Méthodes de changement d'échelle

Février 2007

Perméabilité à l'air d'un milieu poreux composite

L'objectif de ce problème est de décrire - en régime transitoire – l'écoulement macroscopique d'un gaz au travers d'un milieu poreux composite.

Rappel

L'air étant un fluide visqueux compressible, son écoulement au travers d'un milieu poreux homogène est décrit par les équations suivantes :

Bilan de masse $\mathrm{div}(v) = (\beta/n)\, \partial p / \partial t$

Loi de Darcy $v = -(k/\mu)\, \mathrm{grad}(p)$

où

k et n sont la perméabilité intrinsèque et la porosité,

μ la viscosité de l'air, et β sa compressibilité,

p la pression du gaz, et v la vitesse d'écoulement.

Dans la suite, on considère un milieu périodique formé de deux constituants a et b de caractéristiques respectives k_a et n_a, en concentration $c_a = \Omega_a/\Omega$; k_b et n_b, en concentration $c_b = \Omega_b/\Omega = 1 - c_a$. On recherche la description macroscopique à l'aide de l'homogénéisation périodique, en introduisant la variable locale $y = \varepsilon^{-1}x$ et les développements asymptotiques. On posera :

$$p = p^0(x, y, t) + \varepsilon p^1(x, y, t) + \varepsilon^2 p^2(x, y, t) + \ldots$$

1) Constituants de propriétés du même ordre

On suppose dans cette partie que k_a et k_b sont du même ordre de grandeur.

1.1) Donner la description de la physique locale et en particulier les conditions aux limites aux interfaces des constituants.

1.2) Indiquer les analogies (et les différences) entre ce problème et celui de la diffusion de Fick en milieu poreux.

1.3) En suivant étroitement la démarche utilisée pour la diffusion de Fick, justifier brièvement et successivement que :

$$p^0(x, y, t) = p^0(x, t)$$

$$p^1(x, y, t) = \pi^i(y).\, \partial p^0/\partial x_i + \underline{p}^1(x, t)$$

1.4) Etablir la description macroscopique régissant l'écoulement du gaz. Préciser l'expression du tenseur de perméabilité macroscopique K.

Quelle est la compressibilité apparente de l'air ?

1.5) Quelles informations complémentaires peut-on établir sur les propriétés du tenseur K? Comment pourrait-on en donner une estimation ?

2) Effet d'un fort contraste de perméabilité en régime dynamique

On suppose dans cette partie que le constituant b est beaucoup moins perméable que le constituant a, soit $k_b << k_a$. On traduit cette situation en renormalisant la perméabilité de ce constitunat sous la forme $\varepsilon^2 k_b$.

On suppose de plus que la pression oscille de manière harmonique à une fréquence imposée ω, de sorte que :

$$p = [p^0(x, y) + \varepsilon p^1(x, y) + \varepsilon^2 p^2(x, y) + \ldots]e^{i\omega t}$$

2.1) Montrer que le fort contraste implique que les vitesses sont d'ordre différent dans les deux constituants, i.e., :

$$v_a = [v_a^{\,0}(x, y) + \varepsilon\, v_a^{\,1}(x, y) + \varepsilon^2\, v_a^{\,2}(x, y) + \ldots]e^{i\omega t} \quad \text{dans } \Omega_a$$

$$v_b = [0 + \varepsilon\, v_b^{\,1}(x, y) + \varepsilon^2\, v_b^{\,2}(x, y) + \ldots]e^{i\omega t} \quad \text{dans } \Omega_b$$

Donner la description de la physique locale, en spécifiant les conditions aux limites aux interfaces des constituants.

2.2) Reprendre la démarche de la première partie et établir que dans Ω_a :

$$p_a^{\,0}(x, y) = p^0(x)$$

puis

$$p_a^{\,1}(x, y) = \pi_a^{\,i}(y).\ \partial p^0/\partial x_i + \underline{p}^1(x)$$

en explicitant le problème local dont les $\pi_a^{\,i}(y)$ sont solutions.

2.3) Exprimer le problème local qui gouverne la pression $p_b^{\,0}$ dans Ω_b et montrer que dans ce constituant le régime local d'écoulement n'est pas en équilibre statique.

2.4) Justifier que : $p_b^{\,0}(x, y) - p^0(x) = \theta(y,\omega).p^0(x)$; où θ est une fonction à valeur complexe.

2.5)Exprimer le bilan de masse d'ordre zéro sur chacun des deux constituants et les conditions d'interface associées. Quelle condition de compatibilité doit être respectée ?

2.6) En déduire que la description macroscopique régissant l'écoulement du gaz est de la forme :

$$\mathrm{div}_x(K.\ \mathrm{grad}_x\,(p^o)) = B\ i\omega\ p^o$$

Préciser l'expression du tenseur de perméabilité macroscopique K.

Quelle est la compressibilité apparente de l'air ? Comparer avec le résultat du 1) et commenter en fonction de la fréquence des oscillations imposées.

Quelle forme prend la description macroscopique pour des variations de pression quelconque dans le temps ?