux déplacements de la section droite ; il peut donc être paramétré par les variables $u(x)$, $v(x)$ et $\omega(x)$ qui sont respectivement les déplacements et rotation de la section droite dans le repère local.

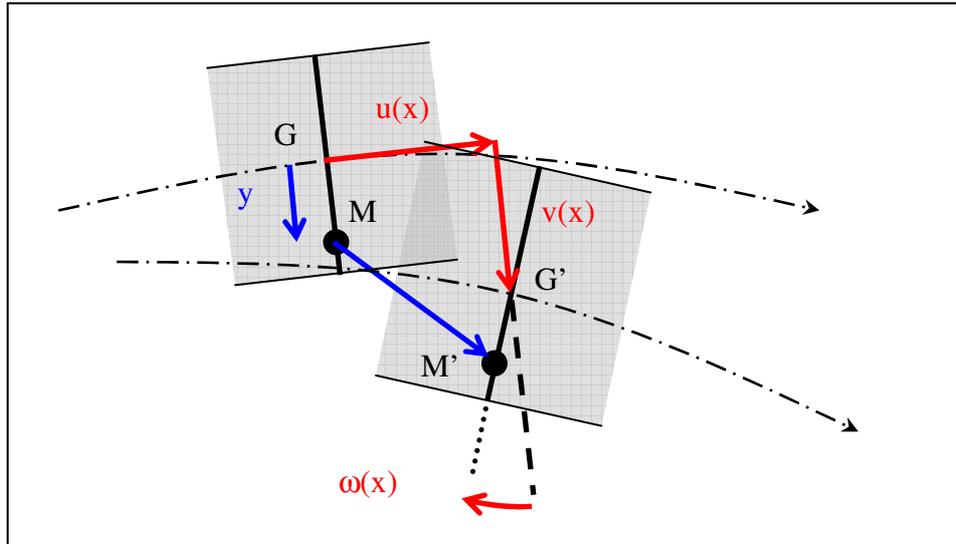


Fig. 9.2 – Déplacement d'un point M

Ces déplacements sont reliés aux déformations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} du(x) = -\frac{N}{EA} dx \\ \gamma(x) dx = -\frac{V_y}{GA_y} dx \\ d\omega(x) = -\frac{M_z}{EI_z} dx \end{cases}$$

Au premier ordre, le déplacement vectoriel du point M vaut dans le repère local :

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} \begin{cases} u(x) - \omega(x)y \\ v(x) \end{cases}$$

Exprimons la distorsion $\gamma(x)$ à l'aide de la définition de ϵ_{xy}

$$\gamma(x) = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \frac{\partial u(x) - \omega(x)y}{\partial y}$$

Soit :

$$\gamma(x) = v'(x) - \omega(x)$$

D'où :

$$v'(x) = \omega(x) + \gamma(x)$$

En dérivant :

$$v''(x) = \omega'(x) + \gamma'(x) = -\frac{M_z}{EI_z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{V_y}{GA_y} \right)$$

Les hypothèses prises pour arriver à ce résultat nous permettent de dire que l'équation différentielle de la déformée d'une poutre plane chargée dans son plan sous l'Hypothèse des Petites Perturbations est :

$$v''(x) = -\frac{M_z}{EI_z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{V_y}{GA_y} \right)$$

9.2.2 Formules de BRESSE

L'expression intégrée de l'équation précédente porte le nom de formule de BRESSE.

$$\begin{cases} v(x) = v_0 + \omega_0 x - \int_0^x (x - \alpha) \frac{M_z}{EI_z} d\alpha - \int_0^x \frac{V_y}{GA_y} d\alpha \\ \omega(x) = \omega_0 - \int_0^x \frac{M_z}{EI_z} d\alpha \end{cases}$$

9.2.3 Exemple numérique

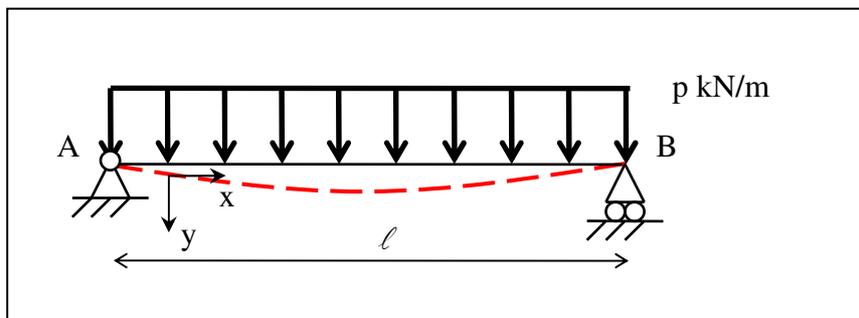


Fig. 9.3 : Exemple poutre droite – Déformée

Nous mettons en place les expressions des sollicitations :

$$M(x) = -\frac{p}{2}x^2 + \frac{p\ell}{2}x \quad \text{et} \quad V(x) = px - \frac{p\ell}{2}$$

