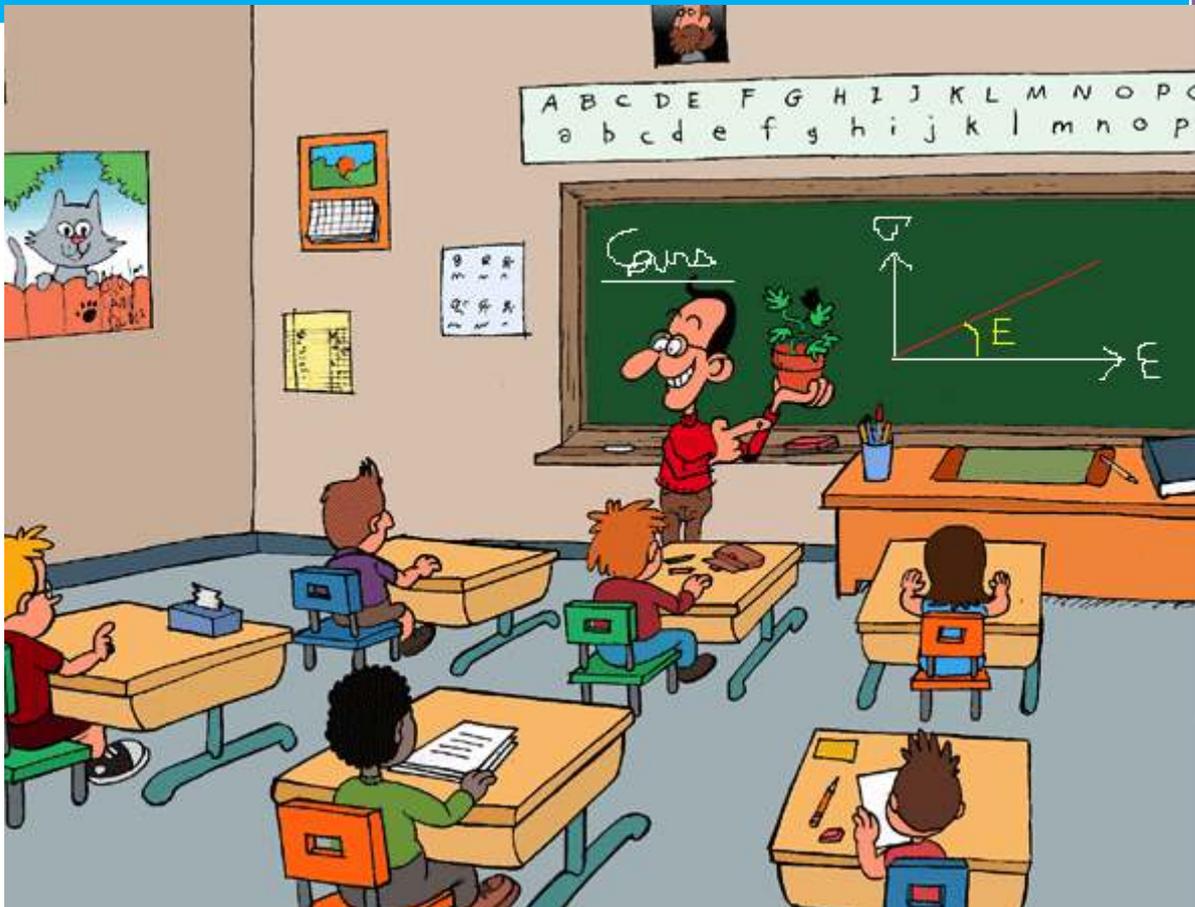


2014

Résistance des matériaux Soutien décembre 2013



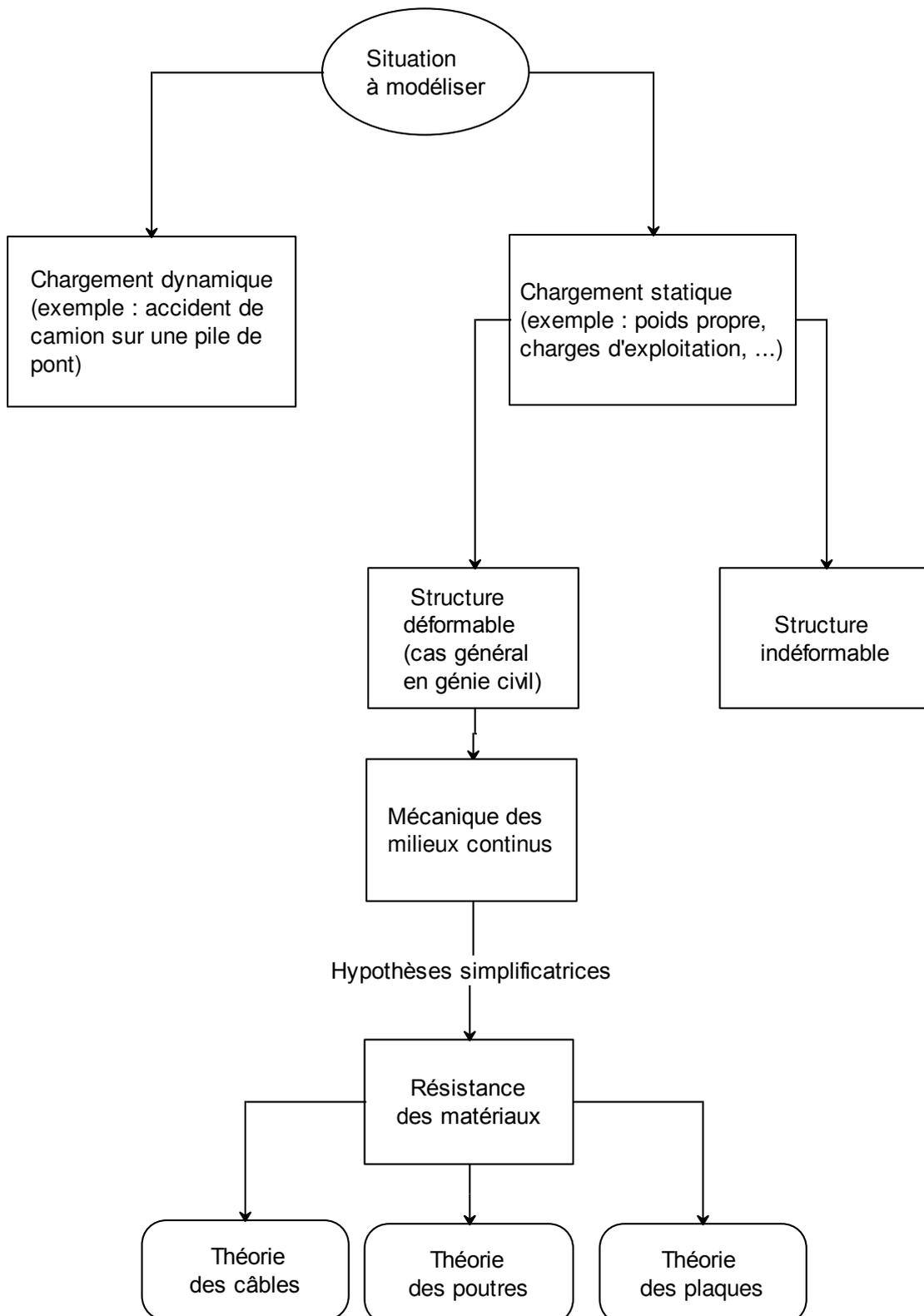
Boris TEDOLDI

Cours

Sommaire

0. Objet du cours et conventions de signe	3
1. Rappels de MMC utiles en RDM	5
2. Définitions.....	12
3. Hypothèses du cours de R.D.M.	17
4. Calculs des réactions d'appuis	22
5. Calculs des diagrammes de sollicitations par la méthode des coupures	36
6. Tracé direct des diagrammes de sollicitations	48
7. Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité.....	57
8. Exercices.....	64

Objet du cours et convention de signe

0. Objet du cours et conventions de signe**0.1 Objet du cours**

L'objet de ce cours est la théorie des poutres.

Objet du cours et convention de signe

0.2 Convention de signe

	Signe positif	Signe négatif
Effort normal N	Engendre de la compression supplémentaire	Engendre de la traction supplémentaire
Moment M_z pour les problèmes 2D	La fibre supérieure est l'ensemble des points où σ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue). La fibre inférieure est l'ensemble des points où σ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée).	La fibre supérieure est l'ensemble des points où σ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée). La fibre inférieure est l'ensemble des points où σ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue).
Contrainte σ	Traction	Compression

Remarque :

Les signes utilisés dans ce cours ne sont qu'une convention. Elle n'importe peu, tant que la réalité physique (zones en compression et en traction) est comprise de la même manière entre le calculateur et le lecteur.

Par exemple, pour les codes de génie civil (BAEL, Eurocode, etc.), la convention de signe pour les contraintes est inversée par rapport à ce cours ($\sigma > 0 \leftrightarrow$ compression). Les résultats en contrainte n'ont donc pas le même signe mais le résultat de dimensionnement des ouvrages est nécessairement identique avec l'une ou l'autre des conventions.

Néanmoins, une fois une convention choisie, il convient de toujours la respecter.

0.3 Notations de l'effort tranchant

L'effort tranchant est noté indifféremment T ou V.

Rappels de MMC utiles en RDM

1. Rappels de MMC¹ utiles en RDM

1.1 Déformations

1.1.1 Déformation longitudinale

Définition de la déformation longitudinale

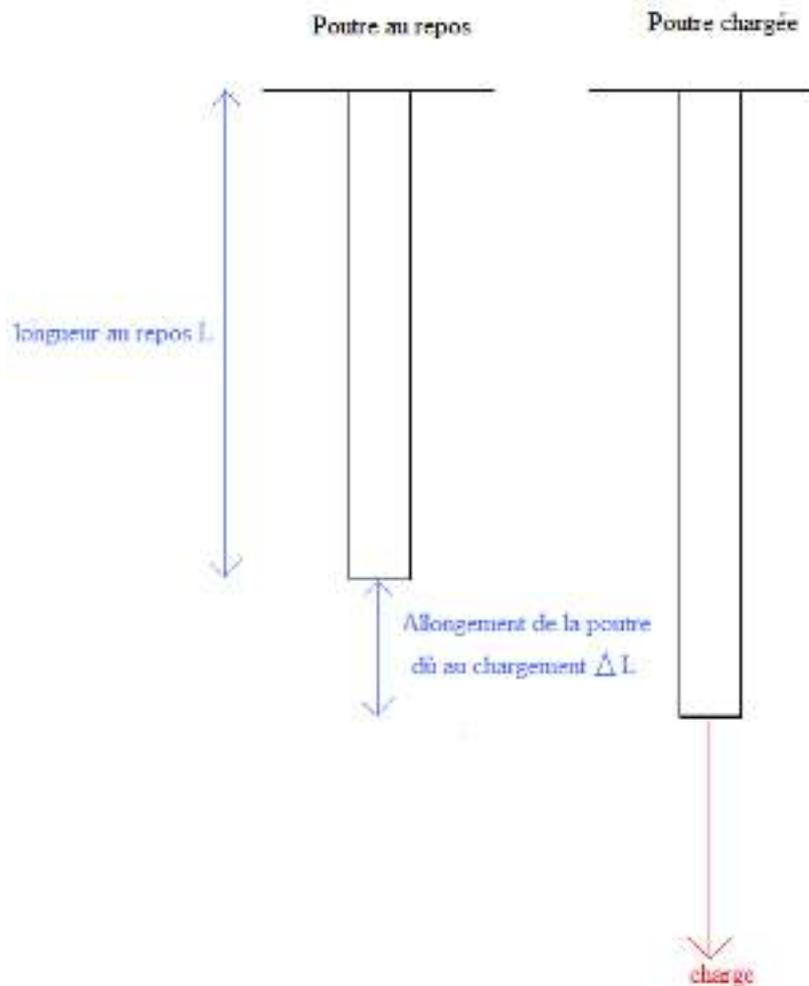
La déformation longitudinale ε_L est la dilatation dans le sens de la longueur de la poutre.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, cette déformation sera notée ε .

Expressions

L'expression de la déformation est $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Unité : aucune

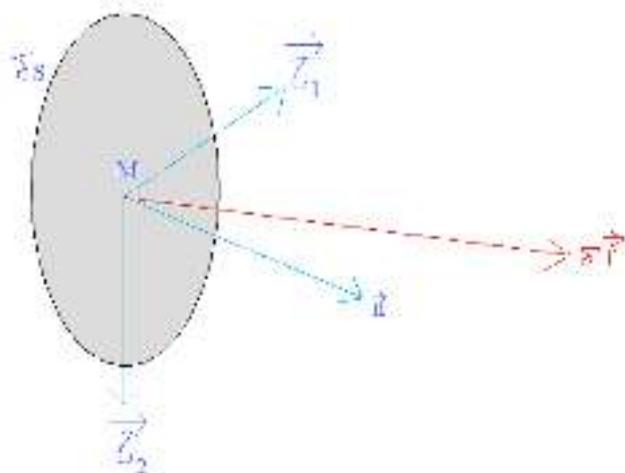


¹ MMC : Mécanique des Milieux Continus

Rappels de MMC utiles en RDM

1.2 Contraintes**1.2.1 Vecteur contrainte**

A l'intérieur d'un solide, sur une petite surface matérielle δS de normale \vec{n} s'exerce une petite force $\delta \vec{f}$.



\vec{n} est perpendiculaire à la surface élémentaire δS

$\vec{\tau}_1$ et $\vec{\tau}_2$ sont des vecteurs positionnés dans le plan de surface élémentaire δS .

\vec{n} , $\vec{\tau}_1$ et $\vec{\tau}_2$ constitue un repère direct.

Définition du vecteur contrainte

On appelle vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ en M, sur la facette de normale \vec{n} , la limite lorsqu'elle existe de $\frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$ quand δS tend vers 0.

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\mathbf{M}, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n(\mathbf{M}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$$

Définition de la contrainte normale

La contrainte normale en un point M sur une facette de normale normale \vec{n} est la composante de $\delta \vec{f}$ sur le vecteur \vec{n} .

Définition de la contrainte tangente

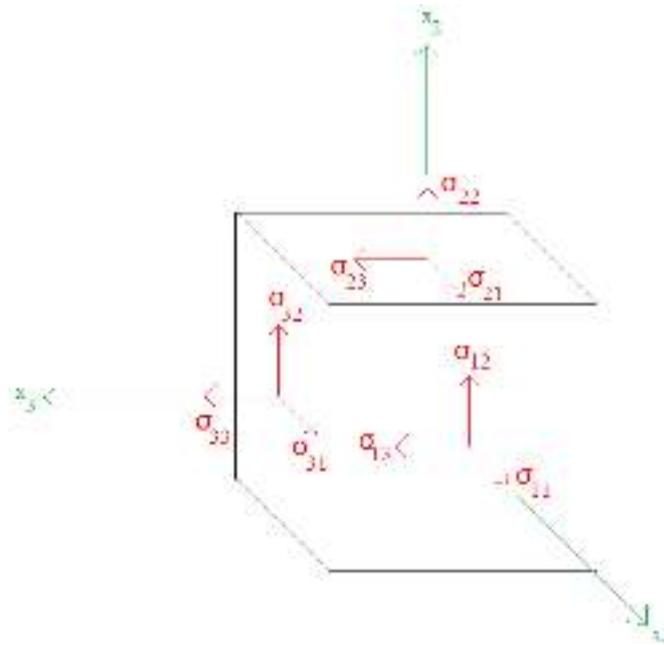
La contrainte tangente en un point M sur une facette de normale \vec{n} est la composante de $\delta \vec{f}$ sur les vecteurs $\vec{\tau}_1$ et $\vec{\tau}_2$.

1.2.2 Tenseur des contraintes*1.2.2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy***Propriété**

Le tenseur des contraintes peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Rappels de MMC utiles en RDM



Remarque : ce tenseur est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Notations

En théorie des poutres dans le repère local :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

1.2.2.2 Tenseurs de contrainte appliqués à la théorie des poutres

1.2.2.2.1 Cas général

Les tenseurs de contraintes, qui seront rencontrés dans le cadre de ce cours sont de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2.2.2 Cas des problèmes plans

Dans le cas des problèmes plans, les tenseurs de contraintes sont de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappels de MMC utiles en RDM

1.3 Les Lois de Comportement

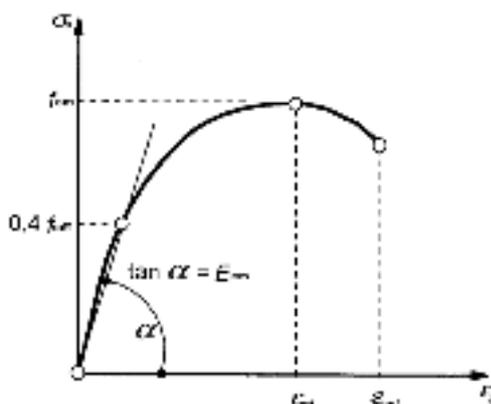
1.3.1 Quelques définitions

Définition de la loi de comportement

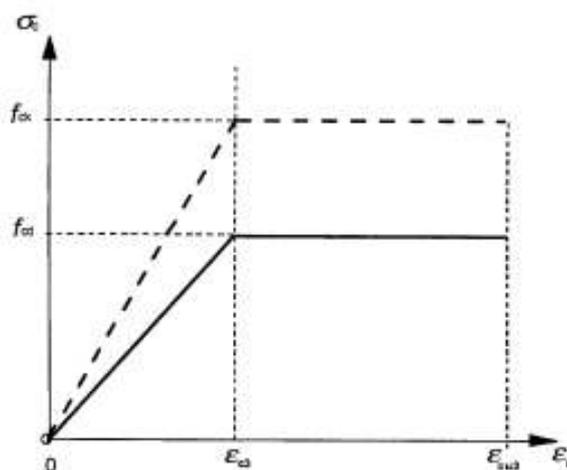
Une loi de comportement est une relation liant les contraintes aux déformations.

Exemples :

- Elle est obtenue par expérimentation : **loi de comportement réelle.**



- Elle peut être modélisée mathématiquement : **loi de comportement modélisée.**
- Elle peut prendre en compte des coefficients de sécurité réglementaire : **loi de comportement réglementaire.**



Définition d'une loi de comportement élastique

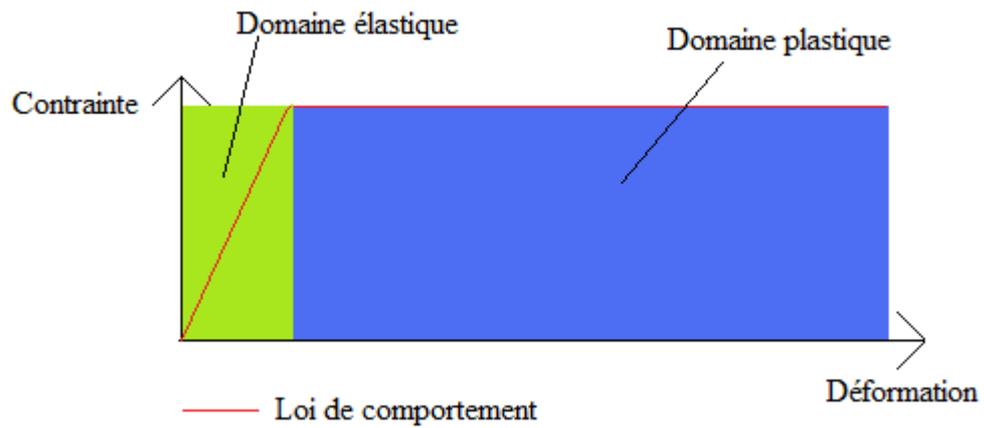
Une loi de comportement est élastique si après chargement et déchargement du matériau, les déformations reviennent à 0.

Rappels de MMC utiles en RDM

Exemple :

Seul le domaine d'élasticité ci-dessous convient à la définition d'un comportement élastique.

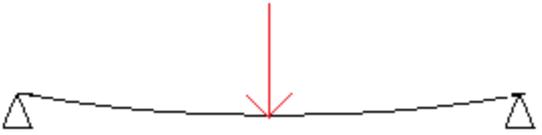
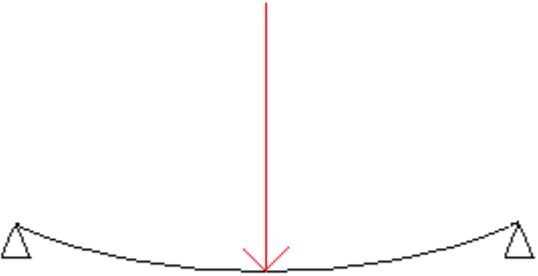
En domaine de plasticité, même après déchargement, il existe une déformation résiduelle.



Rappels de MMC utiles en RDM

Une illustration des différences de comportement dans les domaines élastique et plastique est donnée par la situation suivante :

- 1) Etat initial. La structure n'est pas chargée (le poids propre étant négligé).
- 2) Chargement de la structure
- 3) Suppression du chargement. La structure est à nouveau au repos.

Comportement élastique	Comportement plastique
<p>1) <u>Structure non chargée</u></p> 	<p>1) <u>Structure non chargée</u></p> 
<p>2) <u>Chargement modéré (la structure « reste » dans le domaine élastique)</u></p>  <p>La flèche reste faible.</p>	<p>2) <u>Chargement élevé (la structure est dans le domaine plastique)</u></p>  <p>La flèche est significativement plus élevée que pour un chargement maintenant la structure dans le domaine élastique.</p>
<p>3) <u>Le chargement est supprimé</u></p>  <p>La structure revient à son état initial et est donc identique à l'étape 1).</p>	<p>3) <u>Le chargement est supprimé</u></p>  <p>La structure est déformée par rapport à l'étape 1) malgré l'absence de charge. ⇒ La structure est plastifiée !</p>

Rappels de MMC utiles en RDM

Définition d'une loi de comportement linéaire

Une loi a un comportement linéaire si la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire.

Définition d'une loi de comportement homogène

Une loi a un comportement homogène si elle ne dépend pas du point M que l'on considère.

Définition d'une loi de comportement isotrope

Une loi a un comportement isotrope si elle ne dépend pas des directions que l'on considère.

1.3.2 Loi de Hooke**Définition de la loi de Hooke**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \quad \text{avec } \boldsymbol{\delta} \text{ tenseur unitaire : } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j, \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Avec :

E : module d'élasticité ou module d'Young (MPa).

ν : Coefficient de Poisson.

