E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Projet de modélisation ($1^{\text{ère}}$ année)
Cadre de réalisation et mode d'évaluation

1 Objectifs pédagogiques

Le projet de modélisation vise deux objectifs essentiels. Le premier consiste à mettre en œuvre les connaissances (concepts, modèles, outils, ...) acquises dans les disciplines scientifiques du département “Mathématiques Informatique et Physique” pour proposer des solutions ou des réponses concrètes à un problème réel. Le second objectif est quant à lui de réaliser un travail en situation d'autonomie.

2 Cadre de réalisation

Le projet est réalisé par trinômes[1] et crédité d'un ECTS. Il ne fera l'objet d'aucun encadrement (travail en autonomie). Il devra se traduire par le rendu d'un rapport, au plus tard le 25 mai 2007. Des indications relatives à la rédaction de ce rapport sont données dans la section 3.1. Le projet fera ensuite l'objet d'une soutenance orale durant la première quinzaine du mois de juin 2007. Conséquemment, aucun délai supplémentaire ne sera accordé pour le rendu du rapport. La soutenance n'aura lieu que si le rapport est rendu avant le 25 mai 2007. Les modalités de soutenance sont décrites dans la section 3.2.

3 Mode d'évaluation

Une note entière sur 20, fondée à la fois sur le rapport et sur la soutenance, sera attribuée à chaque élève. La validation du projet de modélisation requiert, comme pour toutes les disciplines de $1^{\text{ère}}$ année, que cette note soit supérieure ou égale à 10. Dans le cas contraire, le projet fera l'objet d'un rattrapage.

3.1 Rapport

Le rapport doit être réalisé à l'aide d'un logiciel de traitement de texte et comporter une dizaine de pages au format A4, avec un interligne simple et une police de 10 points. Une annexe d'au maximum 5 pages peut y être jointe. Le rapport comportera une présentation du sujet, une description argumentée de la démarche, des méthodes et des outils employés ainsi qu'une analyse commentée et critique des résultats obtenus. Une attention particulière devra être portée à la cohérence de la rédaction. Le projet étant le même pour l'ensemble de la promotion, les rapports présentant des similitudes évidentes ne seront pas acceptés et conduiront à la non validation.

3.2 Soutenance

Les soutenances auront lieu le mardi 12 juin 2007 au matin. La durée prévue de la soutenance est de 20 minutes, avec au maximum 15 minutes d'exposé et au minimum 5 minutes de discussion avec le jury. Les jurys seront composés de 2 enseignants issus de deux disciplines distinctes du département “Mathématiques Informatique et Physique”. Les média utilisés pour l'exposé se limiteront à une dizaine de translucides ou de diapositives.

[1] Les trinômes sont habituellement ceux constitués pour les travaux pratiques. Si les trinômes de TP ne sont pas encore faits, vous pouvez constituer des trinômes spécifiques pour le projet. Il faut toutefois obligatoirement, dans l'un ou l'autre cas, que chaque trinôme soit composé d'élèves issus d'un même groupe.

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Projet de modélisation (1ère année)
année scolaire 2006-2007

Problème : cyclindre creux infini sous pression (pressiomètre)

1. Position du problème

L'objectif du projet est la modélisation mécanique puis numérique du problème illustré par la figure 1. Le cylindre creux de révolution représenté sur cette figure est un solide déformable de longueur infinie dans la direction de son axe Oz. La transformation $\mathcal{F}$ de ce solide est supposée **quasistatique**.

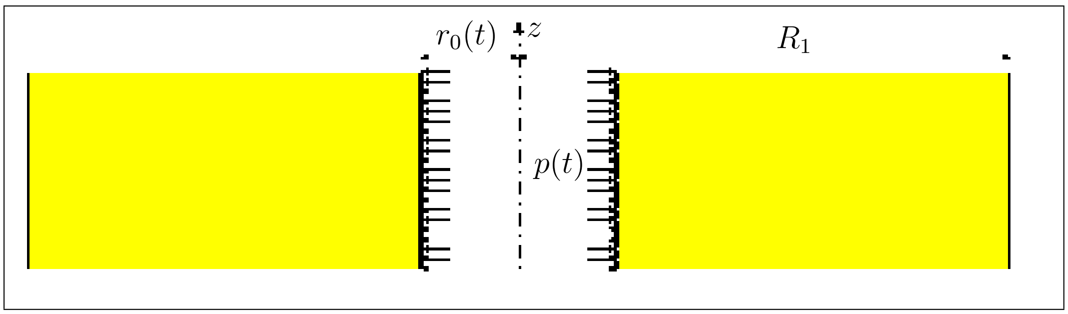

FIG. 1 – Cylindre creux infini sous pression : configuration déformée à l'instant t