D'où l'équation différentielle de la déformée :

$$v''(x) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{p}{2}x^2 - \frac{p\ell}{2}x \right) - \frac{1}{GA_y} p$$

En intégrant deux fois :

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{p}{24}x^4 - \frac{p\ell}{12}x^3 \right) - \frac{1}{GA_y} \frac{p}{2}x^2 + ax + b$$

Les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions aux limites :

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(\ell) = 0$$

Soit :

$$b = 0 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{EI_z} \frac{p\ell^3}{24} + \frac{1}{GA_y} \frac{p\ell}{2}$$

Ainsi :

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{p}{24} x^4 - \frac{p\ell}{12} x^3 + \frac{p\ell^3}{24} x \right) + \frac{1}{GA_y} \left(-\frac{p}{2} x^2 + \frac{p\ell}{2} x \right)$$

Le maximum est atteint pour $x = \frac{\ell}{2}$

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{p}{24} \frac{\ell^4}{16} - \frac{p\ell}{12} \frac{\ell^3}{8} + \frac{p\ell^3}{24} \frac{\ell}{2} \right) + \frac{1}{GA_y} \left(-\frac{p}{2} \frac{\ell^2}{4} + \frac{p\ell}{2} \frac{\ell}{2} \right)$$

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5p\ell^4}{384EI_z} + \frac{p\ell^2}{8GA_y}$$

Application numérique :

Soit un profilé métallique IPE180 de portée $\ell = 10$ m sous une charge répartie de $p = 2$ kN/m
 $E = 210\,000$ MPa, $I_z = 1317$ cm⁴ $G = 81\,000$ MPa et $A_y = 869,2$ mm²

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{384 \cdot 210000 \cdot 10^6 \cdot 1317 \cdot 10^{-8}} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{8 \cdot 81000 \cdot 10^6 \cdot 869,2 \cdot 10^{-6}}$$

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = 94,2 + 0,4 = 94,6 \text{ mm}$$

Les exemples courants montrent que l'on peut négliger les déplacements (resp. déformations) dus à l'effort tranchant par rapport aux déplacements (resp. déformations) dus au moment fléchissant.

L'équation différentielle de la déformée devient :

$$v''(x) = -\frac{M_z}{EI_z}$$

9.3 Flambement d'une poutre bi articulée

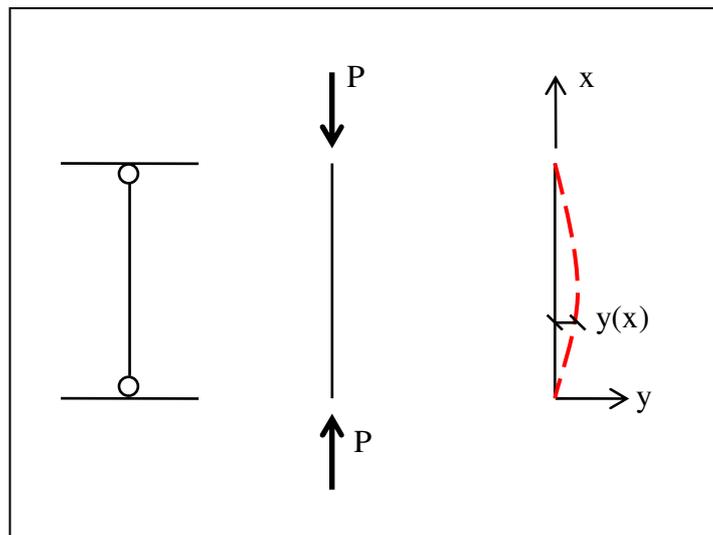


Fig. 9.4 : Flambement – Poutre bi articulée

On constate expérimentalement, qu'une poutre bi articulée soumise à une compression centrée, peut perdre brusquement sa position d'équilibre rectiligne.

Or, d'après toutes les hypothèses faites jusqu'à maintenant, les seules déformations que l'on doit constater sont des raccourcissements.

Nous devons donc mettre en défaut une des hypothèses faites : les déplacements ne sont plus petits nous écrivons les équations d'équilibre sur la position déformée.

Remarques :

1. L'équation différentielle de la déformée ayant été obtenue sous l'hypothèse des petites déformations, elle reste valable sans l'hypothèse des petits déplacements
2. Nous constatons expérimentalement, que la perte de l'équilibre rectiligne s'accompagne d'une flexion autour de l'axe de l'inertie propre la plus petite de la section notée I_y .

On suppose que la configuration d'équilibre n'est pas nécessairement une déformée rectiligne mais de la forme $y(x)$.

Equation différentielle de la déformée :

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y} \quad \text{avec } M(x) = Py(x)$$

d'où :

$$y''(x) = -\frac{P}{EI_y} y(x)$$

On pose $k^2 = \frac{P}{EI_y}$ d'où :

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0 \quad \text{avec : } y(0) = 0 \text{ et } y(\ell) = 0$$

La solution de l'équation différentielle est : $y(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Les conditions aux limites imposent : $A = 0$ et $B \sin k\ell = 0$

La solution $B = 0$ correspond à l'équilibre rectiligne.