Propriétés

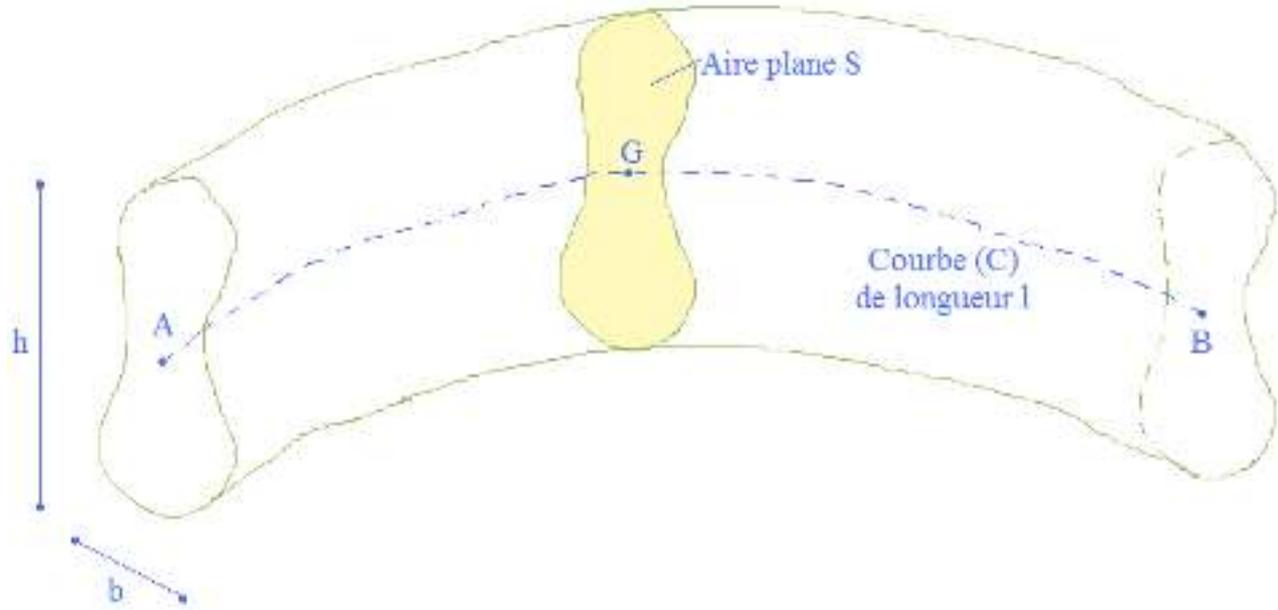
La loi de Hooke est une loi de comportement élastique, linéaire, homogène, isotrope ; elle ne dépend que de deux paramètres : E et ν .

Définitions

2. Définitions

Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane S , dont le centre de gravité G décrit une courbe (C) orientée.



Le plan incluant l'aire plane S reste normal à (C) .

Les dimensions de S doivent être petites par rapport à celle de (C) , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{40} \leq \frac{h}{l} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{40} \leq \frac{b}{l} \leq \frac{1}{5}$$

Définition de la fibre moyenne.

La courbe (C) est appelée fibre moyenne, c'est l'ensemble des centres de gravité des sections droites.

Convention

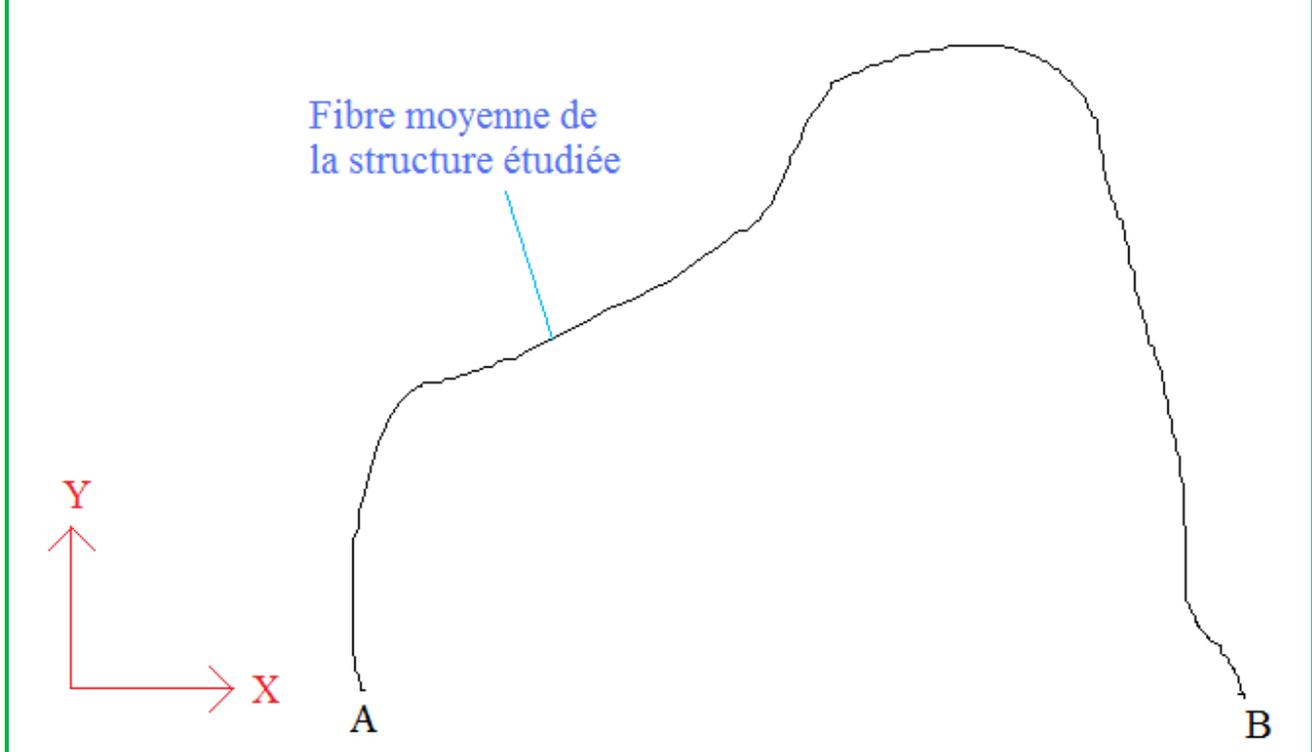
La poutre est représentée par sa fibre moyenne.

Définitions

Définition d'un repère global

Le repère global associé à une structure est le repère :

- Permettant d'identifier les coordonnées des points,
- Utilisé pour écrire les équations d'équilibre avec les forces extérieures et les réactions d'appuis

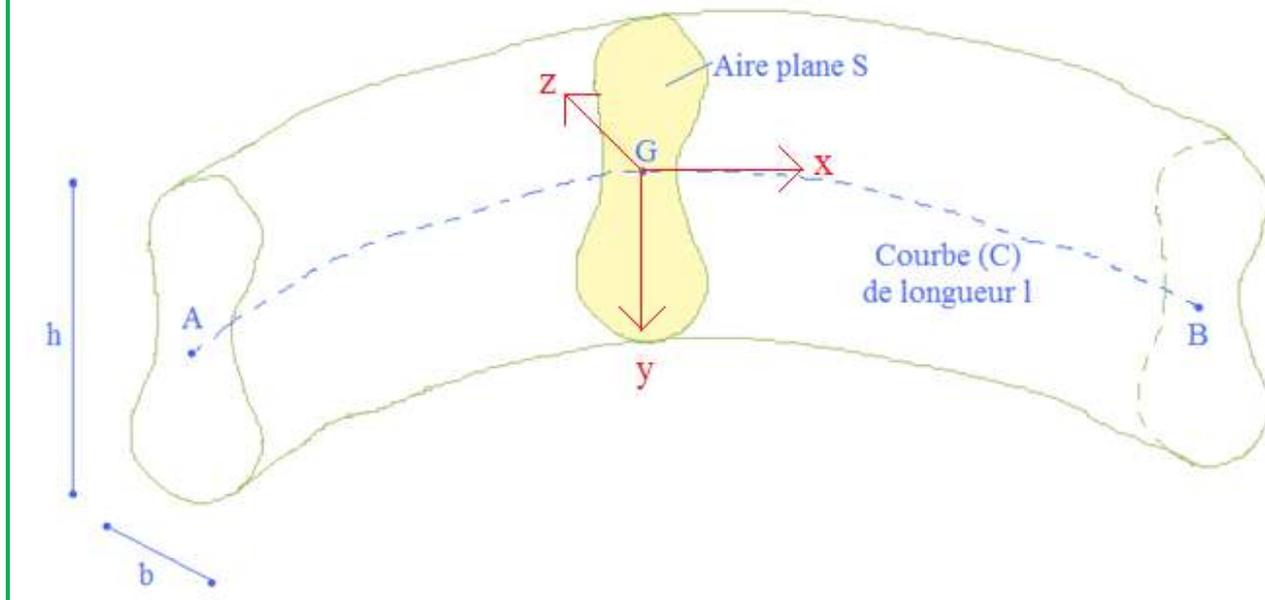
Convention :

Le repère global est noté avec des majuscules (afin de ne pas le confondre avec le repère local dont la définition est énoncée à la suite).

Définitions

Définition d'un repère local

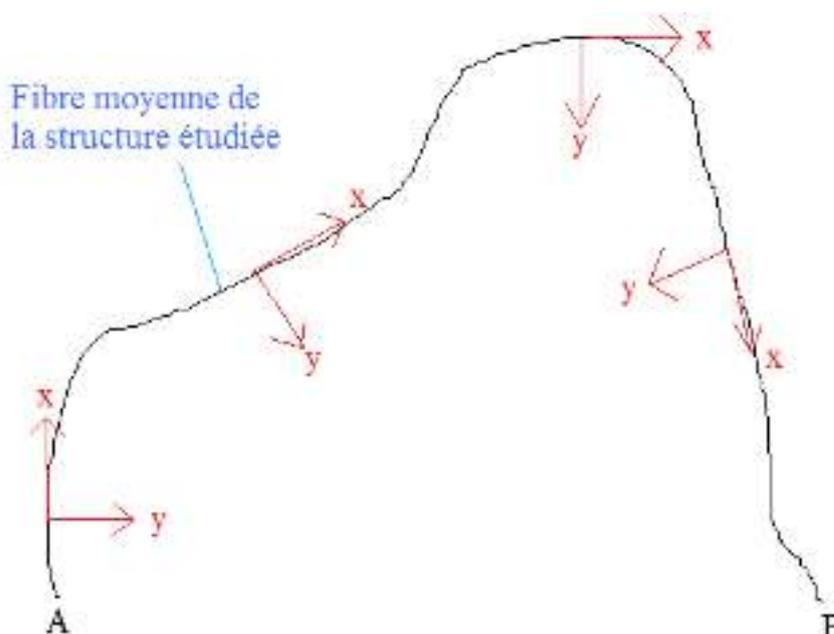
Le repère local associé à une section droite S a pour origine le centre de gravité G de la section droite, l'axe x est tangent à (C) et dans le sens défini par (C) .

Conventions :

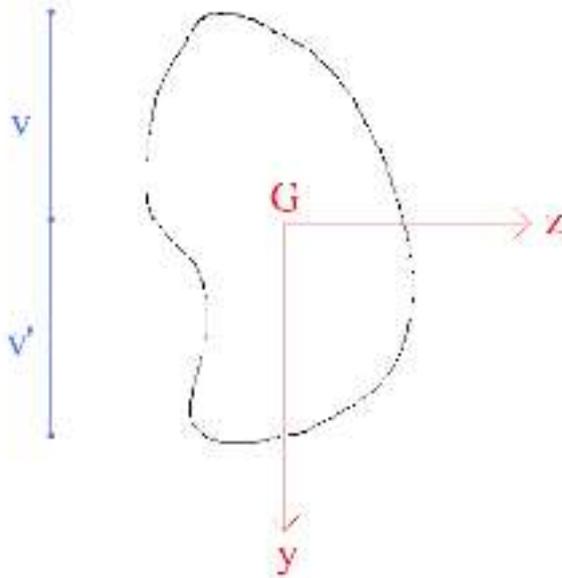
- L'axe x est dirigé selon la fibre moyenne.
- L'axe y est dirigé vers le bas de la section (dans le cas d'une poutre horizontale).
- Le repère (x,y,z) est direct
- Le repère local est noté avec des minuscules (afin de ne pas le confondre avec le repère global).

Représentations dans la structure

Les repères locaux dans la structure sont représentés de la manière suivante :



Définitions

Représentation dans une section droite

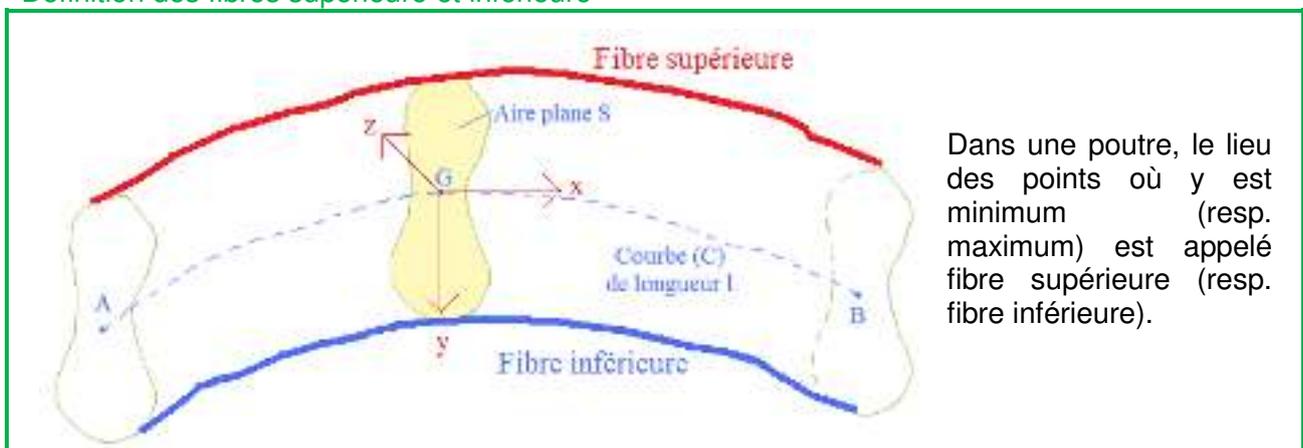
Lorsque l'on représente une section droite en plan, on la positionne tel que l'axe x vienne vers soi.

L'axe y , par convention est dirigé vers le bas, et l'axe z se déduit donc de l'axe y par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ (puisque le repère (x,y,z) est direct).

Remarque :

La fibre supérieure se situe à $y = -v$

La fibre inférieure se situe à $y = v'$

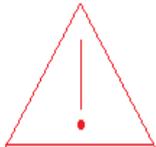
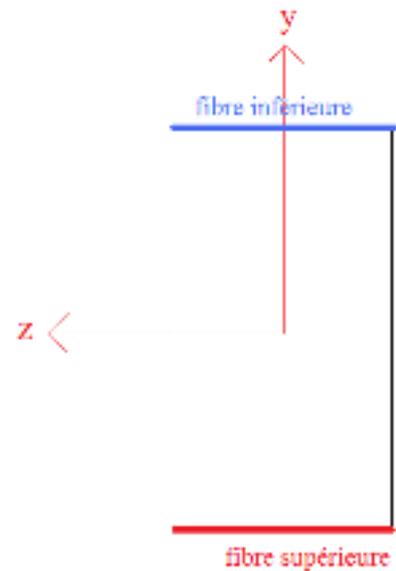
Définition des fibres supérieure et inférieure

Dans une poutre, le lieu des points où y est minimum (resp. maximum) est appelé fibre supérieure (resp. fibre inférieure).

Définitions

Remarque :

La fibre supérieure peut être située géographiquement en bas. Ainsi, d'après la définition, il est possible d'avoir la situation suivante :



Pour éviter de se tromper, il est donc fortement conseillé d'accepter la convention : « l'axe y est dirigé vers le bas de la section pour une poutre horizontale ».

Hypothèses du cours de RDM

3. Hypothèses du cours de R.D.M.

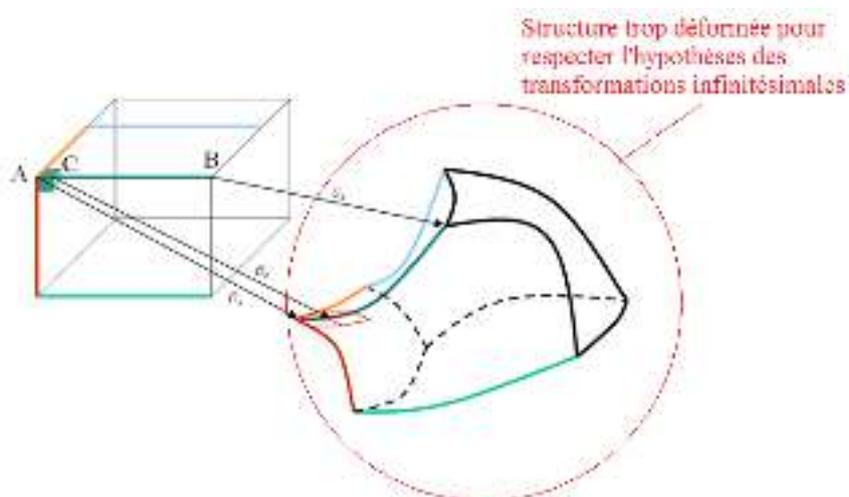
3.1 Hypothèses de M.M.C. reprise dans la suite du cours de R.D.M.

3.1.1 Hypothèse des transformations infinitésimales

Les matériaux et les structures utilisés en Génie Civil justifient l'hypothèse des transformations infinitésimales. :

- Petits déplacements
- Petites déformations

Par exemple, l'illustration suivante NE RESPECTE PAS l'hypothèse des transformations infinitésimales.



Des calculs sur de telles transformations ne sont pas l'objet de ce cours.

L'hypothèse des petites transformations de la M.M.C. est reprise. Ainsi, la principale conséquence est :

Les effets du second ordre sont négligés, c'est-à-dire que les moments ou actions supplémentaires résultant d'un déplacement de la structure sont négligés.

Hypothèses du cours de RDM

Exemple :

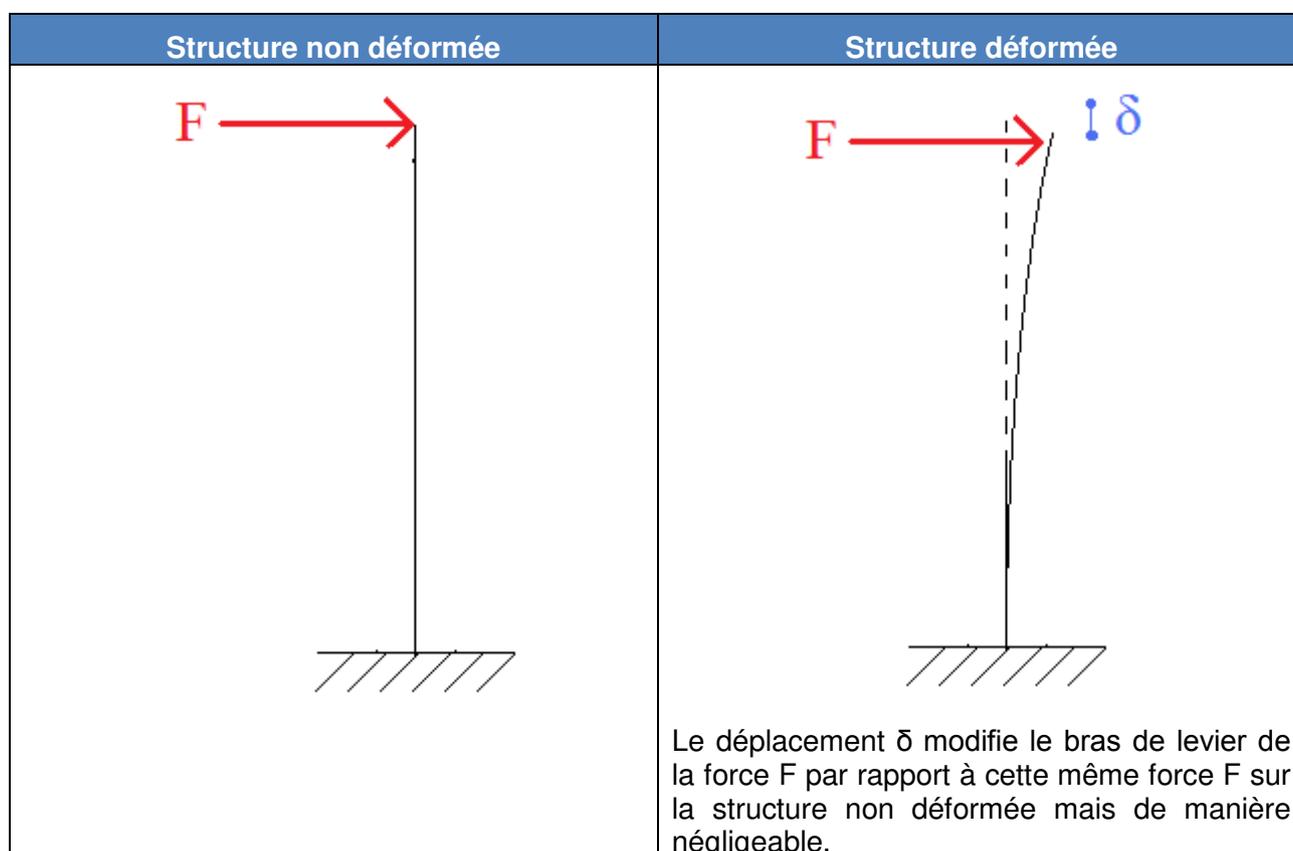
En toute rigueur, il devrait être nécessaire de calculer l'effet de la force F sur la structure.

Celle-ci impliquerait un déplacement δ . Ainsi le moment dû à cette force F devrait être recalculé avec le nouveau bras de levier.

Il serait obtenu un nouveau déplacement,

Les itérations seraient arrêtées lorsqu'il y a convergence entre la déformée calculée et la déformée prise en compte.

Néanmoins, en pratique ces itérations ne pas calculées : on dit que les effets dits du second ordre sont négligés (car δ très petits \leftrightarrow hypothèses des petits déplacements). Une illustration de la faible influence du déplacement est :



Hypothèses du cours de RDM

3.1.2 Hypothèses sur la loi de comportement

La loi de comportement est une loi :

- Élastique
- Linéaire
- Homogène
- Isotrope

Remarque : une loi de type Hooke est utilisée dans le cadre de ce cours.

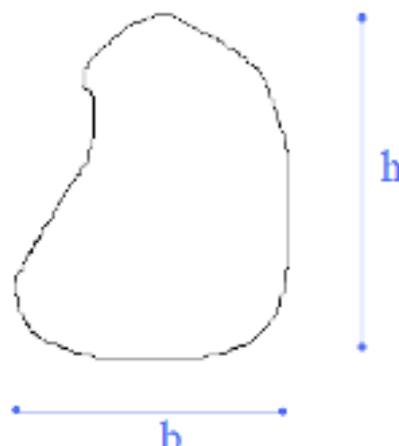
3.2 Domaine de validité de la théorie des poutres

1. Les dimensions transversales doivent être petites par rapport aux dimensions

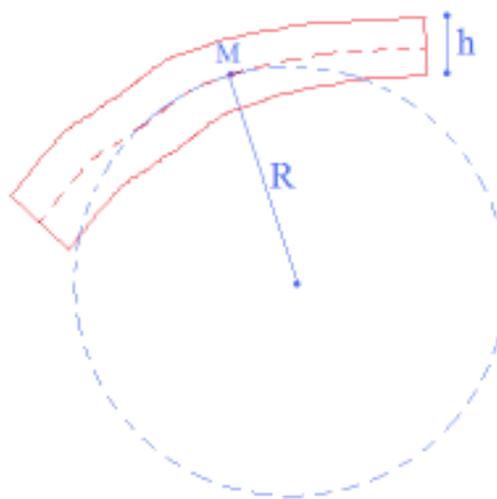
longitudinales. $\frac{1}{40} < \frac{h}{l} < \frac{1}{5}$



2. La section doit être suffisamment massive.
 $b < h < 10b$



3. Pas de variation brusque de courbure R supérieur à 5h



4. Pas de variation brusque de dimensions transversales : $h_1 \approx h_2$.

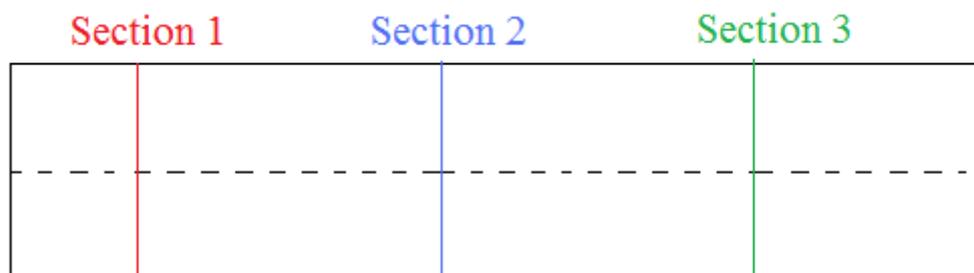


Hypothèses du cours de RDM

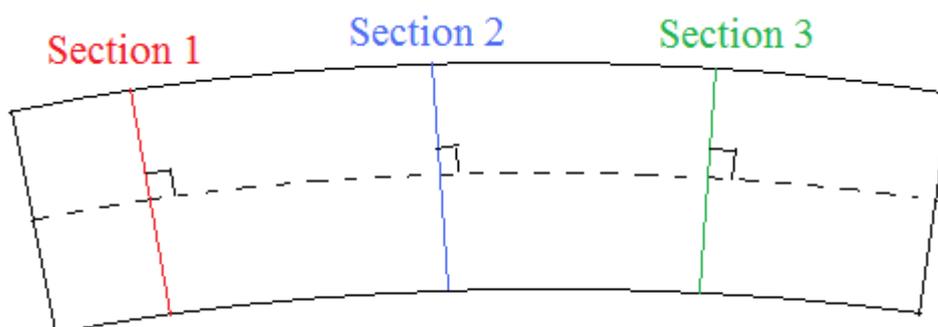
3.3 Principe de NAVIER BERNOULLIÉnoncé du principe de Navier Bernoulli

Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne.