L'instant initial $t = 0$ est choisi comme instant de référence et le repérage des particules solides s'effectue relativement au système de coordonnées cylindriques. La paroi extérieure du cylindre est fixe tandis que sa paroi intérieure est soumise, à chaque instant $t \geq 0$, à une pression uniforme $p(t)$ donnée et telle que $p(0) = 0$. La configuration initiale du solide est alors définie par $\Omega_0 = \{(R, \Theta, Z) \in [R_0, R_1] \times [0, 2\Pi[\times \mathbb{R}\}$ et la configuration déformée à l'instant t par $\Omega_t = \{(r, \theta, z) \in [r_0(t), R_1] \times [0, 2\Pi[\times \mathbb{R}\}$, où r_0 est une fonction inconnue de la variable temps (figure 1).

Le solide est par ailleurs supposé hypoélastique et son comportement est régi par la relation $\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}\mathbf{D}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$ où $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$ (on rappelle que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée matérielle de $\boldsymbol{\sigma}$), où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation et où λ et μ sont deux constantes mécaniques données telles que $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec $E > 0$ et $\nu \in]-1, \frac{1}{2}[$.

2. Modélisation mécanique : notations et indications

1. On justifiera tout d'abord que la transformation **quasistatique** du solide est de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} r &=& f(R,t) \\ \theta &=& \Theta \\ z &=& Z \end{array}\right. \tag{1}$$

   où f est une fonction inconnue des variables R et t.

2. On adoptera les notations suivantes : $f'(R,t) = \partial_R f(R,t)$, $f''(R,t) = \partial^2_{RR} f(R,t)$ ainsi que $\dot{f}(R,t) = \partial_t f(R,t)$, $\forall (R,t) \in [R_0, R_1] \times \mathbb{R}^+$.

3. On montrera, sans chercher à ce stade à les déterminer, que les composantes des différents tenseurs eulériens ($\mathbf{D}$, $\boldsymbol{\sigma}$, ...) ne sont fonctions que du temps t et de la variable de Lagrange R. C'est sous cette forme (et non comme fonctions de t et de r) que l'on se propose à présent de les exprimer.

4. Soit $t \geq 0$ un instant quelconque mais fixé. On introduira les fonctions g et h respectivement définies par $g(R) = \frac{f(R,t)}{Rf'(R,t)}$ et $h(R) = \frac{f(R,t)}{R}$, $\forall R \in [R_0, R_1]$, puis les fonctions v et w respectivement définies par $v(x) = g(R)$ et $w(x) = h(R)$, $\forall x \in [x_1, 1]$, où $x_1 = \frac{R_0}{R_1}$ et $x = \frac{R_0}{R}$.

5. On montrera alors que l'on a

$$w(x) \quad = \quad \exp\left(\int_{x_1}^{x} \frac{v(\xi)-1}{\xi v(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right) \qquad \forall x \in [x_1, 1] \tag{2}$$

   puis que v est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$v'(x) \quad = \quad \frac{v(x)+(1-2\nu)\ln v(x)-1}{(1-\nu)x} \qquad \forall x \in [x_1, 1] \tag{3}$$

   et satisfait la relation

$$\frac{v^{1-\nu}(1)}{w(1)} \quad = \quad \exp\left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)p(t)}{E}\right) \tag{4}$$

6. On exprimera enfin f ainsi que les composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur des déformations d'Almansi-Euler $\mathbf{E}$ à l'aide des fonctions v et w et des constantes mécaniques E et ν.

3. Modélisation numérique

1. Soit $t > 0$ un instant quelconque mais fixé. On mettra en œuvre et l'on programmera en Matlab des schémas numériques fournissant des approximations du déplacement radial ainsi que des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{E}$ relatives à cet instant. Les différentes procédures seront paramétrées et commentées et le code source joint en annexe du rapport.

2. Soit $t > 0$ un instant quelconque mais fixé. Pour $R_0 = 1\,\mathrm{m}$, $R_1 = 10\,\mathrm{m}$, $E = 200\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0.3$ et $p(t) = 100\,\mathrm{GPa}$ représenter, en fonction de R, les variations du déplacement radial ainsi que des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{E}$ relatives à cet instant.