Le flambement correspond donc à : $\sin k\ell = 0$ soit : $k\ell = n\pi$

La solution $k\ell = 0$ correspond à $P = 0$

La solution $k\ell = \pi$ correspond à $P = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$

Définition 78 : Force critique d'EULER

La force critique d'EULER est l'effort de compression qui correspond à la perte d'équilibre rectiligne d'une poutre droite.

Dans le cas simple d'une poutre bi articulée, cet effort vaut : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$

Interprétons ces résultats en déterminant la flèche maximale f en fonction de la force P appliquée :

$$P < P_{cr} \quad A = B = 0 \text{ donc } y(x) = 0 \text{ d'où } f = y(\ell/2) = 0$$

$P = P_{cr}$ quel que soit B : $y(x) = B \sin kx$

la flèche f est indéterminée

D'où la courbe $P(f)$

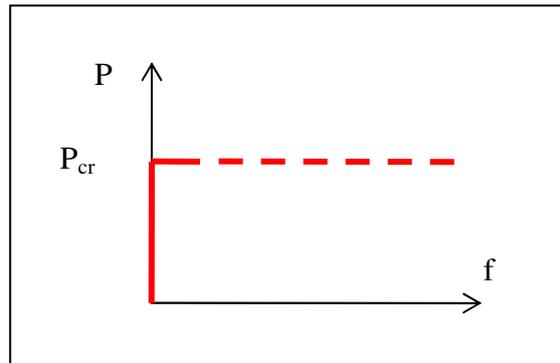


Fig. 9.5 : Flambement – Poutre bi articulée

9.4 Flambement d'une poutre bi encastrée

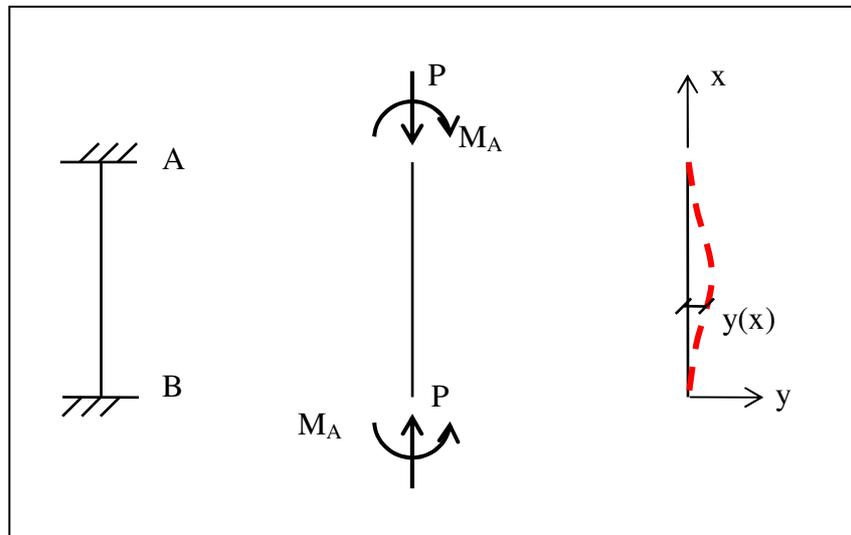


Fig. 9.6 : Flambement – Poutre bi encastrée

Equation différentielle de la déformée : $y''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y}$ avec $M(x) = -M_A + Py(x)$

On pose $k^2 = \frac{P}{EI_y}$ d'où : $y''(x) + k^2 y(x) = \frac{M_A}{EI_y}$

avec : $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(\ell) = 0$ et $y'(\ell) = 0$

La solution de l'équation différentielle est : $y(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{M_A}{P}$

Les conditions aux limites imposent : $1 - \cos k\ell = 0$ soit : $k\ell = 2\pi$

La solution $k\ell = 0$ correspond à $P = 0$

La solution $k\ell = 2\pi$ correspond à $P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\ell/2)^2}$

On pose : $\ell_f = \frac{\ell}{2}$ d'où $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell_f^2}$: force critique d'EULER

9.5 Longueur de flambement

Définition 79 : Longueur de flambement

Quels que soient les conditions aux limites, la force critique d'EULER peut se mettre sous la forme : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell_f^2}$ la longueur ℓ_f s'appelle longueur de flambement et dépend des conditions aux limites.