Etat initial :



Etat déformé :

Énoncé du principe généralisé

Deux sections droites infiniment voisines, restent, après déformations, infiniment voisines et superposables par simple déplacement

Conséquences

Les déformations longitudinales en un point M de coordonnée (y, z) dans une section droite, peuvent être approchées par une fonction linéaire des variables y et z :

$$\varepsilon = a + by + cz$$

- ε est la déformation
- a , b et c sont des « constantes » qui dépendent de x (position de la section droite considérée).

3.3.1 Principe de Saint VenantDéfinition d'une singularité

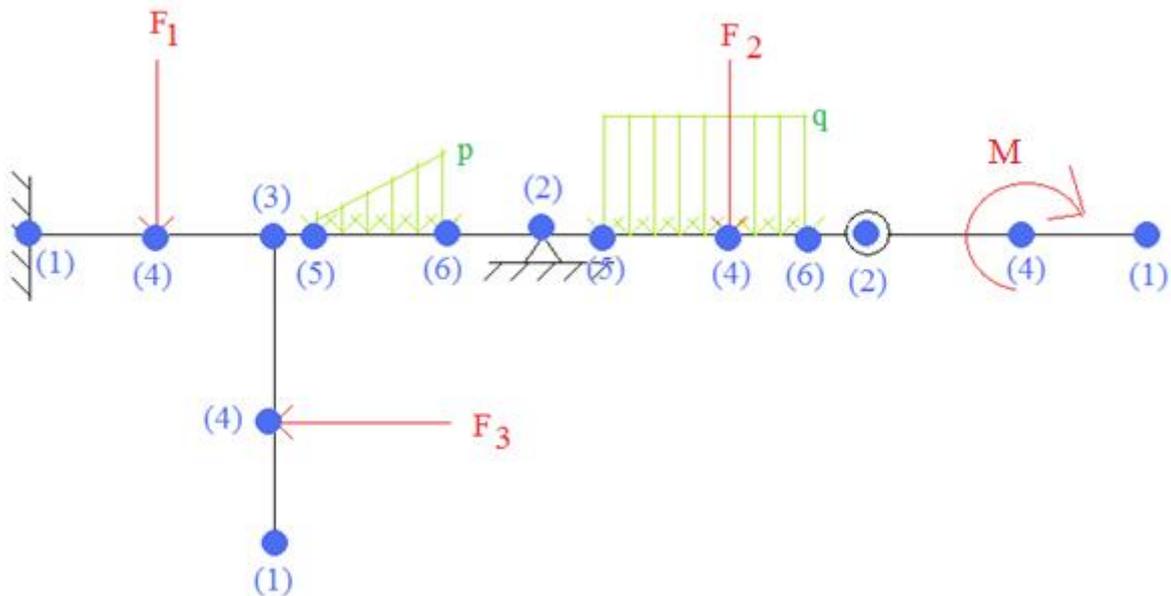
Une singularité de la structure ou du chargement est :

- Une extrémité de la structure (avec ou sans liaison) (1)
- Une liaison intérieure ou extérieure (2)

Hypothèses du cours de RDM

- Un changement de poutre (3)
- Une force ponctuelle (ou un moment ponctuel) (4)
- Un début de charge répartie (en force ou en moment) (5)
- Une fin de charge répartie (en force ou en moment) (6)

Exemple de singularités :



● singularité

Enoncé du principe de Saint Venant

Les contraintes (et par suite les déformations) dans une section droite, éloignée des points d'application des efforts extérieurs et des singularités, ne dépendent que de la résultante et du moment résultant des efforts appliqués à l'une des deux parties séparées par la section droite envisagée.

3.4 Hypothèse sur l'effort tranchant

Hypothèse abordée dans la deuxième partie du cours.

Calculs des réactions d'appuis

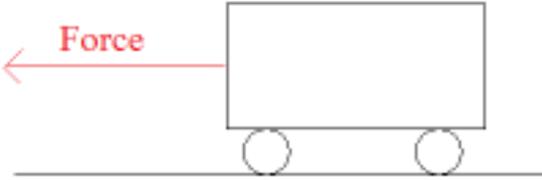
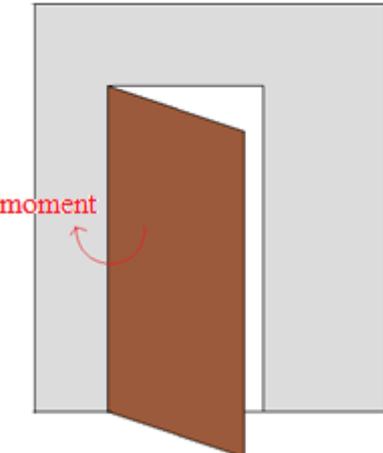
4. Calculs des réactions d'appuis

4.1 Modélisation des actions mécaniques

Définition des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont la cause de toute modification du mouvement ou du repos d'un corps.

On distingue dans les actions mécaniques, celles qui communiquent un mouvement de translation (les forces) et celles qui communiquent un mouvement de rotation (les moments).

Exemple de force	Exemple de moment
	

4.2 Notion de moment

Définition du moment

Le moment vectoriel d'une force \vec{F} appliquée en A par rapport à un point B est défini par :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}.$$

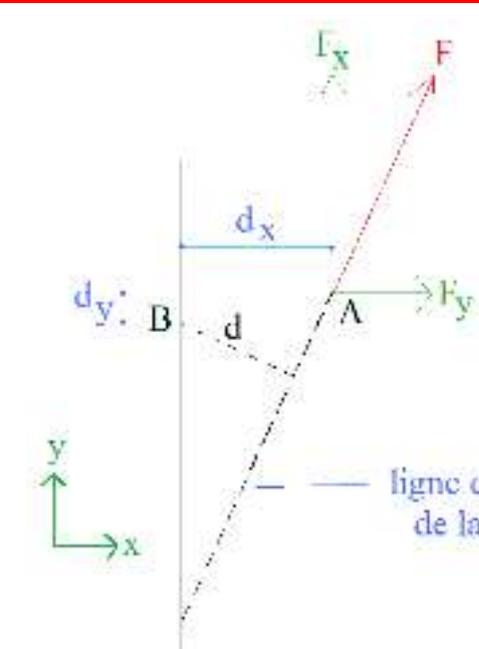
Un moment \vec{M} est caractérisé par un vecteur et un point d'application.

L'intensité d'un moment est la norme du vecteur associé.

L'axe de rotation est l'axe du vecteur.

La composante d'un moment sur son axe sera positive si la rotation est trigonométrique, négative dans le cas contraire ; les composantes sur les autres axes sont nulles.

Calculs des réactions d'appuis

Propriétés du moment dans un problème plan


Considérons l'axe Δ de vecteur unitaire \vec{z} perpendiculaire aux vecteurs \overline{BA} et \vec{F}

d est la distance entre la ligne d'action de \vec{F} et l'axe Δ est appelé **bras de levier**.

On peut calculer le moment au niveau du point B de la force F autour de l'axe Δ de trois façons :

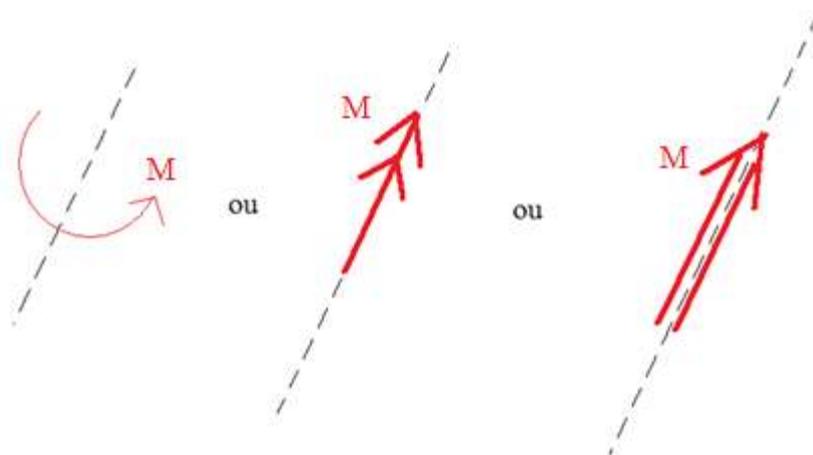
- Par le bras de levier :
 $M_B(\vec{F}) = \pm Fd$
- Par la décomposition de la force :
 $M_B(\vec{F}) = \pm F_x d_y \pm F_y d_x$
- Par le calcul vectoriel

Convention

Le signe est positif si la force tend à engendrer une rotation dans le sens trigonométrique par rapport au vecteur unitaire \vec{k} , négatif dans le cas contraire.

Représentation d'un moment

On utilise couramment une flèche courbe ou d'autres symboles pour représenter un moment



Abus de langage utilisé : Par abus de langage, en génie civil, on parle uniquement de moment. Contrairement en mécanique, le mot « couple » n'est pas (ou plus) utilisé.

Calculs des réactions d'appuis

4.3 Action - réaction**Principe d'action-réaction**

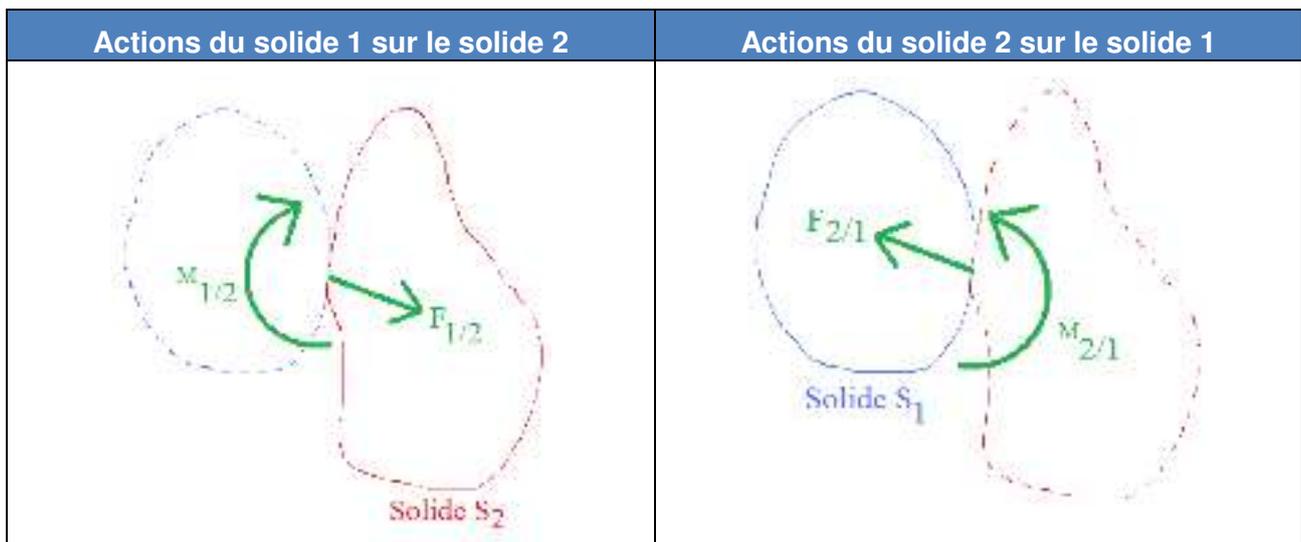
Lorsque deux solides S_1 et S_2 sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre des actions de contact. Les actions de S_1 sur S_2 ont les mêmes directions et intensité, mais sont de sens contraire par rapport aux actions de S_2 sur S_1 .

Exemple : dans le cas où le contact entre deux solides S_1 et S_2 permet la transmission d'une force et d'un moment, nous avons : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{M}_{1/2} = -\vec{M}_{2/1}$

Ou en conformité avec l'approche de ce cours, il vient qu'à chaque coupure, la somme en, force et en moment, est nulle :

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

$$\vec{M}_{1/2} + \vec{M}_{2/1} = 0$$

**4.4 Torseurs**

Une action mécanique peut s'exprimer à l'aide d'un torseur (appelé torseur statique).

Définition du torseur

Le torseur est défini par un vecteur force, un vecteur moment et un point de réduction autour duquel on calcule le moment vectoriel.

Exemple 1 : torseur d'une force ponctuelle F réduit au point A :

$${}_A \{T\} = \left\{ \vec{F} \quad \vec{M}_A(\vec{F}) \right\}$$

Dans les problèmes plans : ${}_A \{T\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & M_A(\vec{F}) \end{array} \right\}$

Calculs des réactions d'appuis

Exemple 2 : torseur d'un moment ponctuel M réduit au point A :

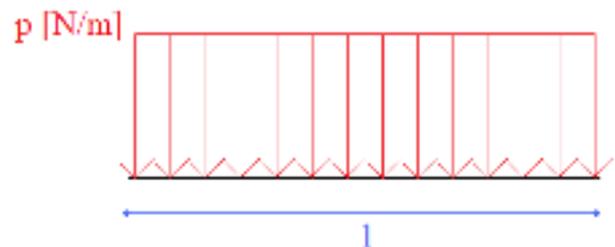
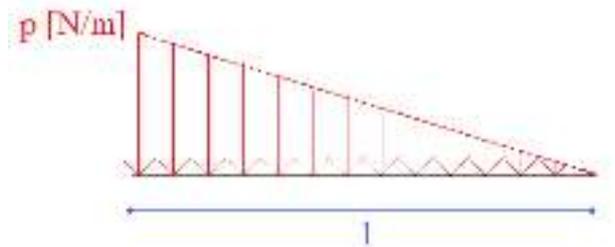
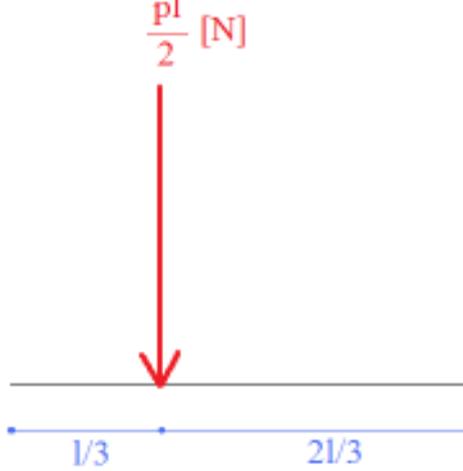
$${}_A \{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M} \end{array} \right\}$$

Dans les problèmes plans : ${}_A \{T\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M \end{array} \right\}$

4.5 Force globalement équivalente à une force répartie

Propriété

Une force globalement équivalente à une force répartie est une force ponctuelle égale à la résultante des forces répartie, dont le moment par rapport à un point est le même que celui des forces réparties.

Force répartie	Force globalement équivalente
	
	



Le tableau précédent est à connaître par cœur !! Car il est très souvent utilisé pour résoudre des problèmes de RDM.

Néanmoins, il est facile de retrouver ces résultats puisque la force ponctuelle est égale à la surface considérée et est située au niveau du centre de gravité (rectangle de longueur l et de largeur p ou triangle de base p et de longueur l)

Calculs des réactions d'appuis

4.6 Liaisons

Définition des liaisons internes et externes

Les liaisons peuvent être des liaisons entre poutres ou bien entre une poutre et l'extérieur ; elles seront dénommées respectivement liaisons internes et liaisons externes.

Notation

L'extérieur sera noté par le symbole : 

Définition d'une étude cinématique

Une étude cinématique est l'étude d'une liaison entre deux solides S_1 et S_2 en étudiant les mouvements possibles entre ces deux solides.

Remarque :

Il s'agit bien de mouvements possibles et non réels, étant entendu qu'en génie civil, peu de solides sont en mouvement par rapport à d'autres.

Propriété

Lorsqu'un degré de liberté est bloqué par la liaison, il existe nécessairement une action mécanique appelée action ou effort de liaison dans la direction du degré de liberté bloqué.

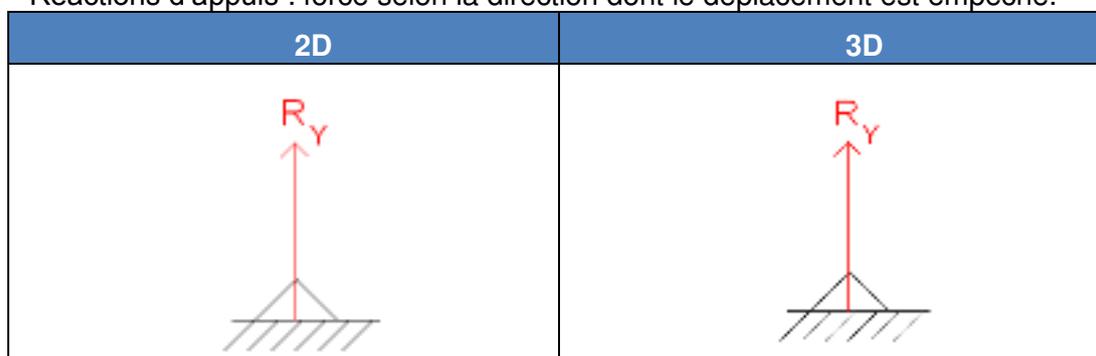
Remarque : Les symboles présentés suivants ne sont pas normalisés mais couramment rencontrés.

Calculs des réactions d'appuis

4.6.1 Appui simple

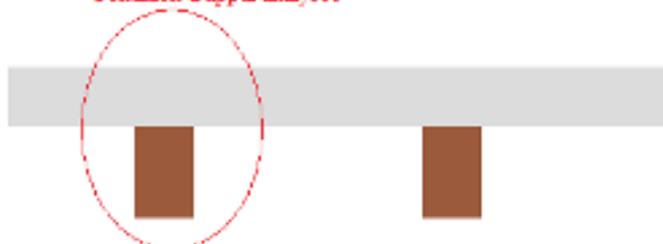
Cinématique : une translation (axe x ou y) et une rotation autorisée.

⇒ Réactions d'appuis : force selon la direction dont le déplacement est empêché.



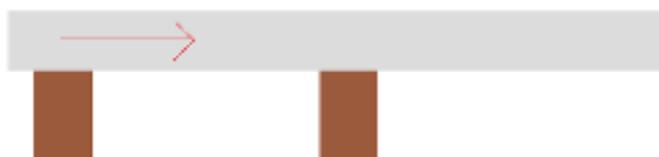
Exemple d'appui simple 2D : poutre (en gris) sur deux appuis (en marron)

Condition d'appui analysée

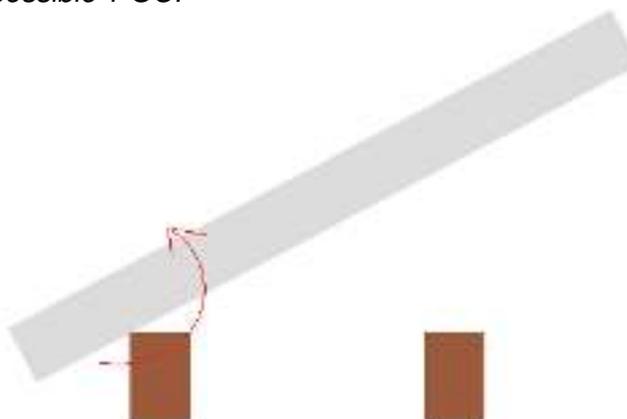


Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? OUI



- Le déplacement vertical est-il possible ? NON pas dans le sens haut vers le bas qui est le sens qui nous intéresse en génie civil. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI

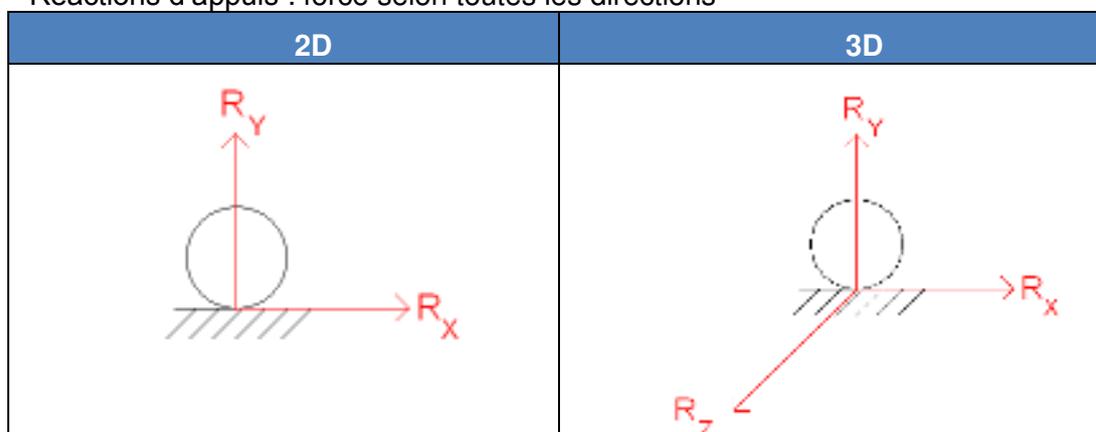


Calculs des réactions d'appuis

4.6.2 Articulation

Cinématique : une rotation autorisée.

⇒ Réactions d'appuis : force selon toutes les directions

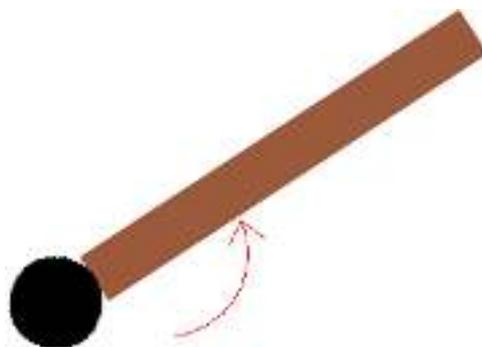


Exemple d'une rotule: porte (en marron) rotulée par un gond (en noir)



Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI



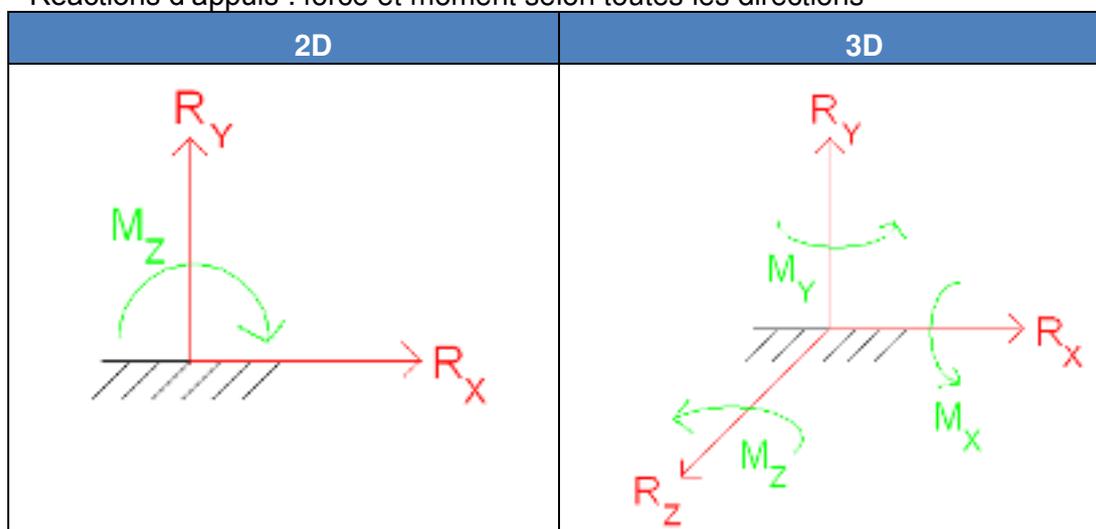
Remarque : l'exemple précédent est une rotule 2D au sens génie civil. Il ne s'agit pas d'une rotule 3D au sens des mécaniciens (le pivot glissant n'est pas utilisé en génie civil).