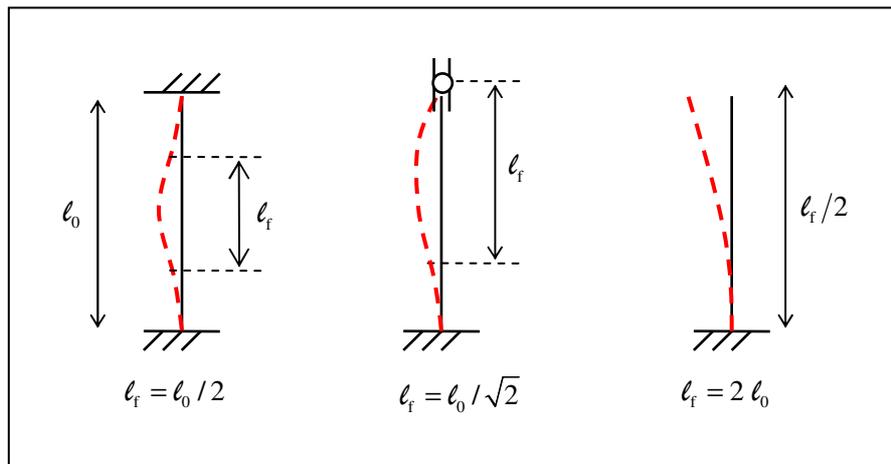


Fig. 9.7 : Longueur de flambement

Remarque :

La longueur de flambement représente la distance entre deux points de moments nuls (ou points d'inflexion).

9.6 Elancement

A la force critique d'EULER correspond une contrainte : $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_y}{\ell_f^2 A}$

Soit i_y le rayon de giration autour de l'axe d'inertie minimum : $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$

Définition 80 : Elancement

On définit l'élancement λ par : $\lambda = \frac{\ell_f}{i_y}$

D'où : $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Le comportement au flambement est donc directement lié à l'élancement.

9.7 Flambement et déformée initiale

On considère une poutre bi articulée soumise à de la compression simple : $N = P$

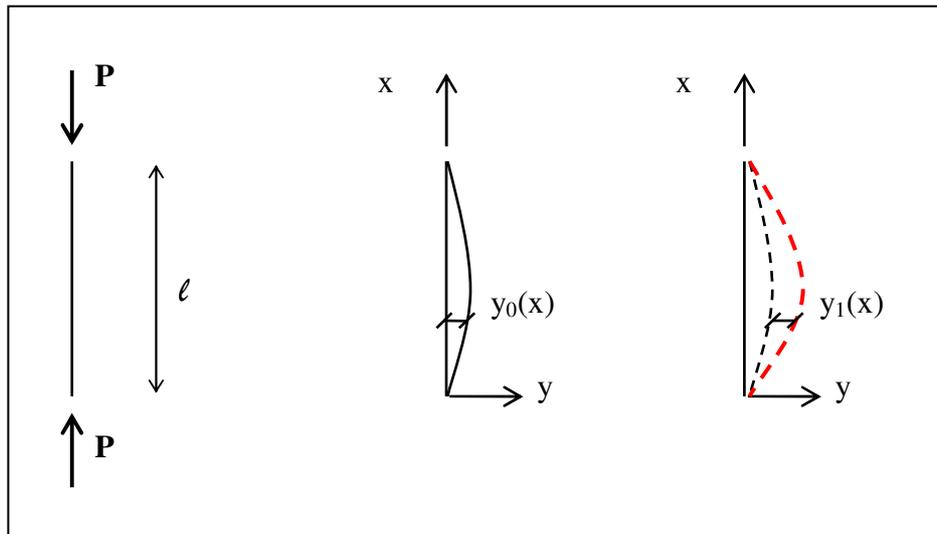


Fig. 9.8 : Flambement – Déformée initiale

Cette poutre n'est pas parfaitement rectiligne et possède une déformée initiale de la forme :

$$y_0(x) = e_0 \sin \pi \frac{x}{\ell}$$

Sous l'effet de la compression, cette poutre prend une flèche complémentaire $y_1(x)$

Le moment fléchissant dans la poutre vaut ainsi : $M(x) = P(y_0(x) + y_1(x))$

L'équation différentielle de la déformée s'écrit donc :

$$y_1''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y} = -\frac{P}{EI_y}(y_0(x) + y_1(x))$$

On pose $k^2 = \frac{P}{EI_y}$ d'où : $y_1''(x) + k^2 y_1(x) = -k^2 e_0 \sin \pi \frac{x}{\ell}$

Solution générale de l'équation sans second membre : $y_1(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Solution particulière de l'équation avec second membre :

$$y_1(x) = e_0 \frac{P}{\frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} - P} \sin \pi \frac{x}{\ell} = e_0 \frac{P}{P_{cr} - P} \sin \pi \frac{x}{\ell}$$

D'où l'expression de la solution :

$$y_1(x) = A \cos kx + B \sin kx + e_0 \frac{P}{P_{cr} - P} \sin \pi \frac{x}{\ell}$$

Les conditions aux limites nous donnent :

$$y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_1(\ell) = 0$$

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0 \quad \text{si} \quad 0 < \sin k\ell < \pi \quad \text{soit} \quad : \quad 0 < P < P_{cr}$$

L'expression de la déformée est donc :

$$y_1(x) = \frac{P}{P_{cr} - P} e_0 \sin \pi \frac{x}{\ell}$$

Interprétons ces résultats en déterminant la flèche maximale f en fonction de la force P appliquée obtenue pour $x = \ell / 2$:

$$f(P) = y_1(\ell/2) = \frac{P}{P_{cr} - P} e_0$$

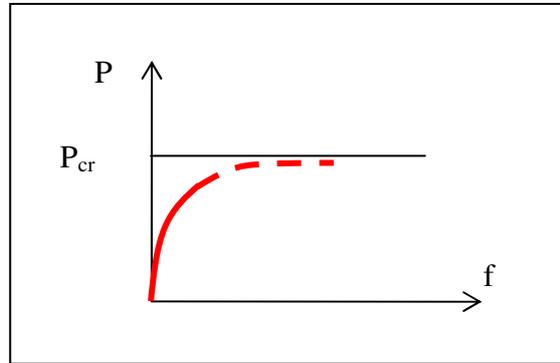


Fig. 9.9 : Flambement – Déformée initiale

Remarque :

Ce comportement est plus proche d'un comportement expérimental, ce qui est justifié par le fait qu'une poutre n'est jamais parfaitement rectiligne.

9.8 Flambement et excentrement

On considère une poutre bi articulée soumise à de la compression simple : $N = P$

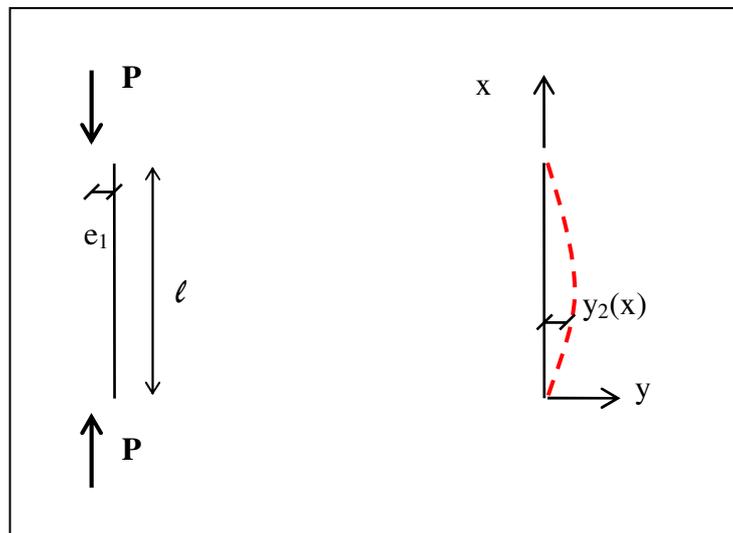


Fig. 9.10 : Flambement – Excentrement

La charge appliquée à la poutre a un excentrement e_1

Sous l'effet de la compression, cette poutre prend une flèche $y_2(x)$

Le moment fléchissant dans la poutre vaut ainsi : $M(x) = P(e_1 + y_2(x))$

L'équation différentielle de la déformée s'écrit donc :

$$y_2''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y} = -\frac{P}{EI_y}(e_1 + y_2(x))$$

On pose $k^2 = \frac{P}{EI_y}$ d'où : $y_2''(x) + k^2 y_2(x) = -k^2 e_1$

Solution générale de l'équation sans second membre : $y_2(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Solution particulière de l'équation avec second membre :

$$y_2(x) = -e_1$$

D'où l'expression de la solution :

$$y_2(x) = A \cos kx + B \sin kx - e_1$$

Les conditions aux limites nous donnent :

$$y_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_2(\ell) = 0$$

$$A = e_1 \quad \text{et} \quad B = \frac{1 - \cos k\ell}{\sin k\ell} = \tan \frac{k\ell}{2}$$

L'expression de la déformée est donc :

$$y_2(x) = e_1 \left(\cos kx + \tan \frac{k\ell}{2} \sin kx - 1 \right)$$

Interprétons ces résultats en déterminant la flèche maximale f en fonction de la force P appliquée obtenue pour $x = \ell/2$:

$$f(P) = y_2(\ell/2) = e_1 \left(\cos \frac{k\ell}{2} + \tan \frac{k\ell}{2} \sin \frac{k\ell}{2} - 1 \right) = e_1 \left(\frac{1}{\cos \frac{k\ell}{2}} - 1 \right)$$

Soit

$$f(P) = e_1 \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right)} - 1 \right)$$

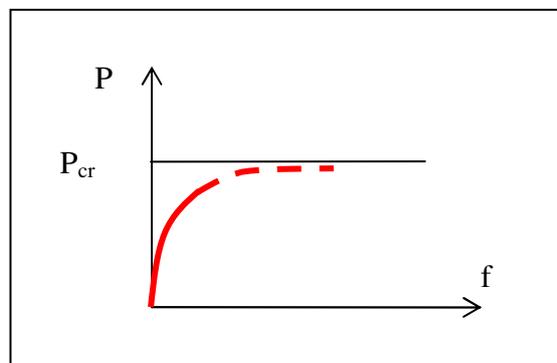
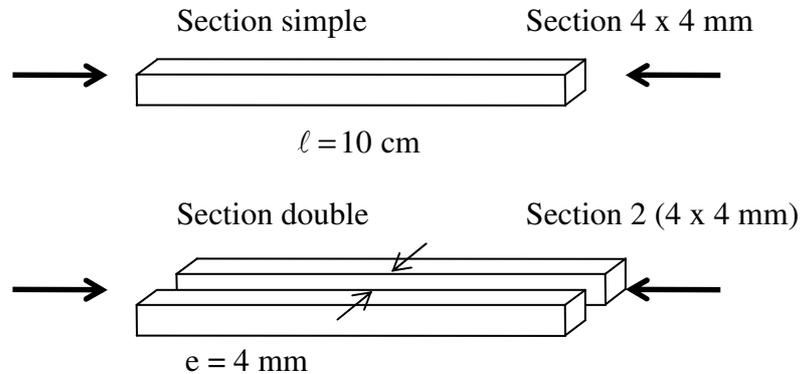