Calculs des réactions d'appuis

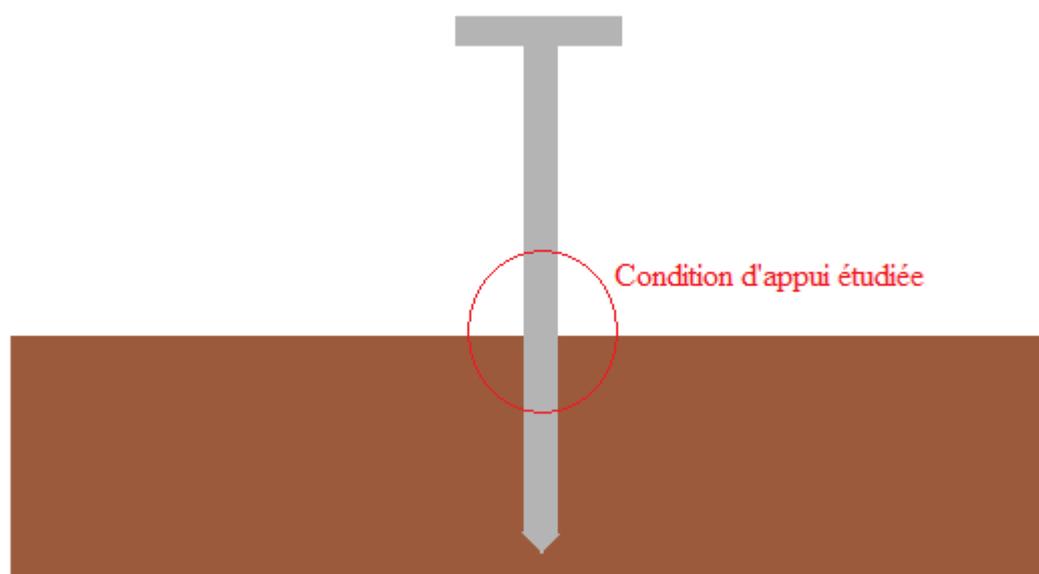
4.6.3 Encastrement

Cinématique : aucun mouvement possible.

⇒ Réactions d'appuis : force et moment selon toutes les directions



Exemple d'un encastrement : clou (en gris) planté dans une planche (en marron)



Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appuis en moment.

Calculs des réactions d'appuis

4.6.4 Liaisons parfaites – liaisons non parfaites

Définition d'une Liaison parfaite

Une liaison est dite parfaite si dans toute cinématique compatible avec la liaison, le travail des actions de liaison est nul.

Remarque : Les trois liaisons types précédemment définies sont des liaisons parfaites.

Définition d'une Liaison non parfaite

Une liaison non parfaite est une liaison qui n'est pas parfaite.

Exemple de liaison non parfaite :



Dans ce cas, la liaison autorise un mouvement relatif vertical, mais fait également apparaître un effort de liaison vertical (due à la raideur du ressort modélisé).

Remarque :

Ces liaisons, parfois utilisées en génie civil (calculs sismiques par exemple), sortent du cadre de ce cours.

4.6.5 Liaisons réelles

Un des problèmes majeurs de l'ingénieur structures est de modéliser un problème réel, notamment au niveau des liaisons.

Le choix de la modélisation doit être aussi proche que possible du comportement réel de la liaison, compte tenu de sa réalisation technique.



Néanmoins, il convient de choisir les liaisons dans la modélisation qui sont dans le sens de la sécurité !

4.7 Problème plan

Définition d'un problème plan

On appelle problème plan, un problème modélisé par une structure plane à plan moyen, avec des liaisons planes et chargée dans ce plan.

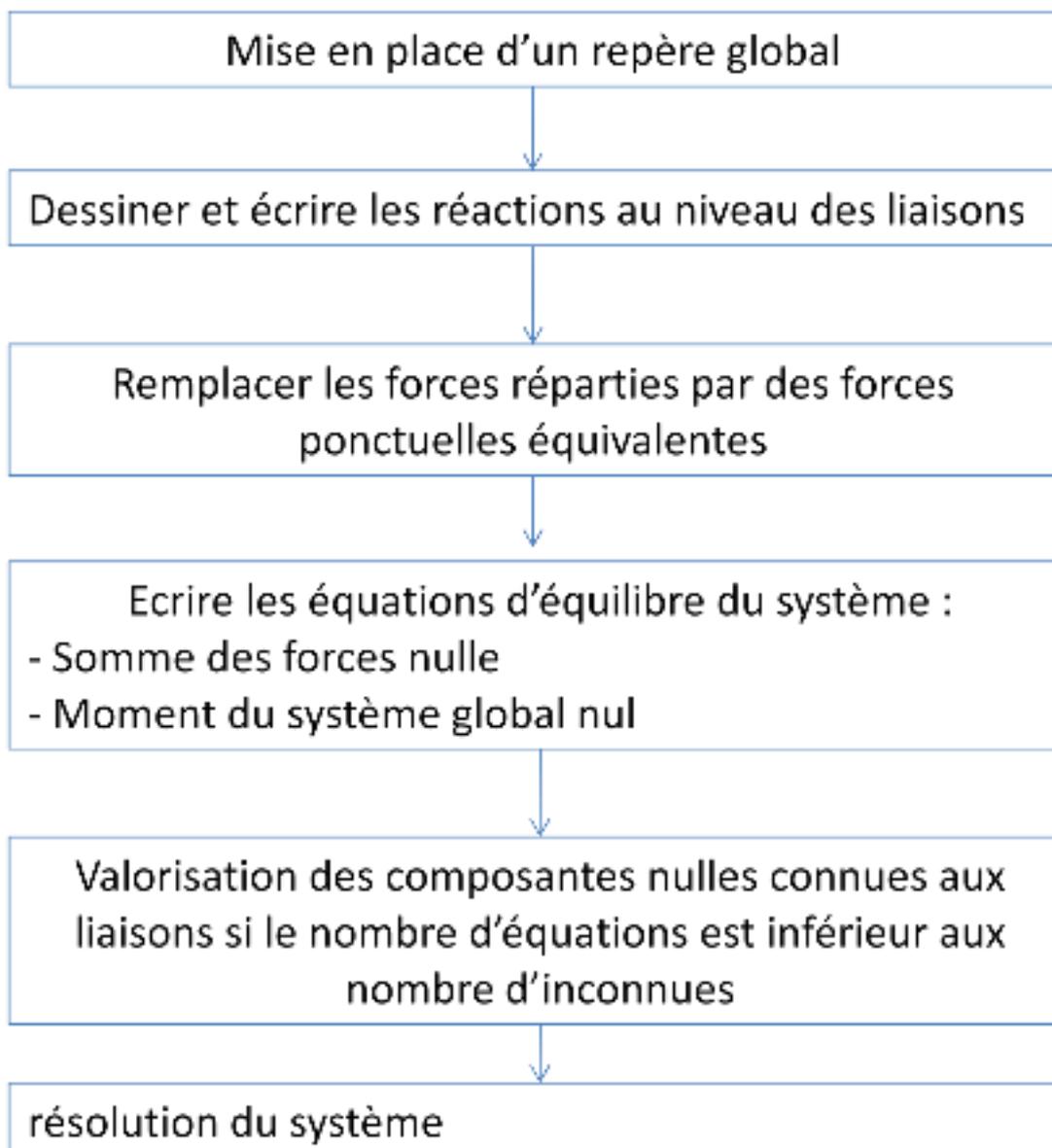
Conséquence

Un chargement dans un plan signifie que les forces n'ont pas de composantes sur l'axe Z et que les moments n'ont pas de composantes sur les axes X et Y.

Remarque :

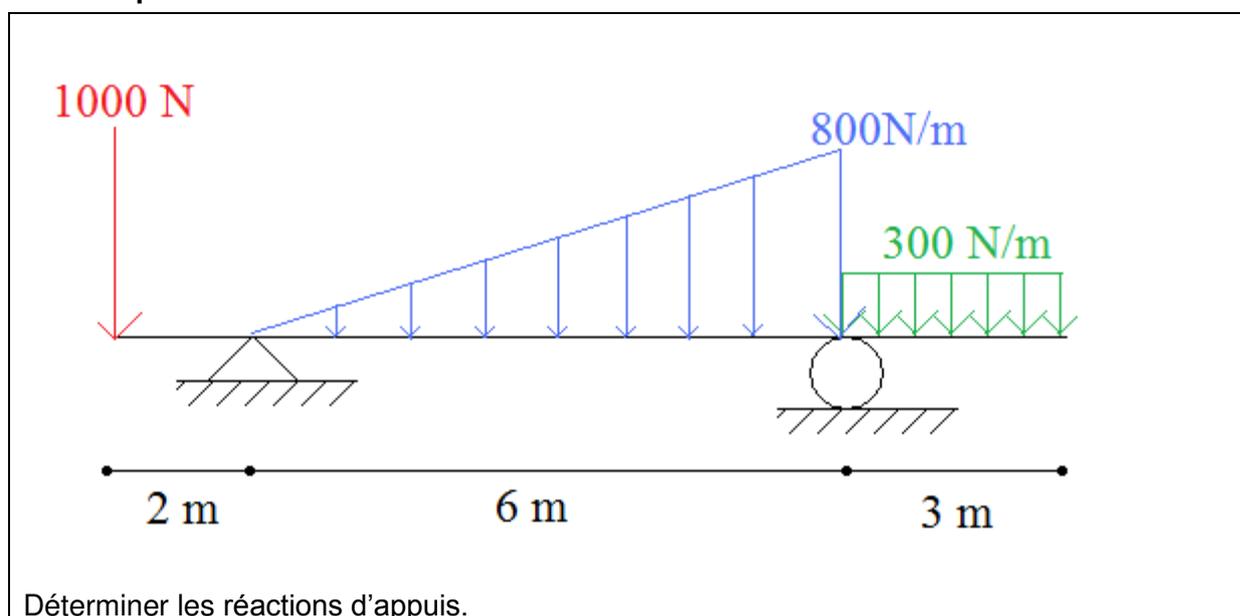
- l'axe z des repères locaux (G,x,y,z) ne coïncide pas nécessairement avec l'axe Z du repère global.
- De nombreux problèmes de génie civil sont définis dans un plan ; la modélisation correspondante pourra donc se faire dans un plan (O,X,Y).

Calculs des réactions d'appuis

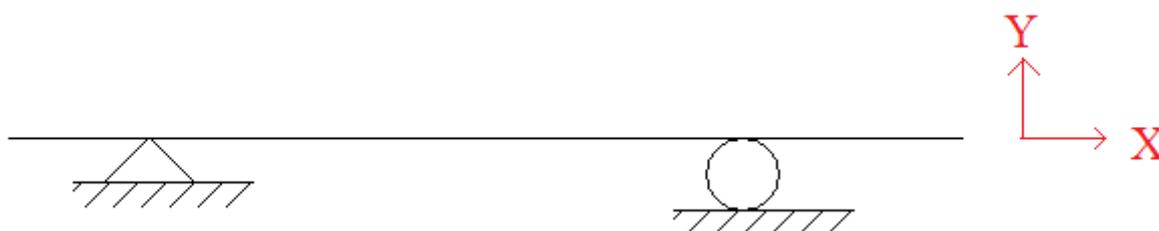
4.8 Méthode**4.8.1 Logigramme**

Calculs des réactions d'appuis

4.8.2 Exemple



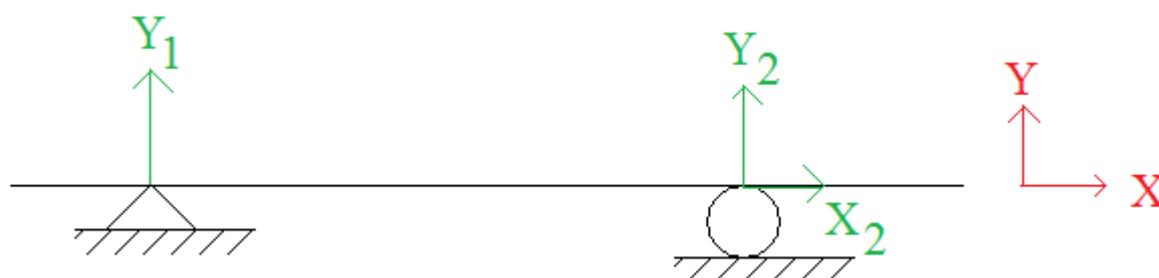
Mise en place d'un repère global



Dessiner et écrire les réactions d'appuis

Au niveau de l'appui simple, il n'existe qu'une seule réaction verticale en force.

Au niveau de la rotule, il existe une réaction verticale et une réaction horizontale.



Calculs des réactions d'appuis

Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentesCharge répartie rectangulaire :

Elle vaut 300N/m et sollicite 3 m, donc la charge ponctuelle vaut : $300 \times 3 = 900 \text{ N}$

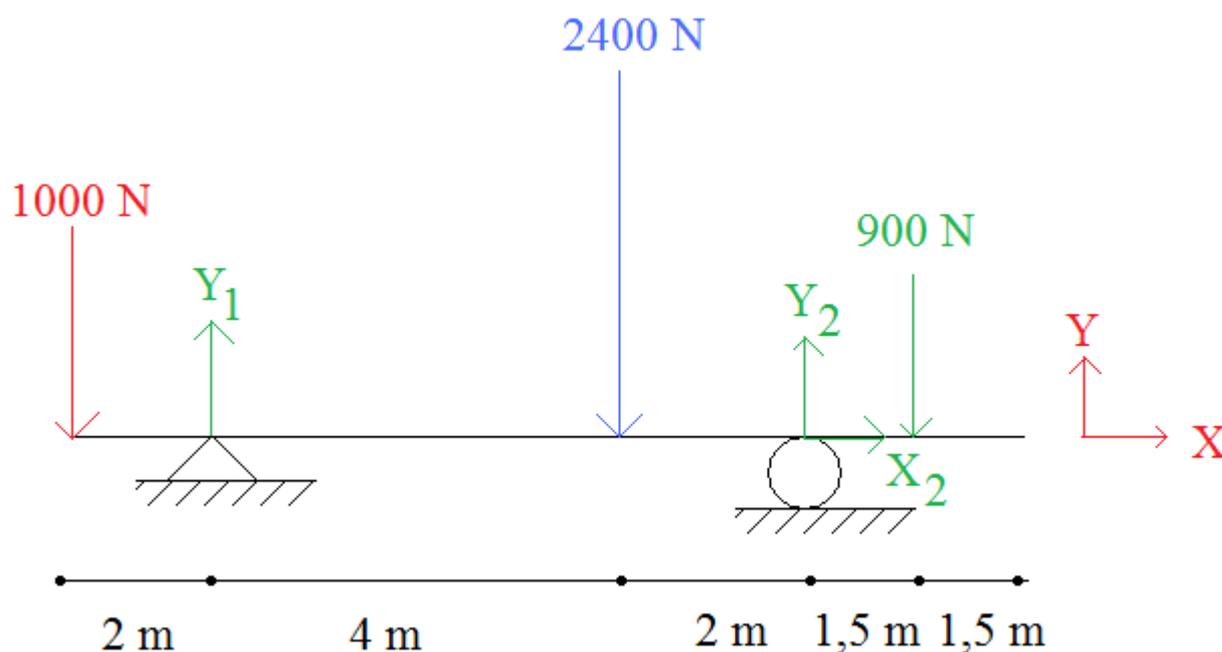
La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au centre du rectangle et donc à 1,5 m à droite de l'appui rotule.

Charge répartie triangulaire :

Elle vaut au maximum 800N/m et sollicite 6 m, donc la charge ponctuelle vaut : $800 \times \frac{6}{2} = 2400 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au $\frac{2}{3}$ de la pointe du du triangle : à 4 m à droite de l'appui simple (et donc à 2 m à gauche de l'appui rotule).

Remarque : il ne faut pas oublier les charges qui sont déjà ponctuelles.

**Ecrire les équations d'équilibre du système**

Somme des forces horizontales nulles : $X_2 = 0$

Somme des forces verticales nulles : $Y_1 + Y_2 - 1000 - 2400 - 900 = 0$

$$\Leftrightarrow Y_1 + Y_2 - 4300 = 0$$

Calculs des réactions d'appuis

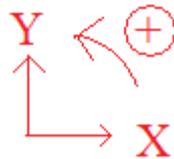
Valorisation des composantes nulles connues au niveau des liaisons

Il y a 3 inconnues et 2 équations. Cette étape est donc obligatoire pour résoudre le système.

Pour éliminer Y_1 de cette équation, le moment global au niveau de l'appui 1 est calculé. Le moment global (en tenant compte de la partie droite et la partie gauche) au niveau de cet appui est nul.

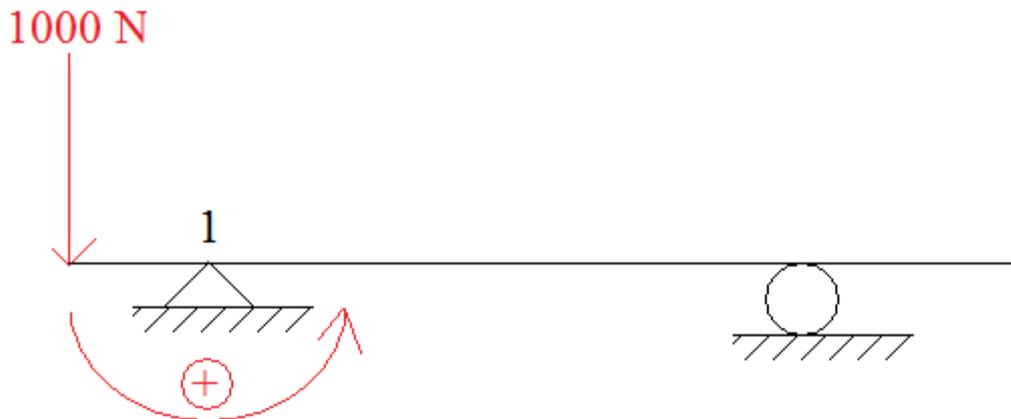
Rappel :

- le moment en valeur absolue vaut la force multipliée par le bras de levier.
 - Le signe est fonction du sens dans lequel fait tourner la force considérée
- Le signe positif est dans le sens suivant :



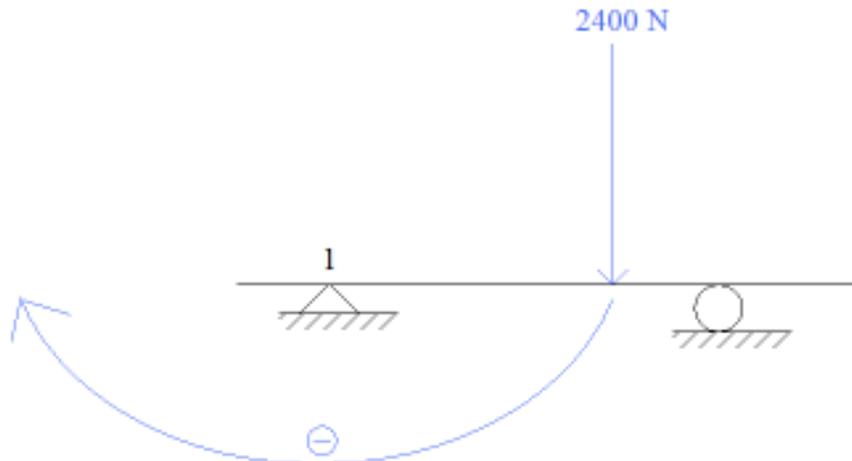
Exemple :

La force de 1000 N fait tourner dans le sens positif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 2 m.



La force de 2400 N fait tourner dans le sens négatif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 4 m.

Calculs des réactions d'appuis



En procédant de même pour les autres forces, on obtient :

$$1000 \times 2 - 2400 \times 4 + Y_2 \times 6 - 900 \times (6 + 1,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y_2 \approx 2392 \text{ N}$$

Remarque :

Il aurait tout à fait été possible de prendre en compte que le moment était nul au niveau de l'appui rotule. Ou encore au niveau des deux extrémités libres. Le résultat final aurait été (heureusement...) identique.

Résolution du système

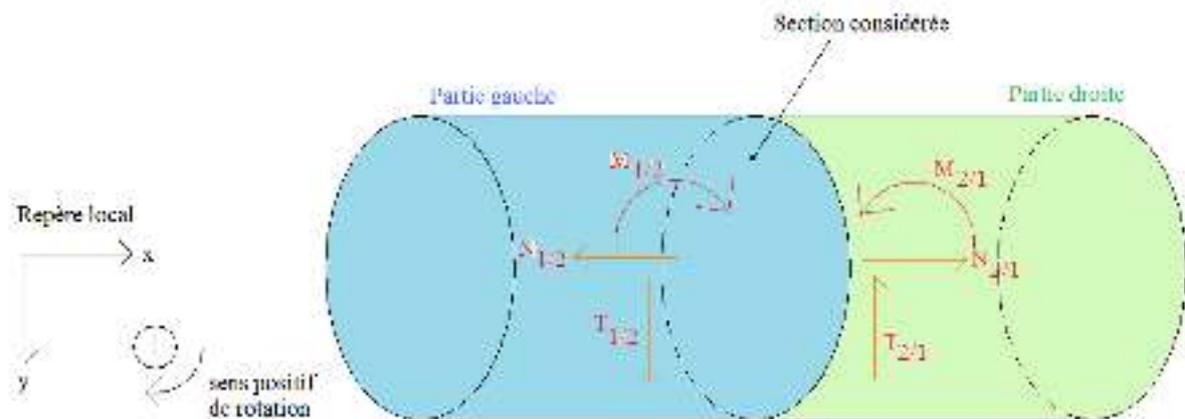
$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 - 4300 = 0 \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Y_1 \approx 1908 \text{ N} \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \text{ N} \end{cases}}$$

Calculs des diagrammes de sollicitations

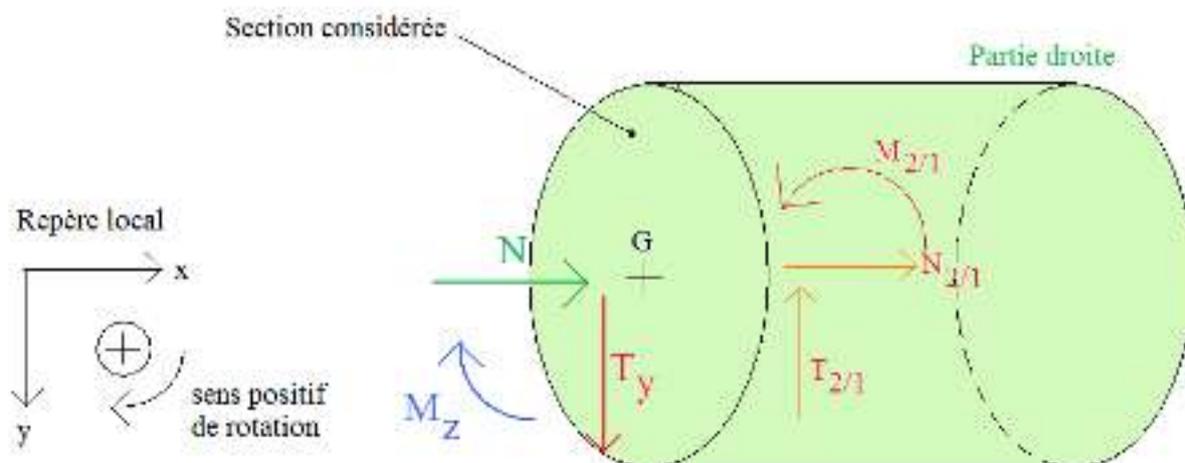
5. Calculs des diagrammes de sollicitations par la méthode des coupures**5.1 Applications du principe de Saint Venant**

Pour une section donnée, il y a équilibre des forces et des moments entre la partie droite et la partie gauche d'une section considérée.