Fig. 9.11 : Flambement – Excentrement

Exercice 1 : Flambement dans une double barre

On considère 2 poutres de même longueur, bi articulées, de même matériau $E = 5420 \text{ MPa}$ et soumises à un même effort normal de compression, mais de sections droites différentes.

On se donne comme critère de ne pas dépasser 30 MPa en compression.



Section simple :

Déterminer la force critique d'Euler.

L'imperfection de la liaison à l'extrémité laisse supposer un excentrement de l'effort de $e_1 = 0,5 \text{ mm}$

On considère maintenant un effort de compression de $90,2 \text{ N}$ excentré de $0,5 \text{ mm}$

Calculer la flèche à mi travée engendrée par le flambement.

En déduire le moment fléchissant.

Déterminer la répartition des contraintes normales dans la section droite.

Quel pourcentage de la force critique d'Euler est-il prudent de ne pas dépasser ?

Section double :

Déterminer la force critique d'Euler.

On considère maintenant un effort de compression de $84,3 \text{ N}$ centré sur la section double.

Calculer la flèche à mi travée sur une poutre engendrée par le flambement.

En déduire le moment fléchissant dans une poutre.

Déterminer la répartition des contraintes normales dans la section droite d'une poutre.

Conclure sur l'opportunité de la section double par rapport à la section simple.

Solution :

Section simple :

Force critique d'EULER :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell_f^2} \quad \text{avec } \ell_f = \ell_0 = 0,10 \text{ m} \quad I_y = \frac{4 \times 4^3}{12} = 21,33 \text{ mm}^4 \quad \text{et } E = 5420 \text{ MPa}$$

$$P_{cr} = 114,1 \text{ N}$$

Flèche à mi travée :

$$y(\ell/2) = e_1 \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)} - 1 \right) \text{ avec } e_1 = 0,5 \text{ mm } P = 90,2 \text{ N et } P_{cr} = 114,1 \text{ N}$$

$$y(\ell/2) = 2,38 \text{ mm}$$

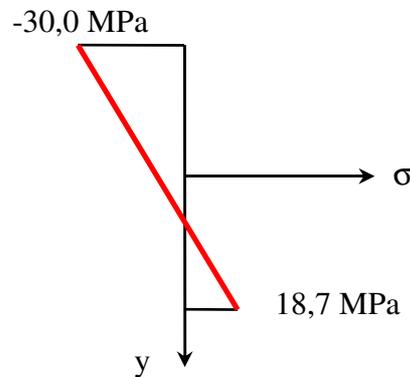
Moment fléchissant à mi travée :

$$M(\ell/2) = P(e_1 + y(\ell/2)) = 0,260 \text{ N.m}$$

Répartition des contraintes normales :

$$\sigma(y) = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y \quad \sigma_{\text{sup}} = -\frac{90,2}{16 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,260}{21,33 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{inf}} = -\frac{90,2}{16 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,260}{21,33 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 18,7 \text{ MPa}$$



On remarque qu'il ne faut pas dépasser $P = 90,2 \text{ N}$ alors que la force critique d'Euler est de $P_{cr} = 114,1 \text{ N}$.

Il est prudent de ne pas dépasser 80% de la force critique d'Euler

Section double :

Force critique d'Euler :

Par rapport à la section simple : $P_{cr} = 2 \times 114,1 \text{ N} = 228,2 \text{ N}$

Poutre une poutre sous un effort de $\frac{84,3}{2} = 42,15 \text{ N}$ excentré de 4 mm :

Flèche à mi travée :

$$y(\ell/2) = e_1 \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)} - 1 \right) \text{ avec } e_1 = 4 \text{ mm } P = 42,15 \text{ N et } P_{cr} = 114,1 \text{ N}$$

$$y(\ell/2) = 2,92 \text{ mm}$$

Moment fléchissant à mi travée :

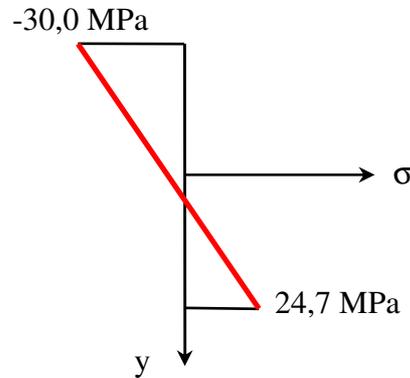
$$M(\ell/2) = P(e_1 + y(\ell/2)) = 0,292 \text{ N.m}$$

Répartition des contraintes normales :

$$\sigma(y) = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{42,15}{16 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,292}{21,33 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{inf}} = -\frac{42,15}{16 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,292}{21,33 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 24,7 \text{ MPa}$$



Conclusion : l'analyse des doubles barres n'est pas simple il faut considérer deux barres indépendantes avec un fort excentrement de la charge.