**5.1.1 Conservation de la partie droite**Définition du torseur de cohésion « par les forces de gauche »

Le torseur de cohésion dans une section droite est le torseur des efforts appliqués à gauche de cette section réduit au centre de gravité G de la section : ${}_G \{T_g\}$.

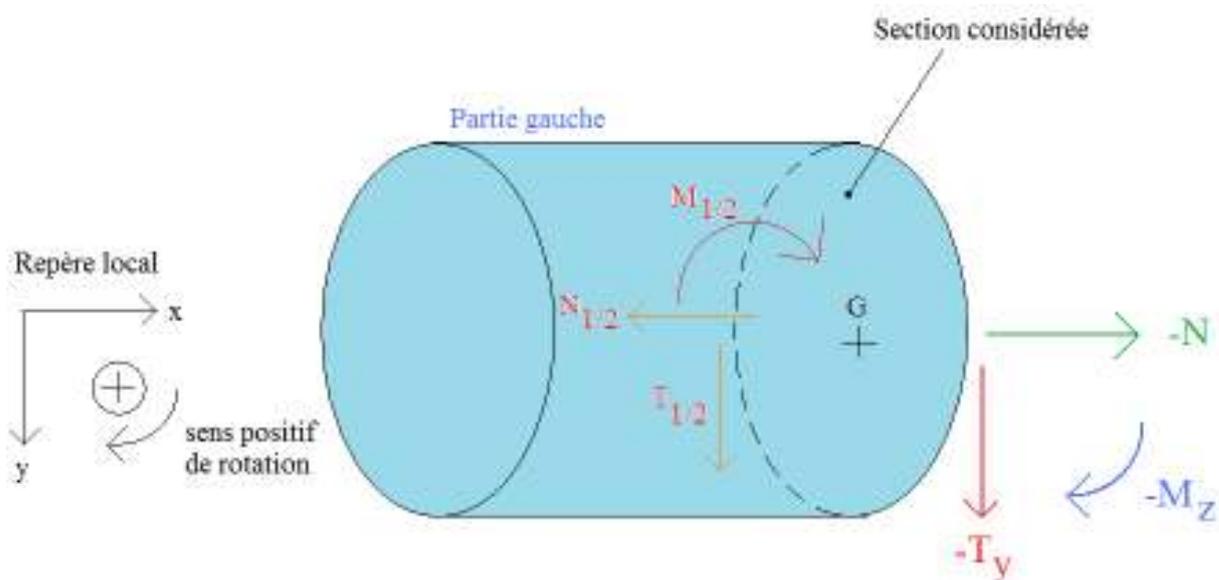
La conservation de la partie droite est :

**5.1.2 Conservation de la partie gauche**Définition du torseur de cohésion « par les forces de droite »

Le torseur de cohésion dans une section droite est l'opposé du torseur des efforts appliqués à droite de cette section réduit au centre de gravité G de la section : $-{}_G \{T_d\}$.

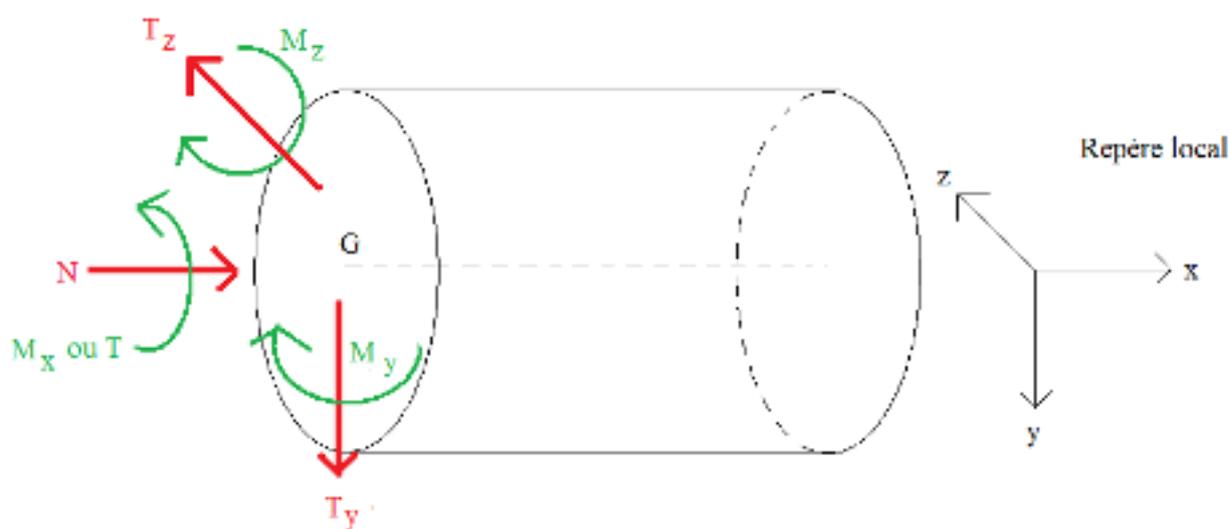
Calculs des diagrammes de sollicitations

La conservation de la partie gauche est :



5.2 Cas général : modélisation 3D

Exemple avec une partie droite conservée :



Avec :	N	Effort normal.
	T_y	Effort tranchant selon y.
	T_z	Effort tranchant selon z.
	M_x (ou T)	Moment de torsion.
	M_y	Moment fléchissant selon l'axe y.
	M_z	Moment fléchissant selon l'axe z.

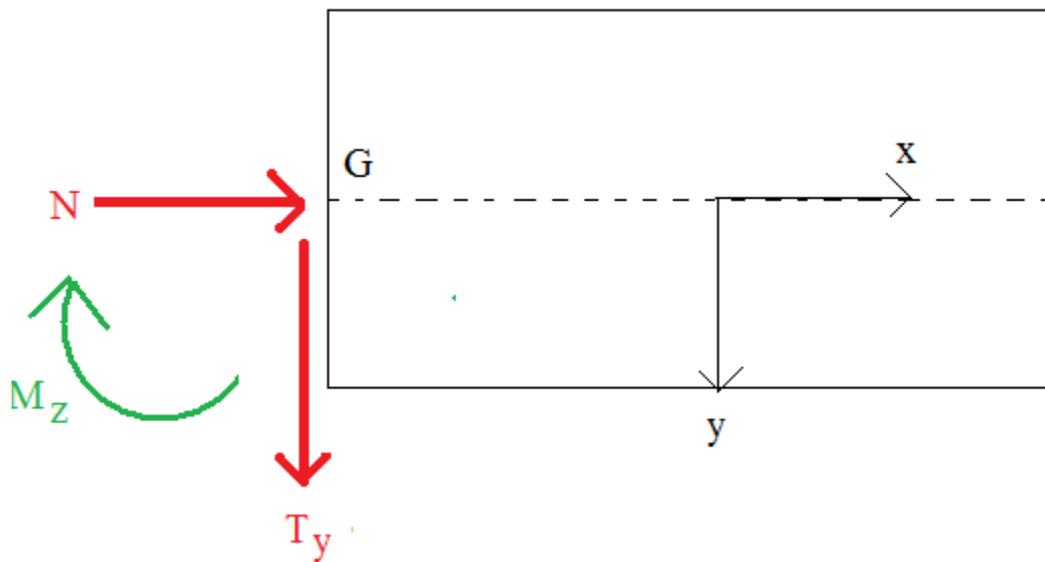
Dans le repère local, les éléments de réductions du tenseur de cohésion s'écrit :

Calculs des diagrammes de sollicitations

$${}_G\{T_G\} = \begin{Bmatrix} N & T \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}$$

5.3 Problème plan : modélisation 2D

Exemple avec une partie droite conservée :



Avec N : Effort normal.

T_y : Effort tranchant (selon y).

M_z : Moment fléchissant (selon l'axe z).

Dans le repère local, les éléments de réductions du torseur de cohésion s'écrit :

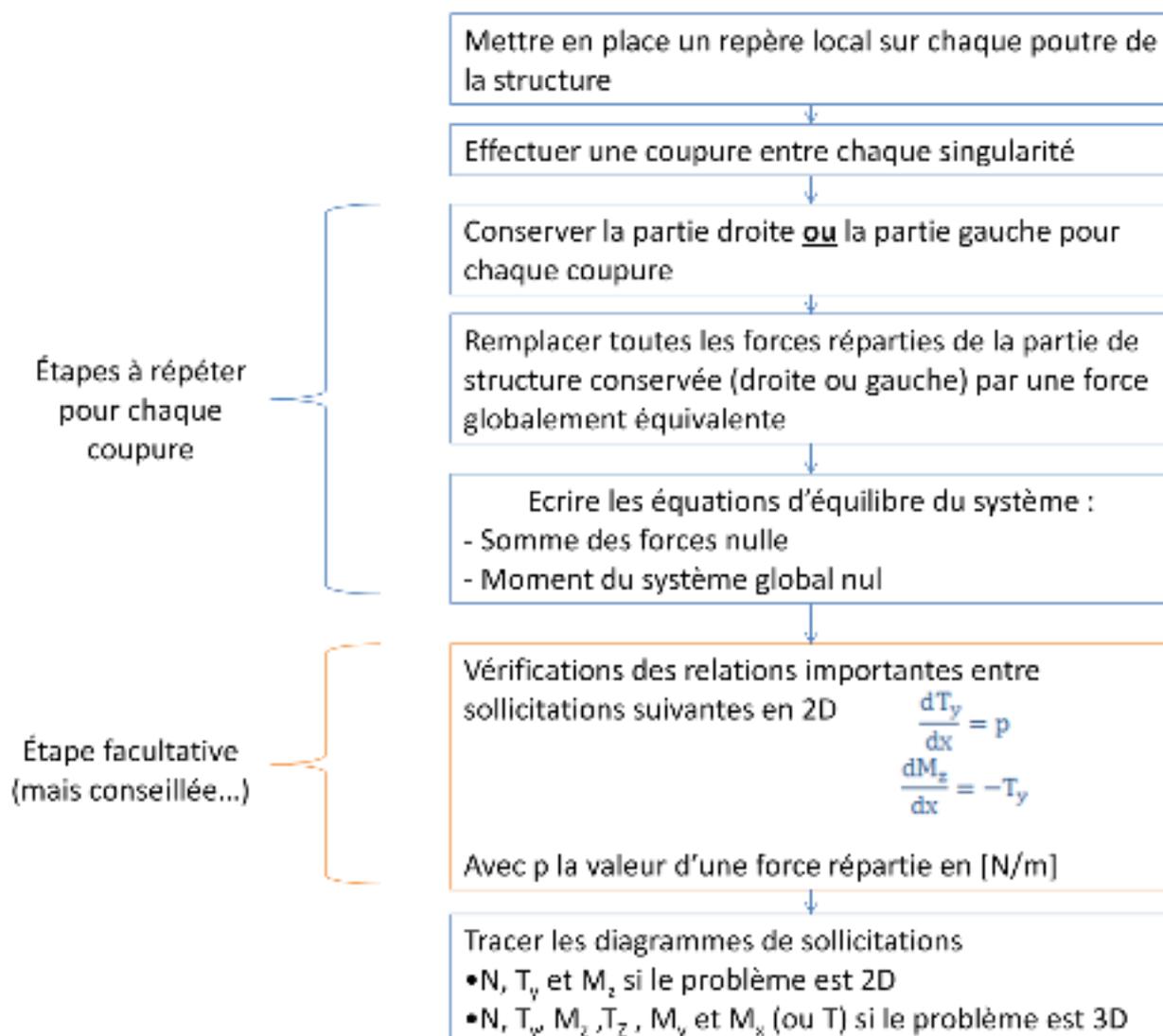
$${}_G\{T_G\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$$

Calculs des diagrammes de sollicitations

5.4 Méthode**5.4.1 Logigramme**

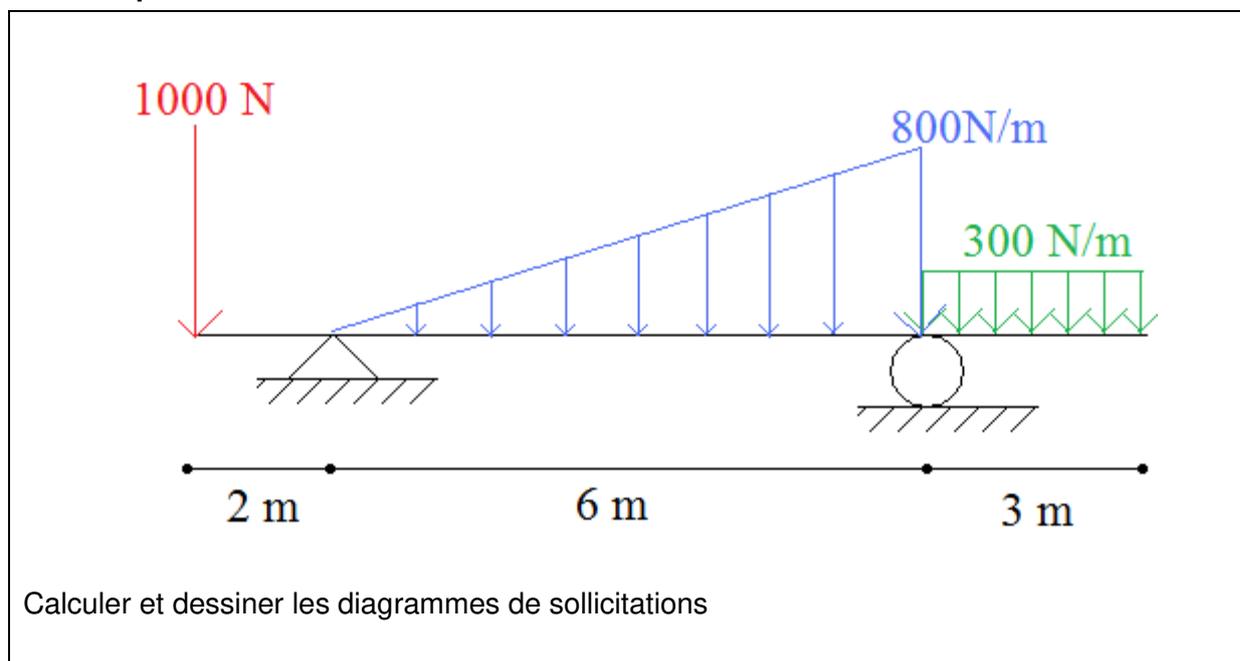
Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.

Remarque : cette étape peut être évitée uniquement dans le cas où le diagramme de sollicitation est souhaité pour une barre d'extrémité libre puisqu'il suffit de conserver après coupure la partie de structure ne comprenant pas d'appuis.

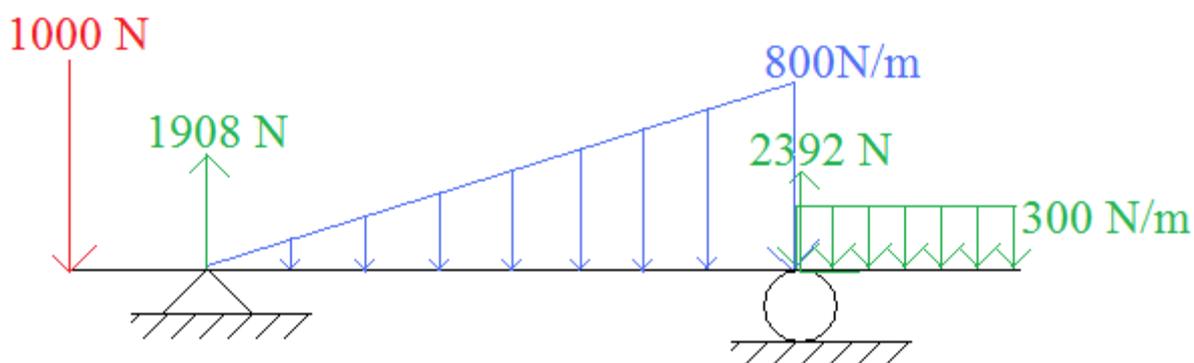


Calculs des diagrammes de sollicitations

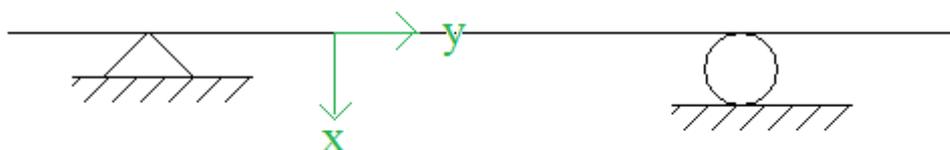
5.4.2 Exemple



Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis, a été effectué à l'exemple du chapitre précédent :



Mettre en place un repère local sur chaque poutre de la structure



Remarques : le repère local n'est pas pris identique au repère global. Avec les conventions de signe utilisées, il est préférable de diriger \vec{y} vers le bas.

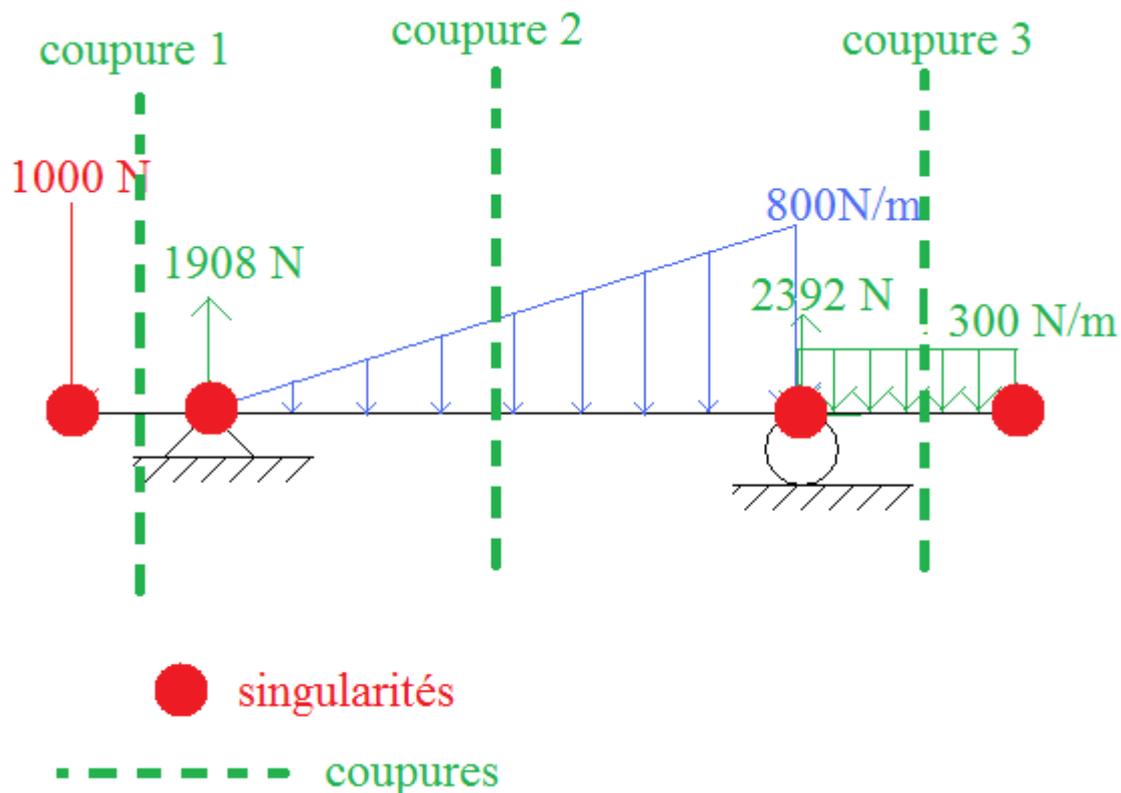
Calculs des diagrammes de sollicitations

De plus contrairement au repère global où des lettres MAJUSCULES sont utilisées, pour le repère global, les lettres minuscules sont privilégiées.

Effectuer une coupure entre chaque singularité

La définition de singularité est donnée dans le chapitre précédent (§3.3.1 page 20).

3 coupures est ainsi à réaliser.

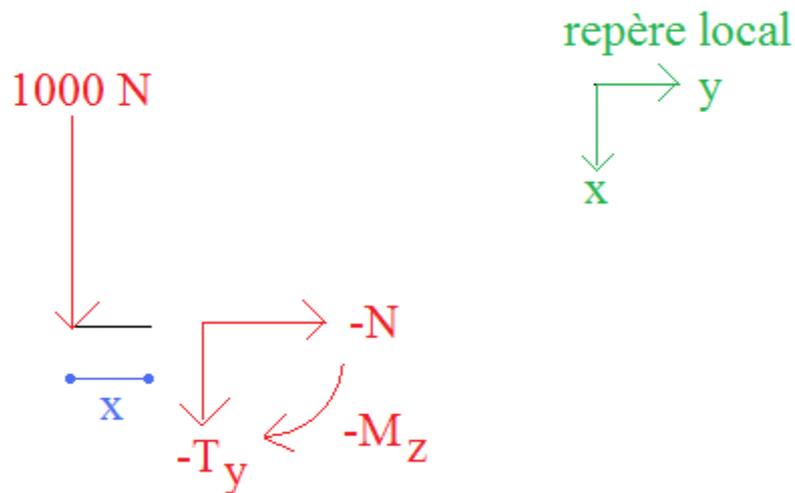


Calculs des diagrammes de sollicitations

Coupure 1 (tronçon à gauche de l'appui simple)

Conserver la partie droite ou la partie gauche

La partie gauche est conservée.



Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente

Etape inutile puisqu'il n'y a pas de force répartie

Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulle :

$$-N = 0 \Leftrightarrow N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$1000 - T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 1000$$

Moment au niveau de la coupure nul :

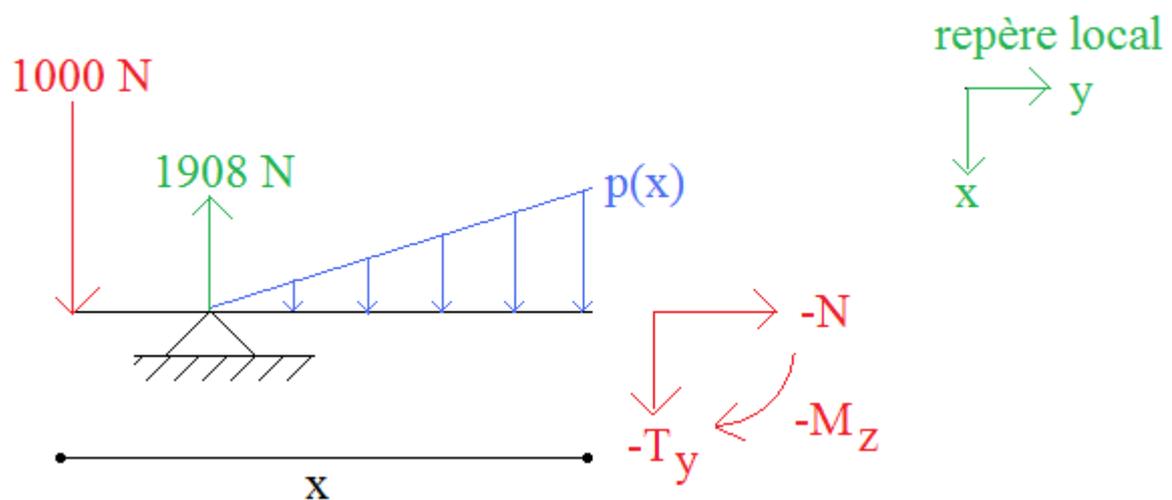
$$-1000 \times x - M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -1000 \cdot x$$

Calculs des diagrammes de sollicitations

Coupure 2 (tronçon entre les appuis simple et rotule)

Conserver la partie droite ou la partie gauche

La partie gauche est conservée.

**Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente**

Pour déterminer la force répartie équivalente, il convient de connaître $p(x)$.

$p(x)$ est une fonction affine de la forme $a \cdot x + b$

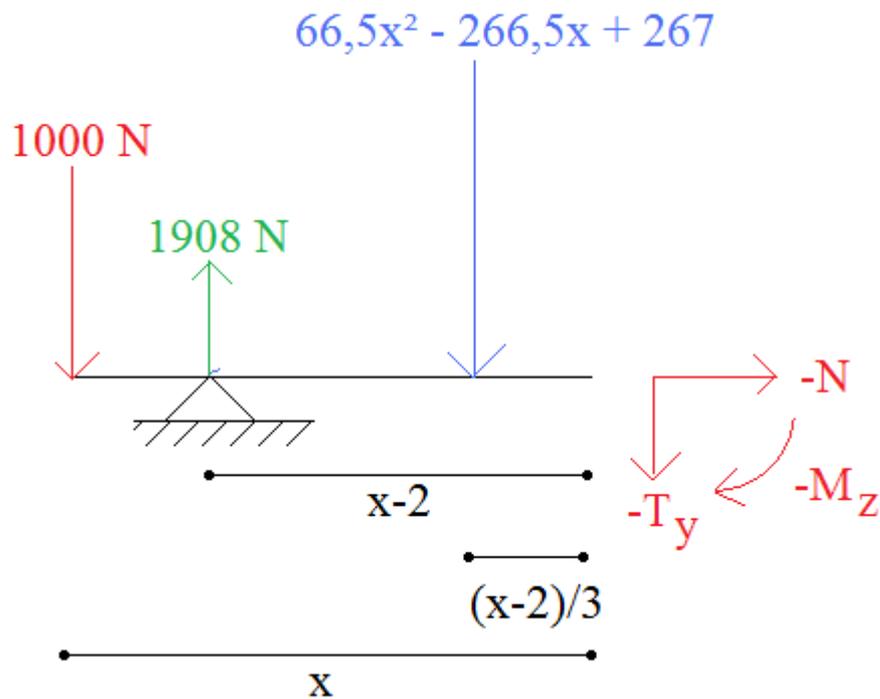
$$\text{avec : } \begin{cases} p(x = 2 \text{ m}) = 0 \\ p(x = 8 \text{ m}) = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 8a + b = 800 \end{cases} \Leftrightarrow p(x) \approx 133x - 267$$

La charge triangulaire est répartie sur une longueur de $(x-2)$ m donc la force équivalente vaut :

$$(133x - 267) \times \frac{x-2}{2} = 66,5x^2 - 265,5x + 267$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du triangle, donc à $\frac{2}{3}(x-2)$ à droite de l'appui simple (ou à $\frac{1}{3}(x-2)$ à gauche de la coupure)

Calculs des diagrammes de sollicitations

**Ecrire les équations d'équilibre du système**

Somme des forces horizontales nulle :

$$-N = 0 \Leftrightarrow N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$1000 - 1908 + 66,5x^2 - 265,5x + 267 - T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 66,5x^2 - 265,5x - 641$$

Moment au niveau de la coupure nul :

$$-1000 \times x + 1908 \times (x - 2) - (66,5x^2 - 265,5x + 267) \times \frac{x - 2}{3} - M_z = 0$$

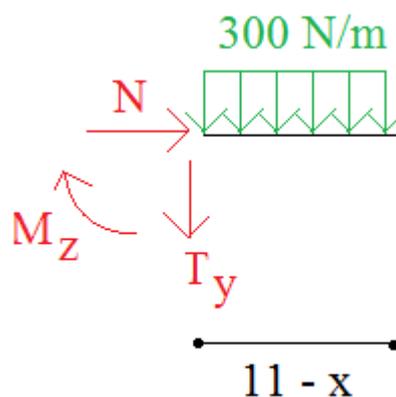
$$\Leftrightarrow M_z \approx -22,2x^3 + 132,8x^2 + 642x - 3638$$

Calculs des diagrammes de sollicitations

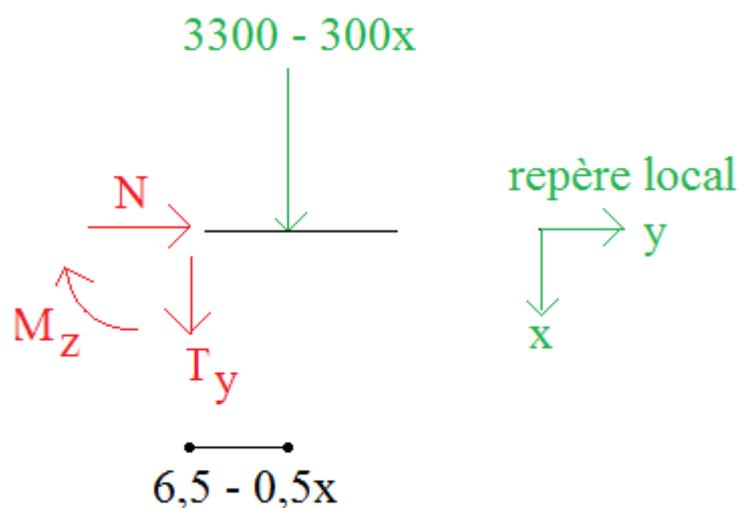
Coupure 3 (tronçon à droite de l'appui rotule)

Conserver la partie droite ou la partie gauche

La partie droite est conservée.

**Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente**La charge rectangulaire est répartie sur une longueur de $(11-x)$ m donc la force équivalente vaut :

$$300 \times (11 - x) = 3300 - 300x$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du rectangle, donc à $\frac{11-x}{2} = 5,5 - 0,5x$ à droite de la coupure.

Calculs des diagrammes de sollicitations

Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulle :

$$N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$3300 - 300x + T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 300x - 3300$$

Moment au niveau de la coupure nul :

$$(3300 - 300x) \times (5,5 - 0,5x) + M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

Vérification

Cette étape est facultative mais est conseillée.

Tronçon 1 :

$$T_y = 1000$$

$$M_z = -1000 \cdot x$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 2 :

$$T_y = 66,5x^2 - 265,5x - 641$$

$$\Leftrightarrow M_z \approx -22,2x^3 + 132,8x^2 + 642x - 3638$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 3 :

$$T_y = 300x - 3300$$

$$M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

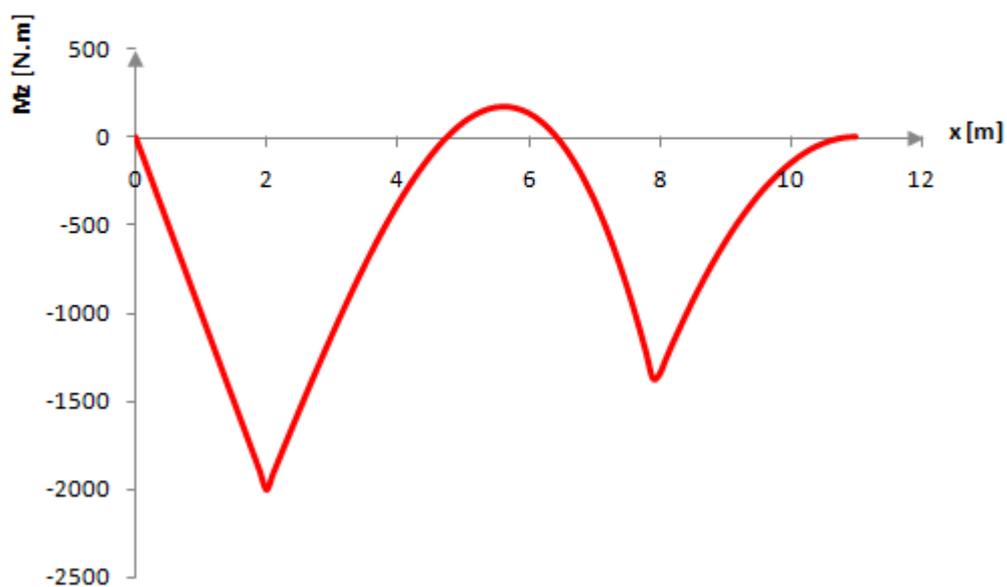
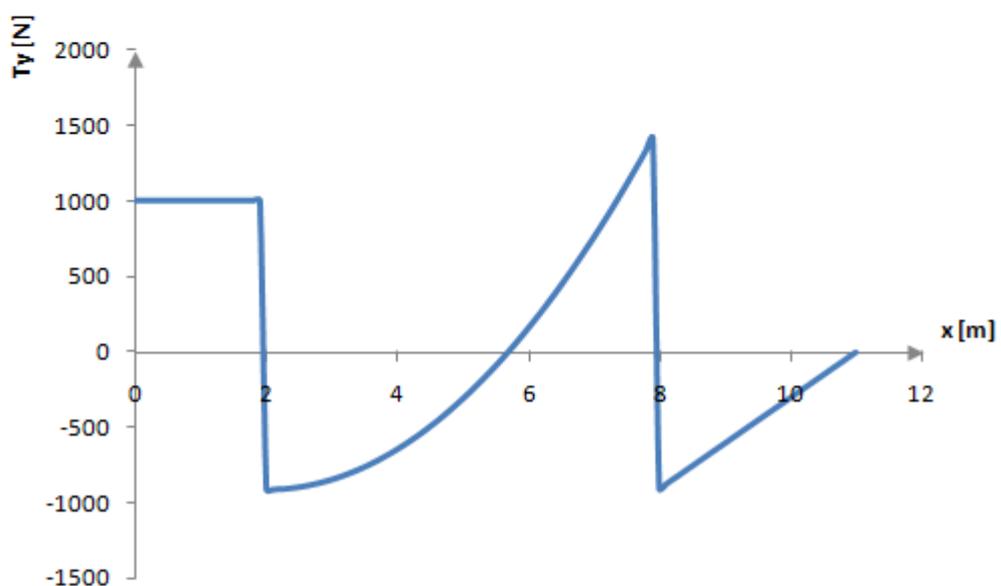
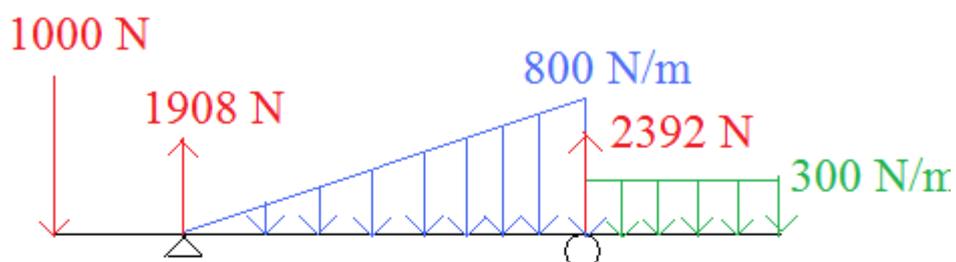
$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

$$\frac{dT_y}{dx} = p = 300N/m \text{ est vérifié.}$$

Calculs des diagrammes de sollicitations

Tracer les diagrammes de sollicitations

L'effort normal est nul en tout point donc inutile de tracer ce diagramme.



Tracé direct des diagrammes de sollicitations

6. Tracé direct des diagrammes de sollicitations

6.1 Relations à connaître

Dans le cas de poutres droites et dans des problèmes plans.

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = p \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{cases}$$

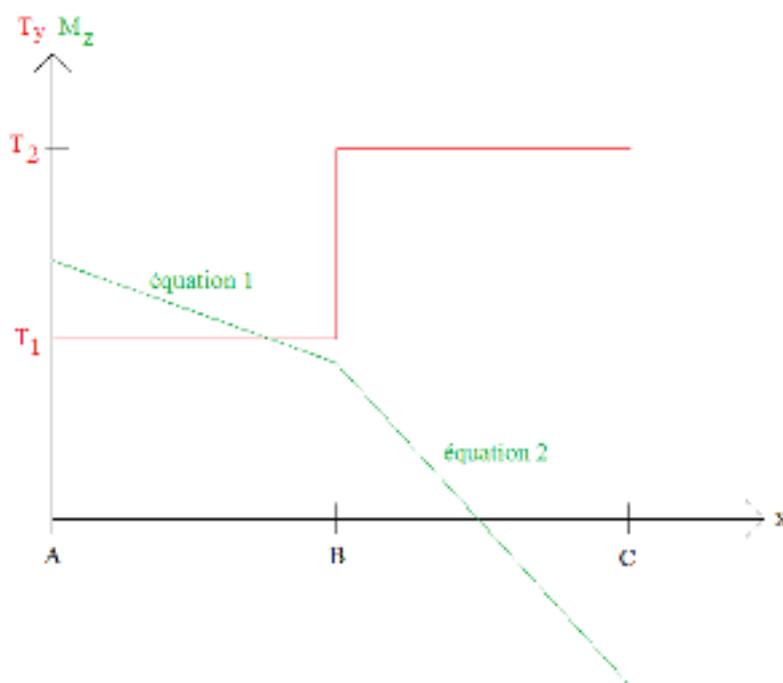
$$M(x_2) = M(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$

ATTENTION : ces relations sont valables pour des poutres droites. Pour des poutres courbes, ces relations ne sont plus correctes car il est nécessaire d'utiliser les coordonnées polaires.

6.2 Effet d'une force ponctuelle selon y



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



Points remarquables au niveau du point B :

Saut d'effort tranchant égal à F , c'est-à-dire que : $T_2 - T_1 = F$

L'équation 1 est de la forme :

$$M_2(x) = -T_1 \times x + a$$

L'équation 2 est de la forme :

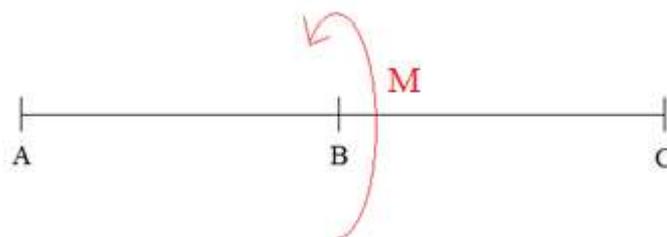
$$M_2(x) = -T_2 \times x + b$$

La différence de pente entre la partie 1 et la partie 2 est :

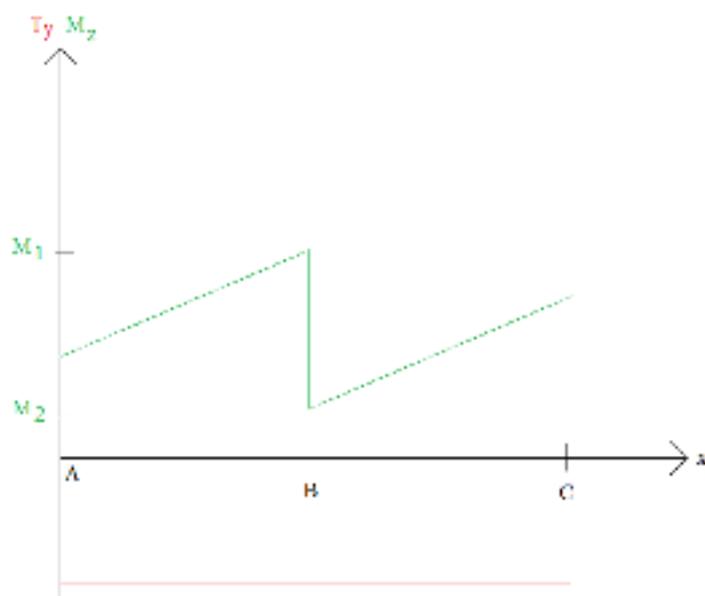
$$T_1 - T_2 = -F$$

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

6.3 Effet d'un moment ponctuel autour de z



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



Points remarquables au niveau du point B :

Aucun effet sur l'effort tranchant

Aucun effet sur la pente à droite ou à gauche du diagramme du moment fléchissant

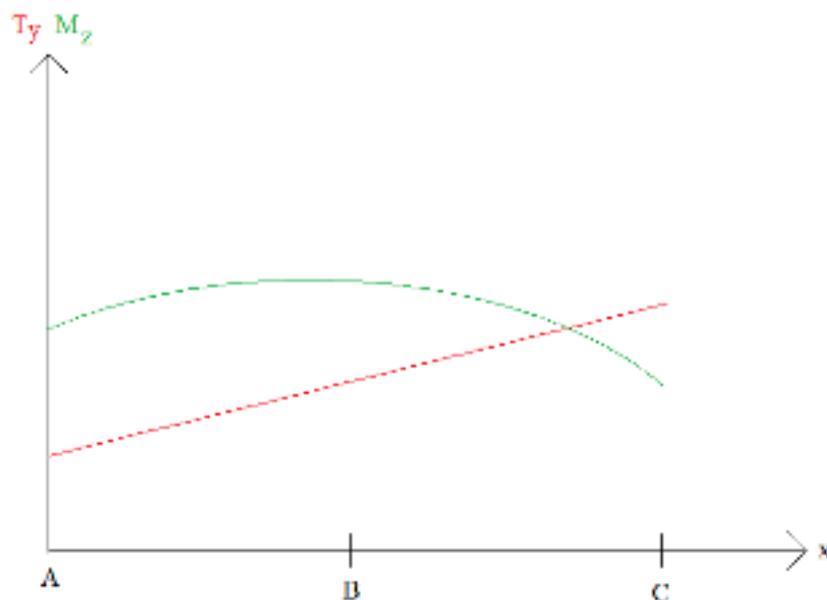
Saut de moment fléchissant égal à $-C$, c'est-à-dire que : $M_2 - M_1 = -C$

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

6.5 Effet d'une charge répartie



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :

Points remarquables

La pente du diagramme de l'effort tranchant est égale à p , c'est-à-dire que son équation est de la forme :

$$T_y(x) = p \times x + a$$

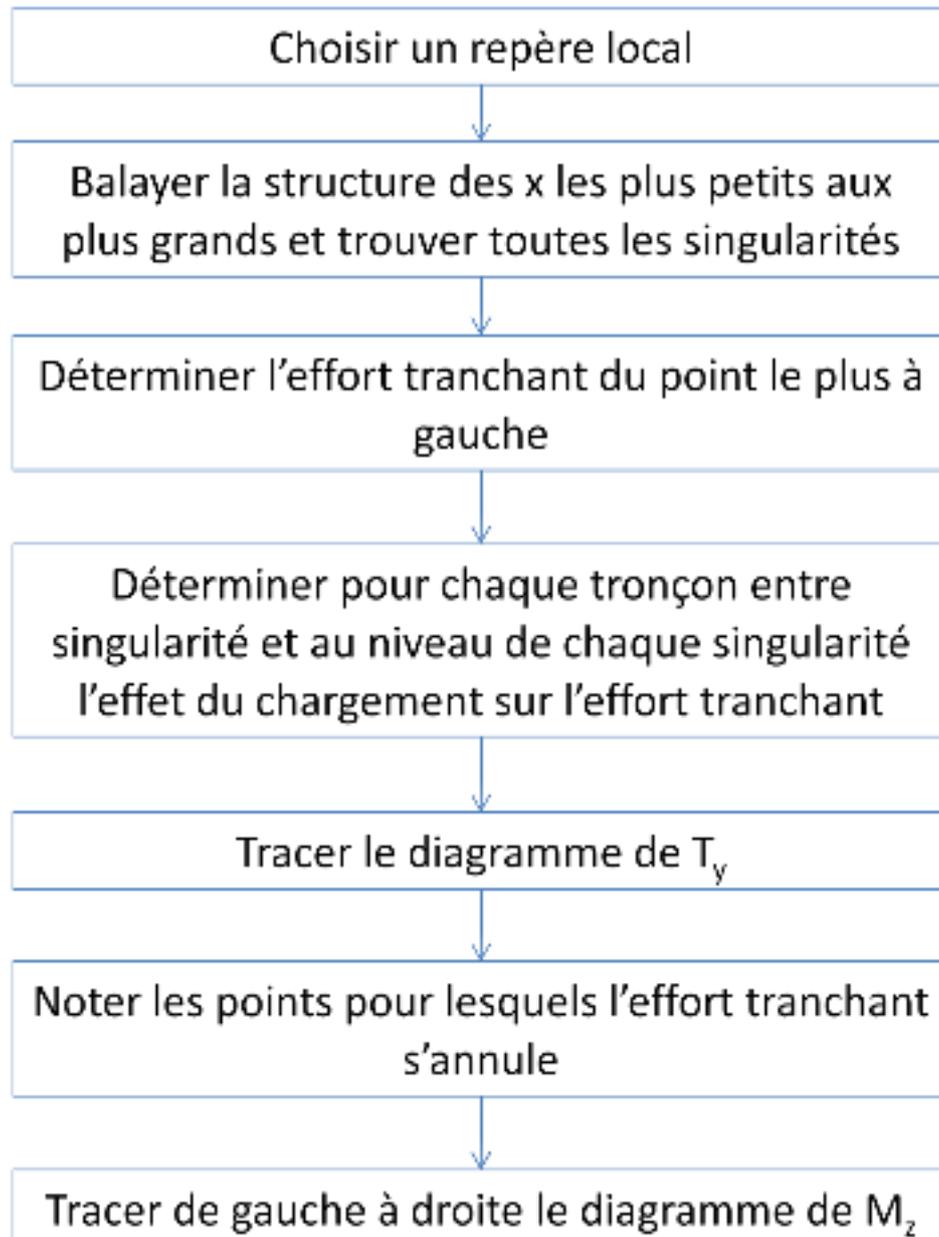
Le diagramme du moment fléchissant est une parabole de la forme :

$$M_z(x) = -\frac{p \times x^2}{2} - a \times x + b$$

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

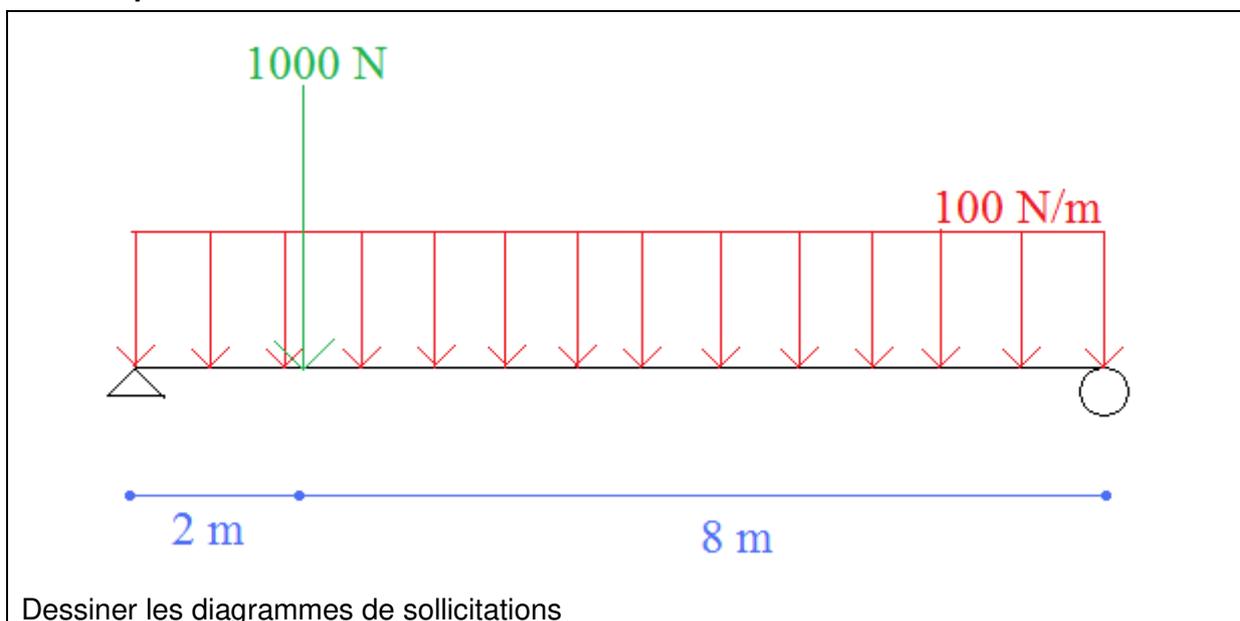
6.6 Méthode**6.6.1 Logigramme**

Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.