Ici il est mieux de placer une seule barre de 4x4 (effort limite de 90,2 N) que deux barres 4x4 espacées de 4 mm (effort limite de 84,3 N)

Exercice 2 : Flambement global

L'approche de cet exercice est résolument simplifiée, mais les ordres de grandeur des solutions sont significatifs.

On considère une structure réticulée (treillis) élancée que l'on assimile à une poutre unique bi articulée soumise à un effort de compression.

On supposera un contreventement hors du plan suffisamment efficace pour conduire l'analyse dans le plan de définition.

Cette poutre est formée de n tronçons de côté a.

Les membrures $A_i A_{i+1}$ et les montants $A_i B_i$ sont de longueur a, les diagonales de longueur :

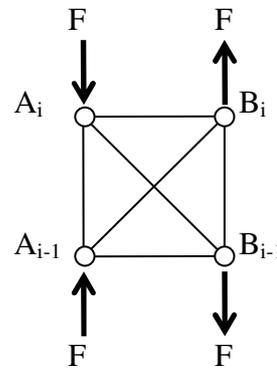
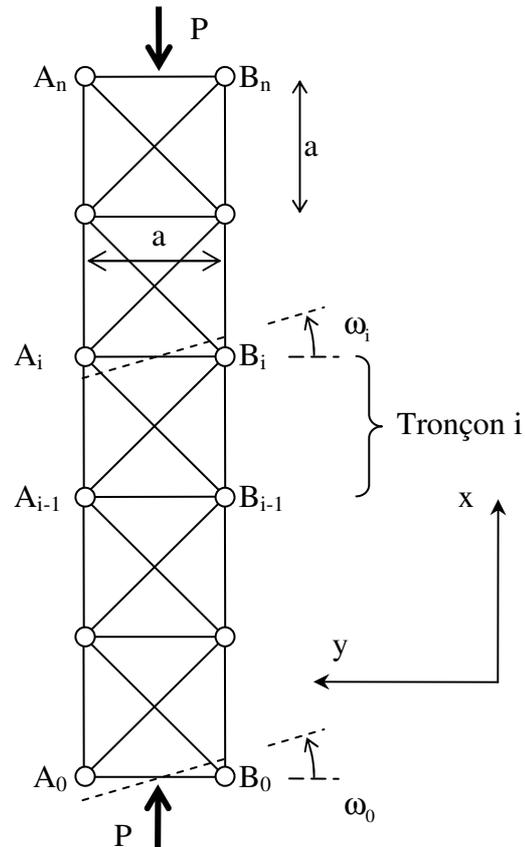
$$a\sqrt{2}.$$

On notera A la section et I_m l'inertie minimum des membrures.

Toutes les barres sont supposées de même matériau linéaire élastique de module d'élasticité E.

la rotation de la section droite entre les tronçons i et i+1 sera notée ω_i

On considère un tronçon de longueur a soumis à la flexion simple de la manière suivante :



On note N_A l'effort normal dans la barre $A_{i-1}A_i$ et N_B l'effort normal dans la barre $B_{i-1}B_i$

Prouver que les efforts normaux dans les diagonales sont identiques.

En étudiant l'équilibre d'un demi tronçon, montrer que $N_B - N_A = 2F$

En déduire l'allongement relatif de la barre $B_{i-1}B_i$ par rapport à la barre $A_{i-1}A_i$

En déduire la variation de rotation sur le tronçon i : $\Delta\omega_i$

Déterminer le moment fléchissant le long du tronçon i : M_i

La formule de la courbure en flexion simple nous donne :

$$\chi_z(x) = -\frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\frac{M_z(x)}{EI_z}$$

Le terme EI_z est appelé rigidité en flexion, on cherche à déterminer cette rigidité en flexion dans le cas de notre structure réticulée.

Montrer que l'on a ici :

$$\Delta\omega_i = \frac{M_i}{EI_z} a$$

En déduire la rigidité à la flexion équivalente.

Retrouver simplement ce résultat par des considérations géométriques sur la section droite de la structure réticulée.

A partir de combien de tronçons, le flambement global de la structure apparaîtra-t-il avant le flambement local d'une barre.

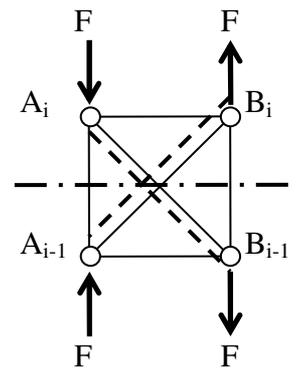
Remarque : on admettra que les sections des barres $A_{i-1}A_i$ et $B_{i-1}B_i$ sont prédominantes, ce qui permet d'estimer les efforts normaux dans ces dernières à $P/2$

Application numérique : les membrures sont faites d'une barre 4×4 mm, chaque tronçon fait 5 cm de coté.