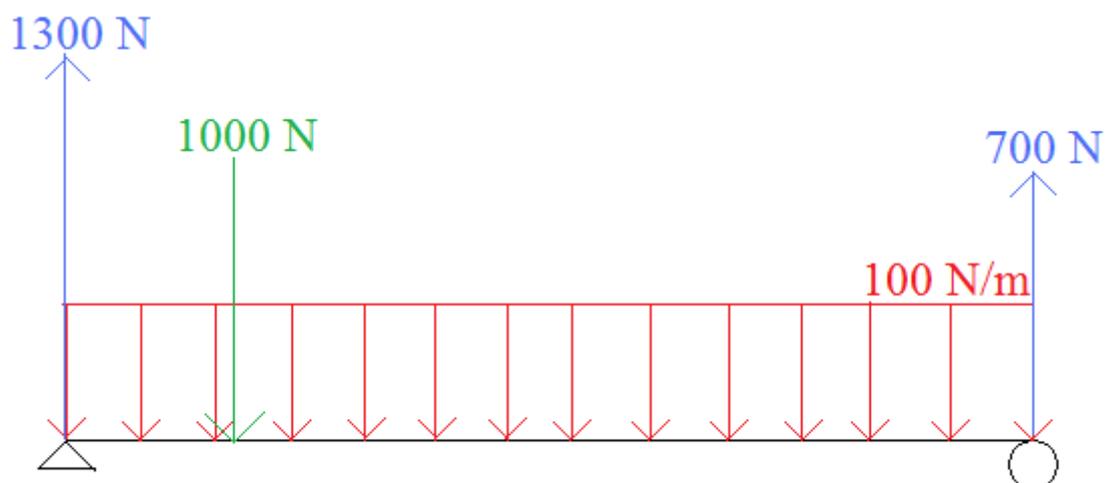


Tracé direct des diagrammes de sollicitations

6.6.2 Exemple



Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis (non l'objet de ce chapitre) donne le résultat suivant :

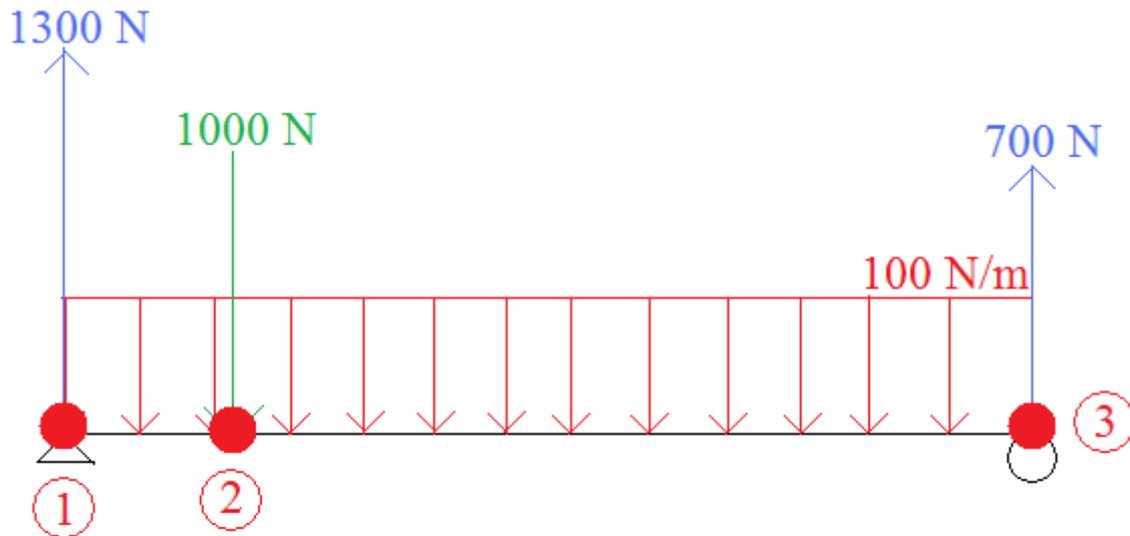


Choisir un repère local



Tracé direct des diagrammes de sollicitations

Balayer la structure des x les plus petits aux plus grands et trouver toutes les singularités



● singularité

Déterminer l'effort tranchant du point le plus à gauche

En dehors de la structure, il est considéré (artificiellement) que l'effort tranchant est nul.

Ainsi, infiniment proche à droite du point le plus à gauche (qui correspond donc à la singularité 1), on a une force ponctuelle égale à -1300 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de -1300 N donc vaut $0 - 1300\text{N} = -1300\text{N}$.

Déterminer pour chaque tronçon entre singularité et au niveau de chaque singularité l'effet du chargement sur l'effort tranchant

Tronçon entre les singularités 1 et 2 :

Il existe un chargement réparti égal à 100N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100N/m.

Infiniment proche à gauche de la singularité 2, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,2} = T_{y,1} + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 2 \text{ m} = -1300 + 100 \times 2 = -1100 \text{ N}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à +1000 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de 1000 N donc vaut infiniment proche à droite de la singularité :

$$-1100 + 1000 = -100 \text{ N}$$

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

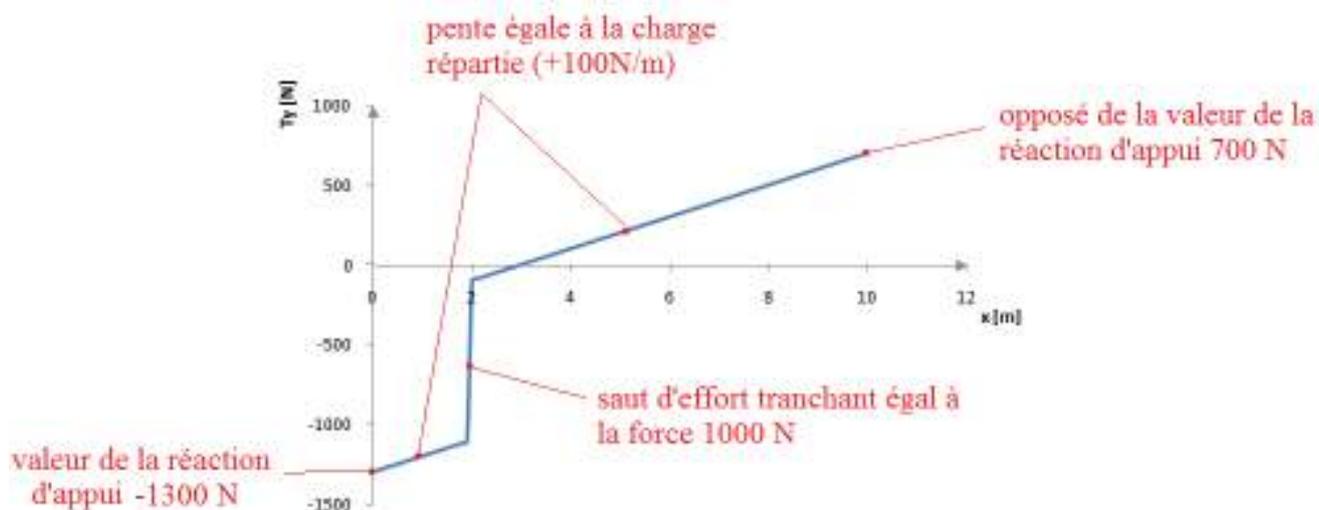
Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

Il existe un chargement réparti égal à 100N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100N/m.

Infiniment proche à gauche de la singularité 3, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,3} = T_{y,2} + 100 \frac{N}{m} \times 8 m = -100 + 100 \times 8 = 700 N$$

Remarque : la valeur de droite correspond en valeur absolue à la réaction d'appui à droite. Cela signifie que les résultats trouvés sont corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

Tracer le diagramme de T_y **Noter les points pour lesquels l'effort tranchant s'annule**

L'effort tranchant s'annule pour $x = 3 m$

Tracer de gauche à droite le diagramme de M_z Singularité 1

Au niveau de la singularité 1, le moment est nul (appui simple en extrémité de structure).

Tronçon entre les singularités 1 et 2

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_2 = M_1 - \int_1^2 T$$

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

$\int_1^2 T$ est la surface de la courbe entre les singularités 1 et 2 et vaut donc :

$$\frac{-1300 - 1100}{2} \times 2 = -2400 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_2 = 0 - (-2400) = 2400 \text{ N.m}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à +1000 N. Donc le moment fléchissant subit un saut de pente égal -1000 N/m

Point pour lequel l'effort tranchant s'annule :

Le moment possède une asymptote horizontale au niveau de ce point et vaut :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T$$

$\int_{x=2m}^{x=3m} T$ est la surface de la courbe entre les singularités les abscisses égales à 2m et 3m donc :

$$\frac{-100 + 0}{2} \times 1 = -50 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T = 2400 - (-50) = 2450 \text{ N.m}$$

Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_3 = M_{x=3m} - \int_{x=3m}^3 T$$

$\int_{x=3m}^3 T$ est la surface de la courbe entre le point annulant l'effort tranchant et la singularité 3 et vaut donc :

$$\frac{0 + 700}{2} \times 7 = 2450 \text{ N.m}$$

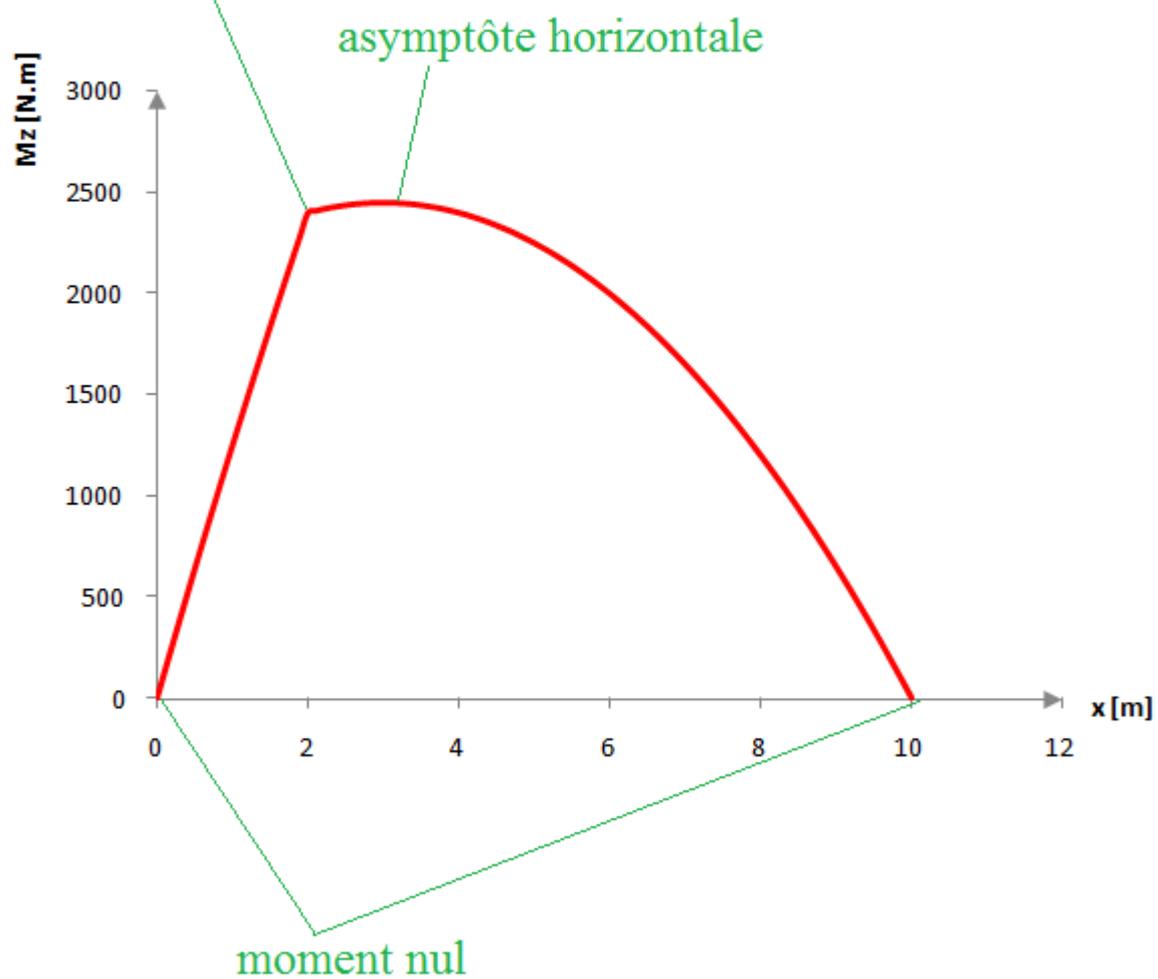
Ainsi :

$$M_3 = 2450 - 2450 = 0 \text{ N.m}$$

Remarque : la valeur de droite est nulle et correspond à la réaction d'appui à droite (car appui rotule en extrémité). Cela signifie que les résultats trouvés sont corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

rupture de pente égale à
-1000 N/m



Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

7. Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité

Définition de l'isostaticité

L'équilibre isostatique est atteint si **tout mouvement du solide est impossible** et si le **nombre d'inconnues de liaison appliquées à ce solide est égal au nombre d'équations**.

Remarque : dans le plan, cela donne 3 équations et 3 inconnues.

Définition de l'hypostaticité

S'il reste **une seule possibilité de mouvement** et/ou si le **nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations**, alors l'équilibre est dit "**hypostatique**".

On l'appelle aussi mécanisme. En fait, cela se traduit par une absence d'équilibre car le système peut bouger

Définition de l'hyperstaticité

S'il n'y a **aucune possibilité de mouvement** et que le **nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations**, l'équilibre est dit "**hyperstatique**".

Remarque : la très grande majorité des structures en génie civil sont hyperstatiques afin d'être dans le sens de la sécurité.

Définition du degré d'hyperstaticité

Le **degré d'hyperstaticité** est la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

Calcul du nombre d'équations

S'il y a **n** solides dans le système matériel, puisqu'il existe **3** équations d'équilibre par solide, on obtient **3 n équations** au total.

Calcul du nombre d'inconnues

On calcule ensuite le nombre d'inconnues de liaisons qui existent entre deux solides du système matériel :

- 1 inconnue pour un appui simple,
- 2 inconnues pour une articulation entre deux solides,
- 3 inconnues pour un encastrement entre deux solides.

Remarque : si la liaison est entre m solides, on compte alors (m-1) liaisons.

Exemple :

Pour une articulation entre 3 solides, il y a 2 liaisons à 2 inconnues, ce qui donne 4 inconnues.

Pour un encastrement entre 4 solides, il y a 3 liaisons à 3 inconnues, ce qui donne 9 inconnues.

Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$d = (1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 + 3 \cdot L_3) - 3n$$

Avec :

1 est le nombre d'inconnue pour un appui simple.

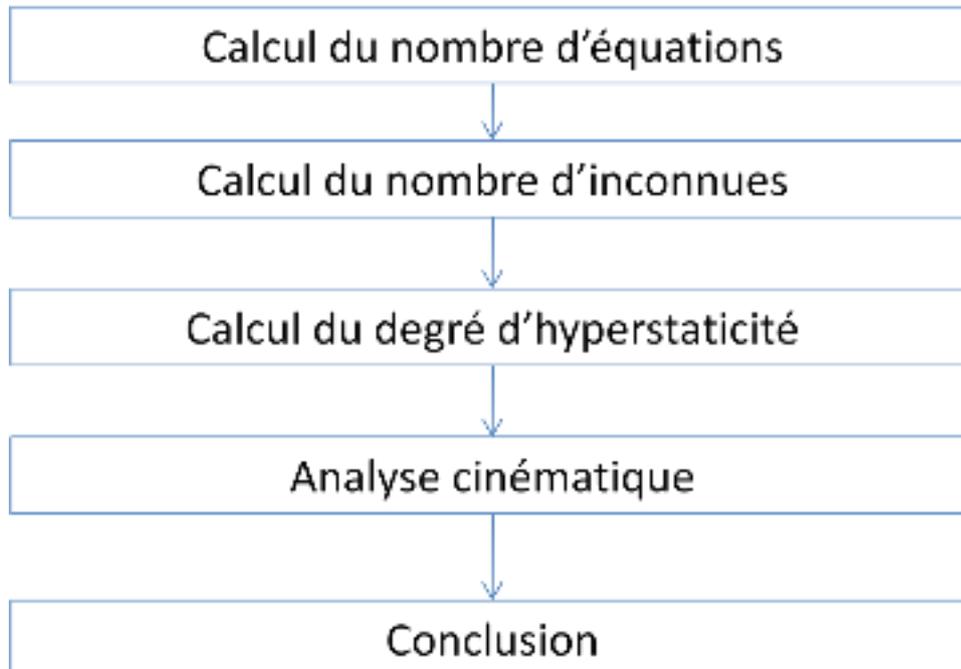
2 est le nombre d'inconnues pour une articulation.

3 est le nombre d'inconnues pour un encastrement.

 L_1 est le nombre d'appuis simples. L_2 est le nombre d'articulations. L_3 est le nombre d'encastrements. n est le nombre de solides.Corolaire

<u>Conditions</u>	<u>Situation</u>
$d = 0$ <u>ET</u> pas de mouvement possible entre solides	Le système est isostatique
$d > 0$ <u>ET</u> pas de mouvement possible entre solides	Le système est hyperstatique
$d < 0$ <u>OU</u> mouvement possible entre solides	Le système est hypostatique.

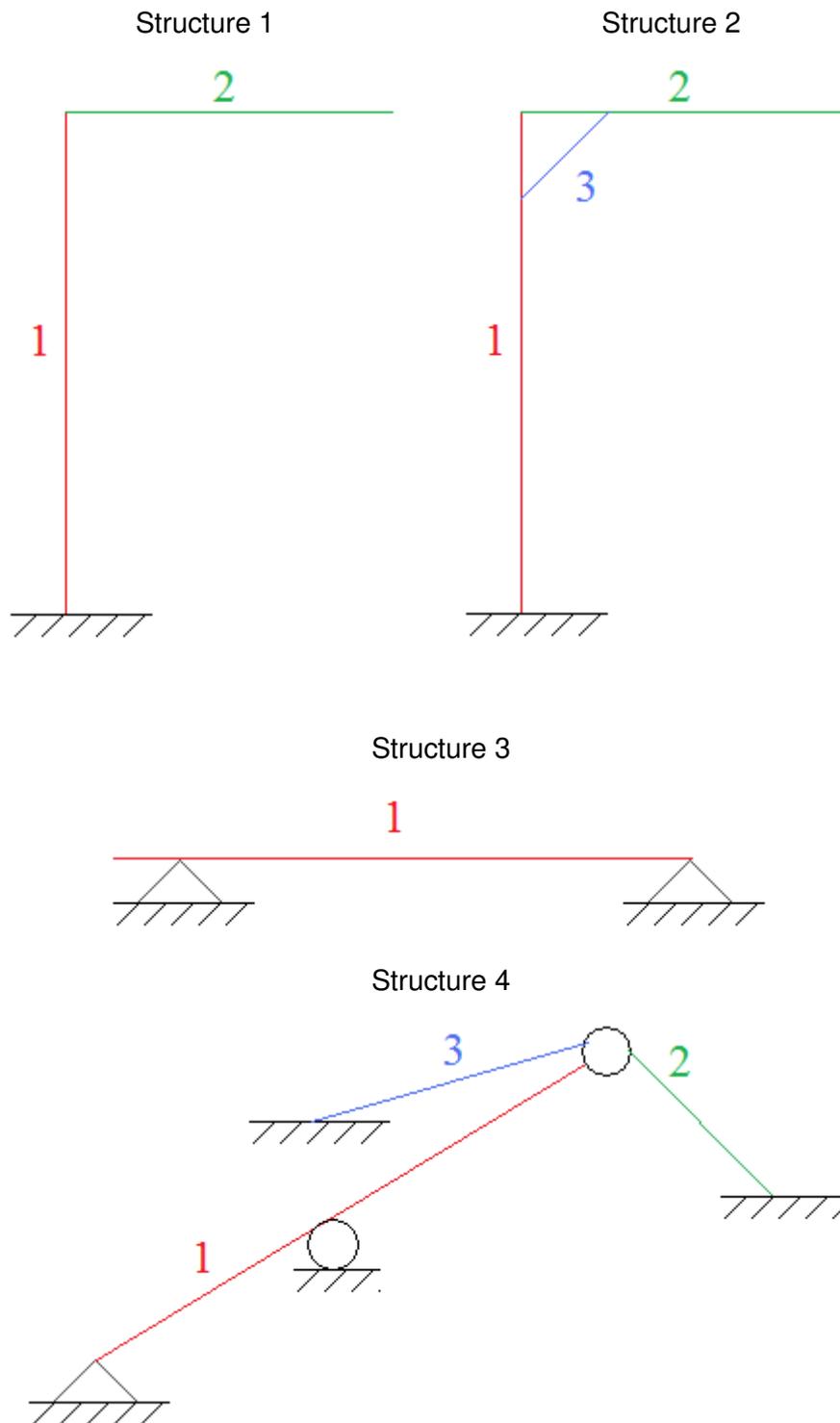
Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

7.1 Méthode**7.1.1 Logigramme**

Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

7.2 Exemples

Déterminer le de degré et type de staticité (iso/hypo/hyper) des structures suivantes :



Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

Structure 1

Calcul du nombre d'équations

2 solides $\rightarrow 2 \times 3 = 6$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3

Le nombre total d'inconnues est 6

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$6 - 6 = 0$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

Conclusion

Le système est isostatique.

Structure 2

Calcul du nombre d'équations

3 solides $\rightarrow 3 \times 3 = 9$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3
Encastrement	2 et 3	3
Encastrement	1 et 3	3

Le nombre total d'inconnues est 12

Calcul du degré d'hyperstaticité

Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

$$12 - 9 = 3$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

Conclusion

Le système est hyperstatique de degré 3.

Structure 3

Calcul du nombre d'équations

1 solide \rightarrow $1 \times 3 = 3$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Appui simple	Extérieur et 1	1
Appui simple	Extérieur et 1	1

Le nombre total d'inconnues est 2

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$2 - 3 = -1$$

Analyse cinématique

Inutile de faire l'analyse puisque le degré d'hyperstaticité est négatif donc il existe forcément un mouvement possible (dans ce cas, il s'agit d'un mouvement horizontal).

Conclusion

Le système est hypostatique de degré 1.

Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

Structure 4

Calcul du nombre d'équations

3 solides $\rightarrow 3 \times 3 = 9$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Rotule	1, 2 et 3	$2 \times 2 = 4$
Rotule	1 et extérieur	2
Appui simple	1 et extérieur	1
Encastrement	2 et extérieur	3
Encastrement	3 et extérieur	3

Le nombre total d'inconnues est 13

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$13 - 9 = 4$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

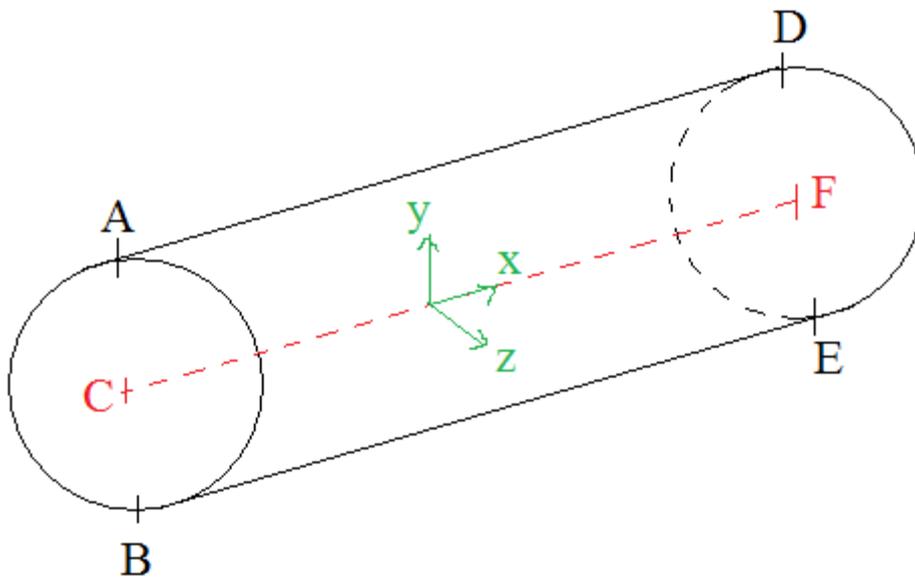
Conclusion

Le système est hyperstatique de degré 4.

Degré d'hyperstaticité – iso/hyperstaticité

8. Exercices**8.1 Définitions**

Exercice [1]



- 1) Quelle est la fibre moyenne ?
- 2) Quelle est la fibre supérieure ?
- 3) Quelle est la fibre inférieure ?

Calcul des réactions d'appuis

8.2 Modélisation et calculs des réactions d'appuis

Exercice [2]

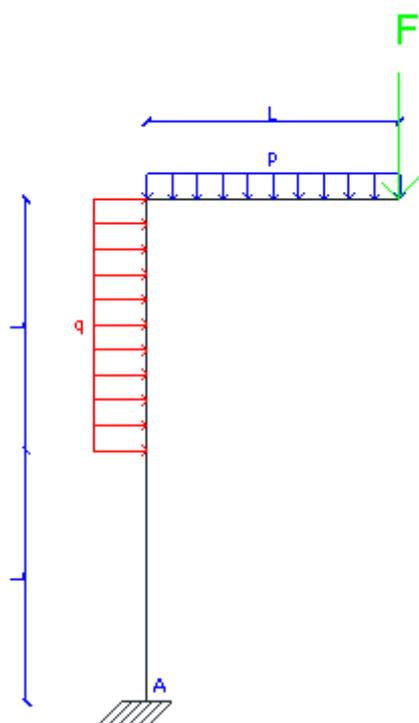


Modéliser la poutre supérieure de la balançoire ci-contre (géométrie et chargement)

Données :

- Masse volumique de la neige : 50 à 150 kg/m^3
- Hauteur de chute de neige : 20 cm
- Diamètre de la poutre en bois : 15 cm
- Masse volumique du bois : 350 à 1200 kg/m^3
- Longueur de la poutre : 3 m
- Longueur entre appuis : 2,5 m
- Masse du banc et des chaînes : 25 kg (chaînes situées à 30 cm des appuis)
- Surface horizontale du banc : 1,2 m^2

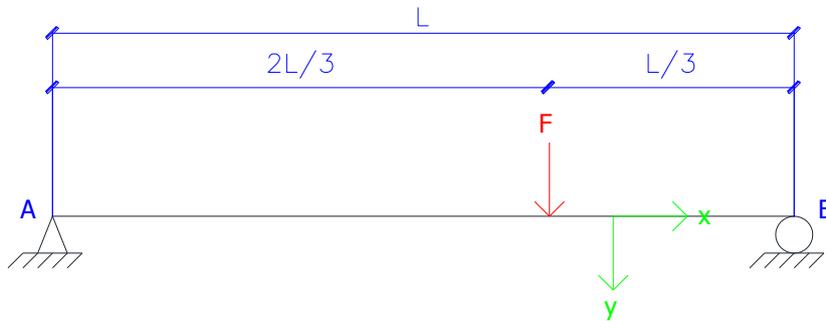
Exercice [3]



Donner les réactions d'appui au point A.

Calcul des réactions d'appuis

Exercice [4]

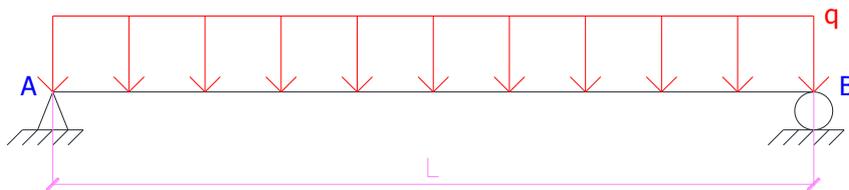


Donner les réactions
d'appui aux points A
et au point B.

Calcul des diagrammes de sollicitations

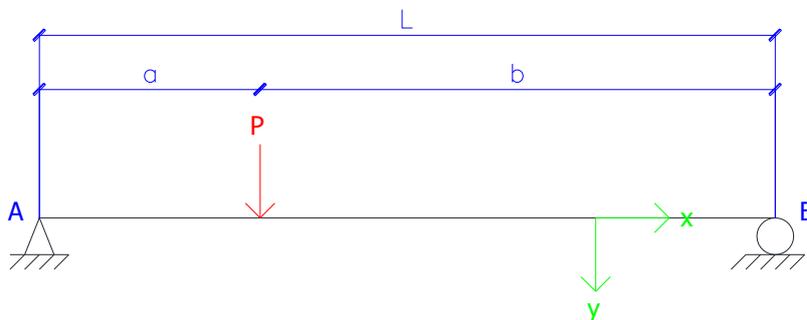
8.3 Calculs des diagrammes de sollicitations

Exercice [5]



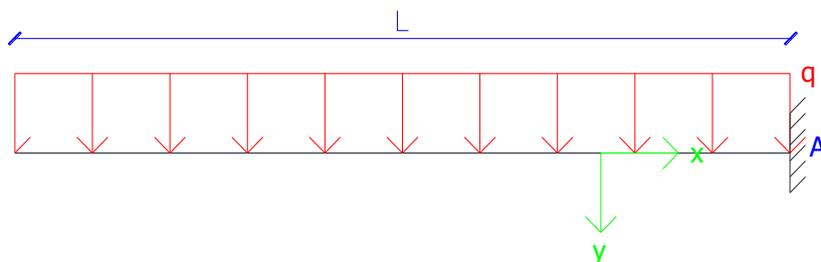
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [6]



Donner les diagrammes des sollicitations.

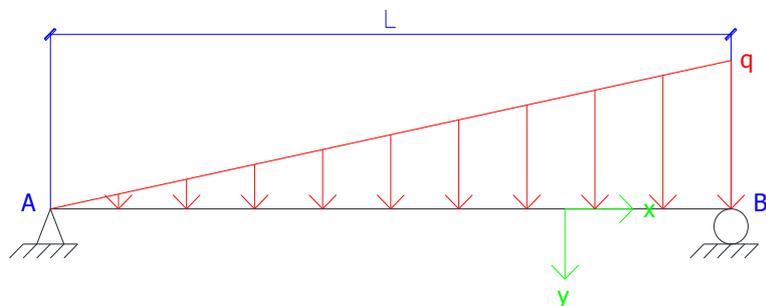
Exercice [7]



Donner les diagrammes des sollicitations.

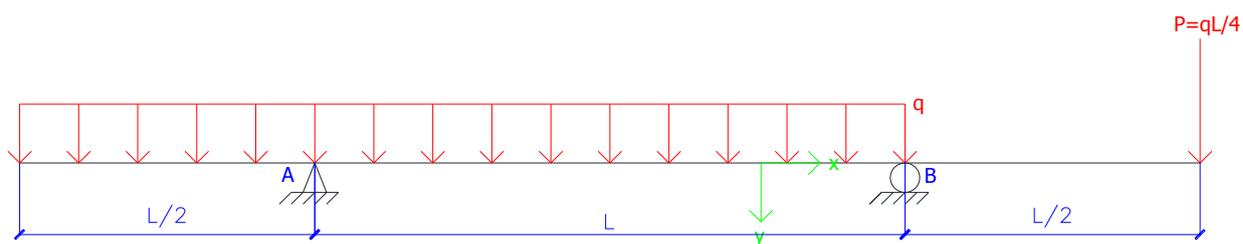
Calcul des diagrammes de sollicitations

Exercice [8]



Donner les diagrammes des sollicitations.

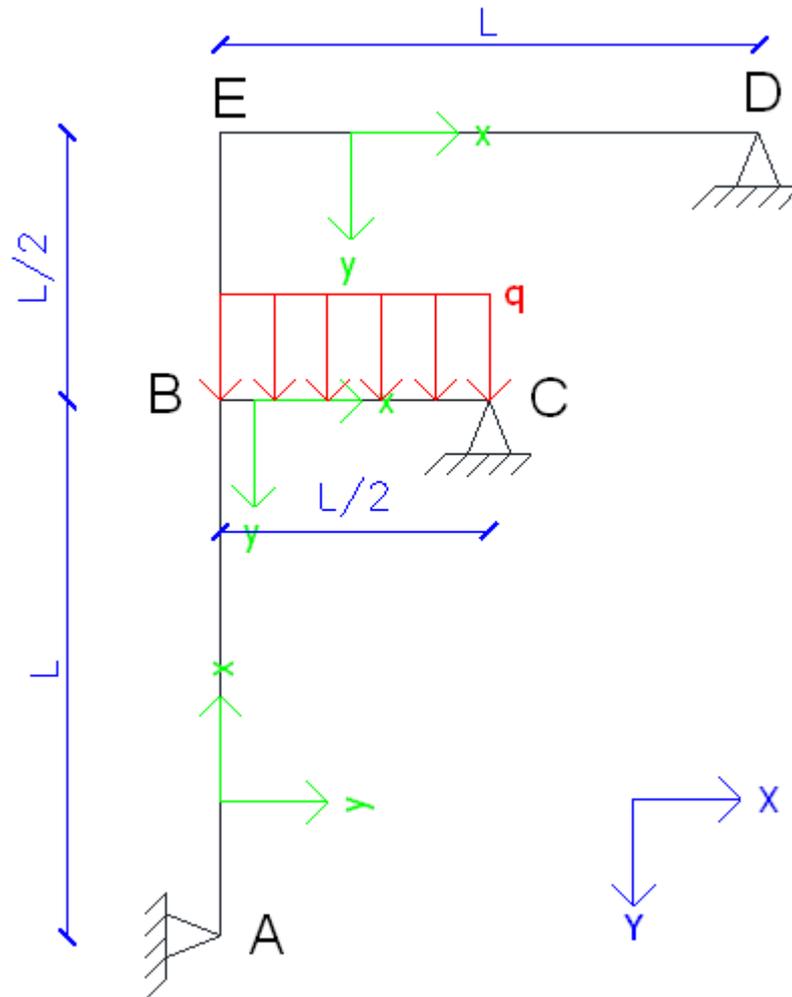
Exercice [9]



Donner les diagrammes des sollicitations.

Calcul des diagrammes de sollicitations

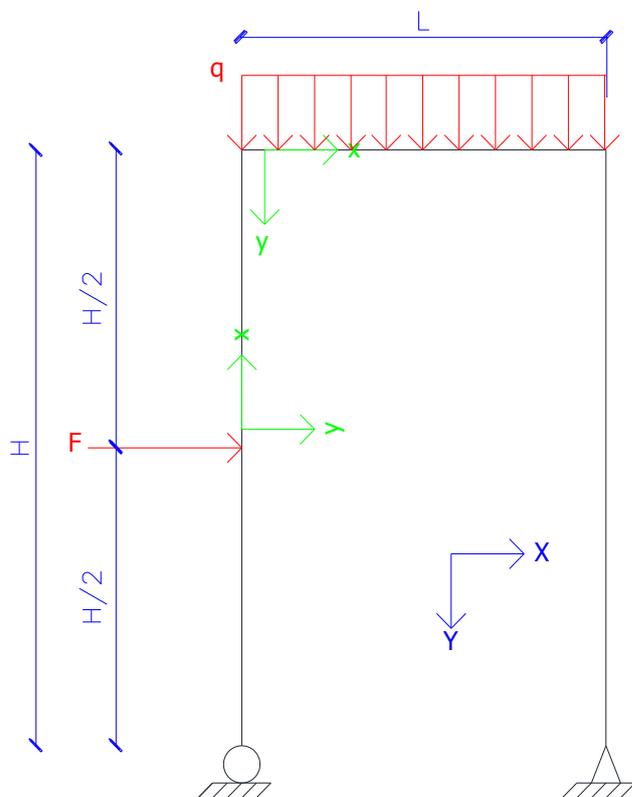
Exercice [10]



Donner les diagrammes des sollicitations.

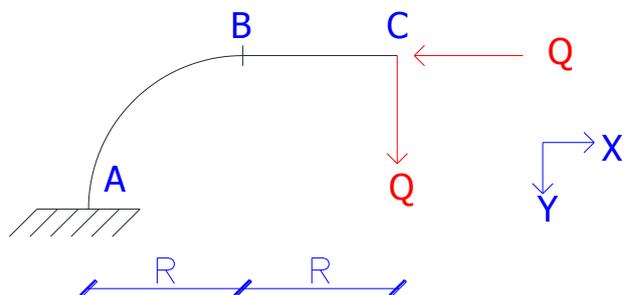
Calcul des diagrammes de sollicitations

Exercice [11]



Donner les diagrammes des sollicitations.

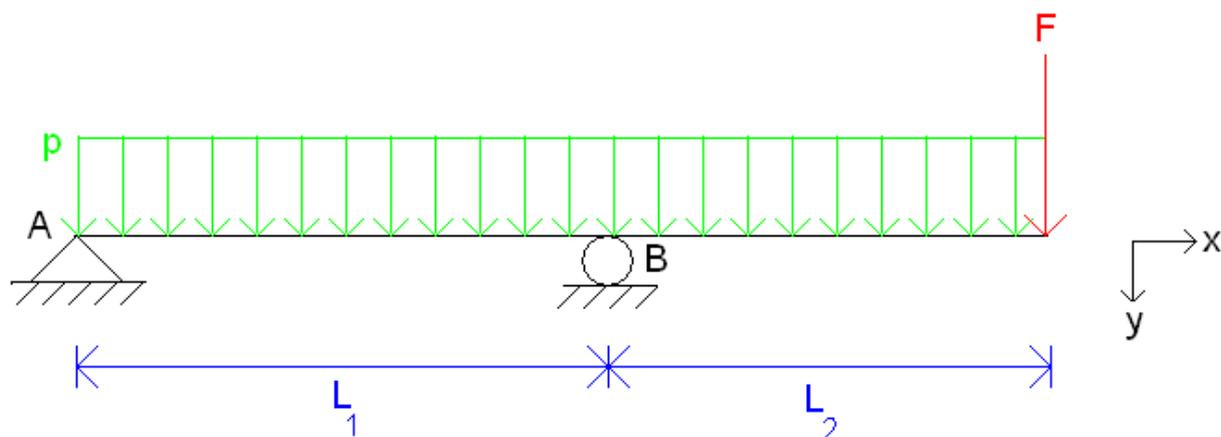
Exercice [12]



Déterminer le torseur en tout point.

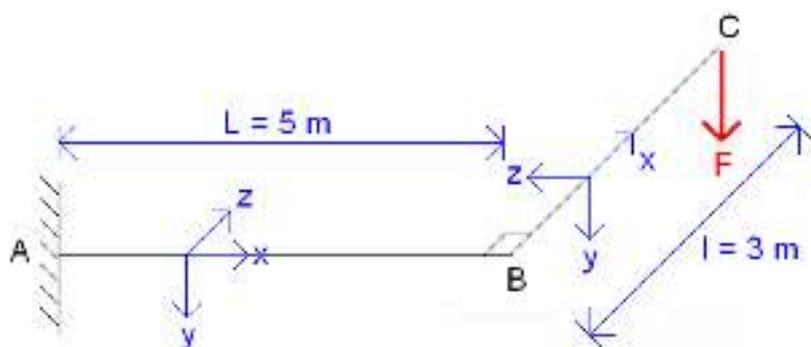
Calcul des diagrammes de sollicitations

Exercice [13]



- 1) Déterminer les réactions d'appuis en A et B.
- 2) A partir de quelle valeur de F la poutre bascule ?
- 3) Tracer les diagrammes pour les valeurs numériques suivantes :
 - $L_1 = 2 \text{ m}$
 - $L_2 = 1 \text{ m}$
 - $p = 150 \text{ N/m}$
 - $F = 200 \text{ N}$

Exercice [14]



A, B et C sont dans le même plan horizontal (A, \vec{x}, \vec{z}).

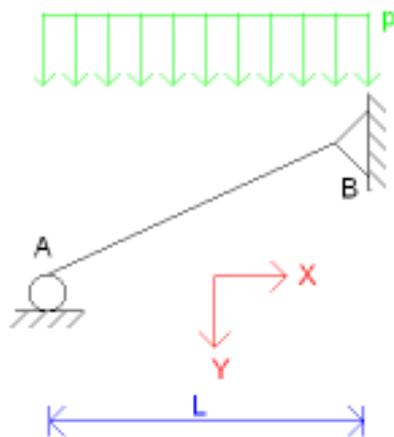
(AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Calculer le torseur en tout point

Donner $M_{z\max}$, $M_{z\min}$, N_{\max} , $|V_y|_{\max}$ et $|M_x|_{\max}$ en fonction de F.

Calcul des diagrammes de sollicitations

Exercice [15]



L'angle AB avec l'horizontale est égal à 30° .

Déterminer les réactions d'appuis.

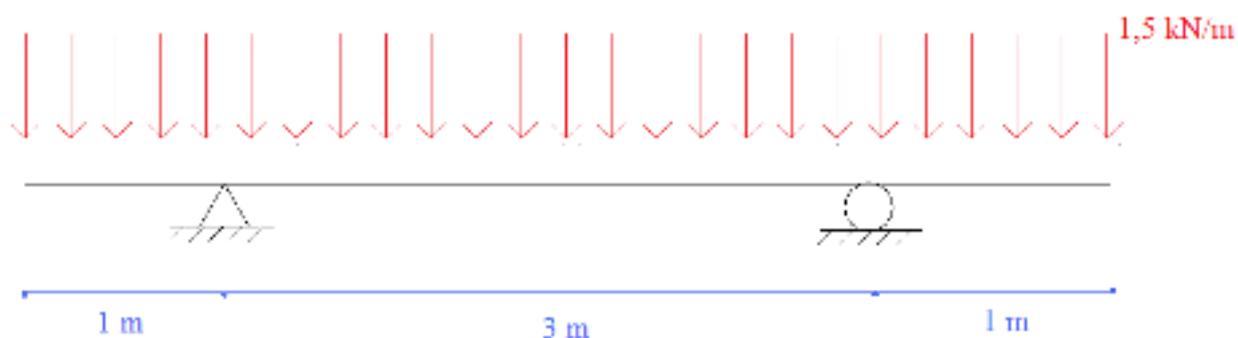
Calculer les torseurs en tout point.

Tracé direct des diagrammes de sollicitations

8.4 Tracé direct des diagrammes de sollicitations

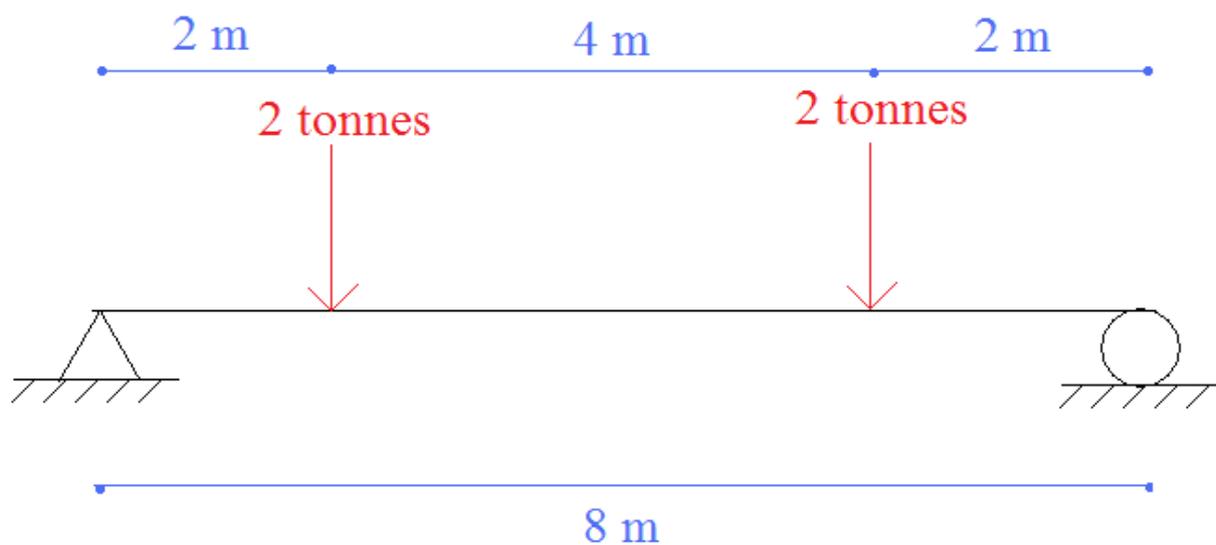
Exercice [16]

Tracer, sans passer par la méthode des coupures, les diagrammes du problème suivant :

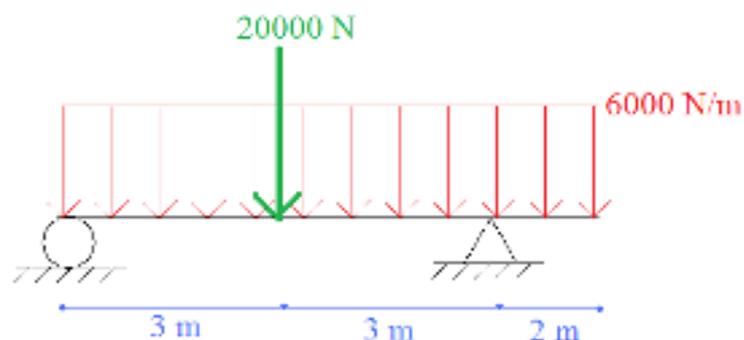


Exercice [17]

Tracer, sans passer par la méthode des coupures, les diagrammes du problème suivant :



Exercice [18]



Déterminer les réactions d'appuis.
Calculer les torseurs en tout point.

Degré d'hyperstaticité

8.5 Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité

Exercice [19]

Donner le degré d'hyperstaticité des structures suivantes :