Solution :

Efforts dans les diagonales :

Le problème relatif à un tronçon est symétrique, ainsi les allongements des diagonales aussi, et par suite les efforts normaux que l'on notera N_d

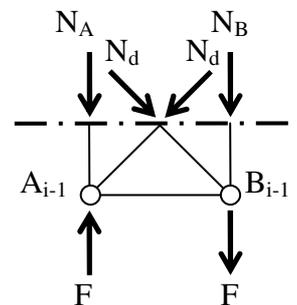


Efforts dans les membrures :

Le moment des forces par rapport au centre du tronçon donne :

$$N_A \frac{a}{2} = N_B \frac{a}{2} + 2F \frac{a}{2}$$

$$\text{Soit : } N_A - N_B = 2F$$



L'allongement d'un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort normal N vaut :

$$-\frac{N}{EA} dx$$

Si toute la barre est soumise au même effort normal, par intégration, son allongement vaut :

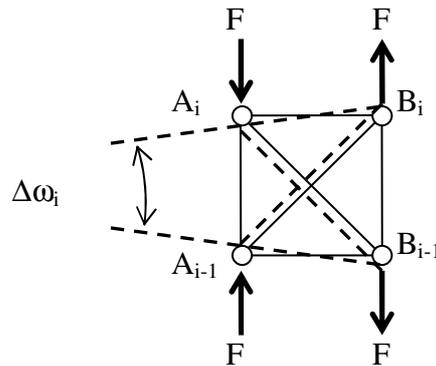
$$-\frac{N\ell}{EA}$$

Allongement de la barre $A_{i-1}A_i$: $-\frac{N_A a}{EA}$

Allongement de la barre $B_{i-1}B_i$: $-\frac{N_B a}{EA}$

Soit un allongement relatif de $-\frac{N_B a}{EA} + \frac{N_A a}{EA} = (N_A - N_B) \frac{a}{EA} = \frac{2Fa}{EA}$

Variation de rotation sur le tronçon i : $\Delta\omega_i$



$$\Delta\omega_i \approx \tan \Delta\omega_i = \frac{2Fa}{EA} \frac{1}{a} = \frac{2F}{EA}$$

Moment fléchissant le long du tronçon i :

Moment constant : $M_i = Fa$

Comportement en flexion simple :

$$d\omega_z(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z} dx$$

En intégrant sur un tronçon i où le moment est constant :

$$\Delta\omega_i = \frac{M_i}{EI_z} a$$

Rigidité à la flexion équivalente.

$$EI_z = \frac{M_i}{\Delta\omega_i} a = \frac{Fa}{\frac{2F}{EA}} a = E \frac{Aa^2}{2}$$

Retrouvons simplement ce résultat :

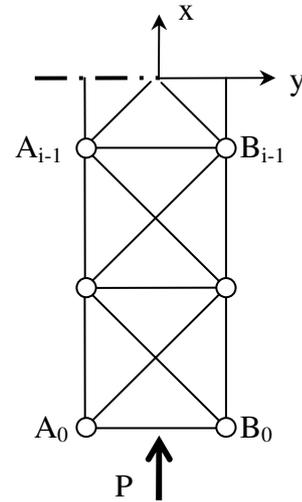
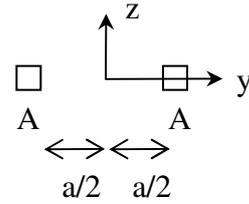
On considère la section droite de notre structure et on néglige les diagonales.

On peut calculer classiquement l'inertie I_z

En négligeant également l'inertie propre des barres $A_{i-1}A_i$ et $B_{i-1}B_i$

$$I_z = A \left(\frac{a}{2} \right)^2 + A \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{Aa^2}{2}$$

On retrouve bien le résultat précédant.



En considérant le flambement global de la structure, la force critique d'EULER vaut :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} = \frac{\pi^2 E \frac{Aa^2}{2}}{(na)^2} = \frac{\pi^2 EA}{2n^2}$$

Le flambement local d'une barre vaut :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI_m}{a^2}$$

Supposons que le flambement global se produit en même temps que le flambement local :

$$\text{Effort normal dans la structure } P = \frac{\pi^2 EA}{2n^2}$$

$$\text{Effort normal dans la membrure : } P = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 EA}{2n^2} = \frac{\pi^2 EI_m}{a^2}$$

$$\text{Soit : } n = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{A}{I_m}}$$

$$\text{Application numérique : } A = 4^2 = 16 \text{ mm}^2 \quad a = 50 \text{ mm} \quad I_m = \frac{4.4^3}{12} = 21,33 \text{ mm}^4$$

$$\text{Soit : } n = 21,7$$

On en conclut qu'à partir d'une structure de longueur 1,10 m, c'est l'ensemble de la structure qui flambe (flambement global) avant une membrure (flambement local)