

Analyse Limite et Calcul à la Rupture Contrôle des connaissances.

Problème : Résistance en compression d'une poutre mixte

On se propose d'évaluer la résistance en compression d'une poutre de longueur l et de section rectangulaire (largeur b et hauteur h), constituée d'une partie centrale en béton placée entre deux plaques métalliques d'épaisseur $e/2$ parfaitement adhérentes au béton (figure 1).

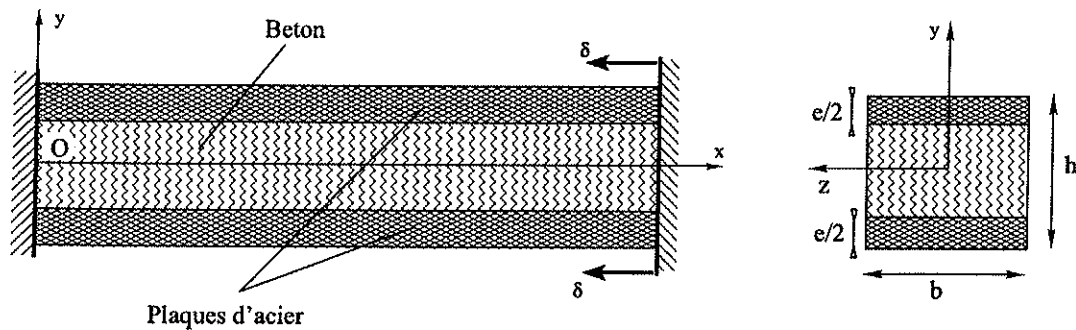


Figure 1:

Les contacts des surfaces $x=0$ et $x=l$ avec les plateaux rigides verticaux sont sans frottement (lisses), tandis que le plateau vertical en $x=l$ est soumis à un déplacement horizontal $-\delta e_x$. Les autres surfaces du contour sont libres d'efforts. Les forces de volume sont négligées.

1. Déterminer les ensembles des champs statiquement et cinématiquement admissibles.
2. Mettre en évidence le mode de chargement et montrer que le chargement correspond à une charge de compression Q .

L'objectif de ce problème est de déterminer la charge extrême de compression Q^+ , sachant que le critère définissant le béton est celui de Mohr-Coulomb (cohésion C , angle de frottement φ), et celui caractérisant l'acier des plaques métalliques est celui de von Mises (contrainte de cisssion maximale k).

3. Approche statique par l'intérieur

3.1. On étudie le champ de contrainte uniaxial homogène par morceaux suivant:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma e_x \otimes e_x \quad \text{avec } \sigma = \left\{ \begin{array}{l} -A \text{ pour } (h-e)/2 \leq |y| \leq h/2 \quad A \geq 0 \\ -B \text{ pour } 0 \leq |y| \leq (h-e)/2 \quad B \geq 0 \end{array} \right\} \quad 0 \leq x \leq l, \quad |z| \leq b/2$$

Montrer que ce champ de contrainte est statiquement admissible dans le mode de chargement prescrit, et déterminer la valeur de Q qu'il équilibre. En déduire une estimation Q^s de Q^+ (en fonction de C , φ , k , h , b et e), dont on précisera le statut.

4. Approche cinématique par l'extérieur

4.1. On se propose d'étudier le champ de vitesse décrit sur la figure 2. La partie droite de la poutre est animée d'une vitesse de translation \underline{V} inclinée d'un angle α par rapport à la verticale Oy , la partie gauche restant immobile. La trace dans le plan Oxy de la surface de discontinuité de vitesse séparant les deux blocs est la ligne ABCD.

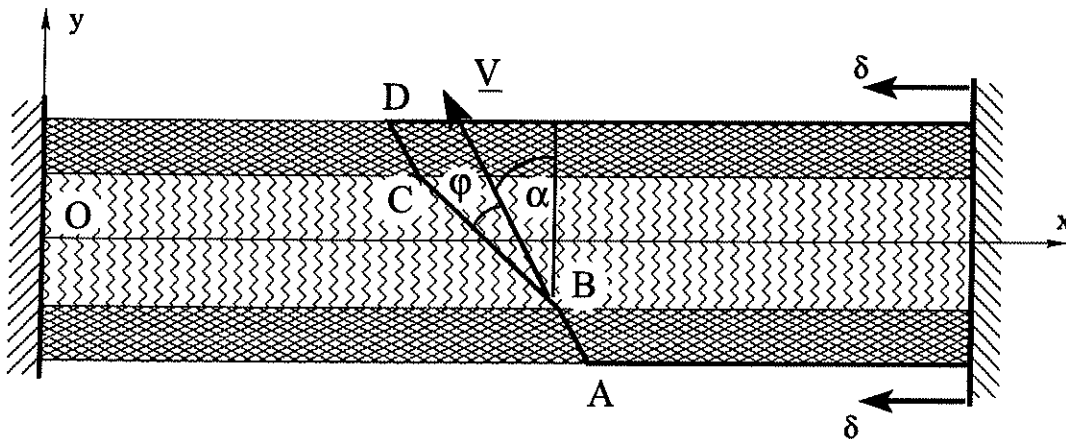


Figure 2:

4.1.1. Déterminer la direction des segments AB et CD par rapport à celle de la vitesse. Montrer alors que ce champ est cinématiquement admissible.

4.1.2. Calculer la puissance résistante maximale, en fonction de C , φ , k , h , b et α .

4.1.3 Calculer la puissance des efforts extérieurs dans ce champ de vitesse.

4.1.4 En déduire une estimation Q^{c1} de Q^+ , dont on précisera le statut.

4.2. On se propose d'améliorer cette estimation en étudiant un second mécanisme de rupture défini de la façon suivante:

$$U_x = -\delta x/l, U_y = \begin{cases} \lambda \delta y/l & \text{si } 0 \leq |y| \leq (h-e)/2 \text{ (béton)} \\ \begin{cases} \delta(y - (h-e)/2)/2l + \lambda \delta(h-e)/2l \\ \delta(y + (h-e)/2)/2l - \lambda \delta(h-e)/2l \end{cases} & \text{si } (h-e)/2 \leq y \leq h/2 \text{ (acier)} \\ \delta(y + (h-e)/2)/2l - \lambda \delta(h-e)/2l & \text{si } -h/2 \leq y \leq -(h-e)/2 \text{ (acier)} \end{cases}, \quad U_z = \delta z/2l$$

où λ est un paramètre indéterminé positif.

4.2.1. Vérifier que ce champ est cinématiquement admissible. Déterminer la condition sur λ pour que ce champ soit pertinent.

4.2.2. Prenant désormais $\lambda = (1 + 3 \sin \varphi)/2(1 - \sin \varphi)$ calculer la puissance résistante maximale.

4.2.3 En déduire une estimation Q^{c2} de Q^+ , dont on précisera à nouveau le statut.

4.2.4 Conclure.

Problème : *Stabilité d'une galerie souterraine*

On se propose d'analyser, en déformations planes, la stabilité d'une galerie souterraine de largeur B , creusée dans un massif constitué d'un sol pesant (poids volumique γ) homogène frottant (critère de résistance de Mohr-Coulomb de cohésion C et d'angle de frottement φ). Pour cela on souhaite mener une approche cinématique du calcul à la rupture en étudiant le mécanisme de bloc en translation représenté sur la figure 3-a, où α désigne le demi-angle au sommet du bloc dont la section est un triangle isocèle et U la vitesse de translation verticale du bloc. La paroi de l'excavation est libre d'effort.

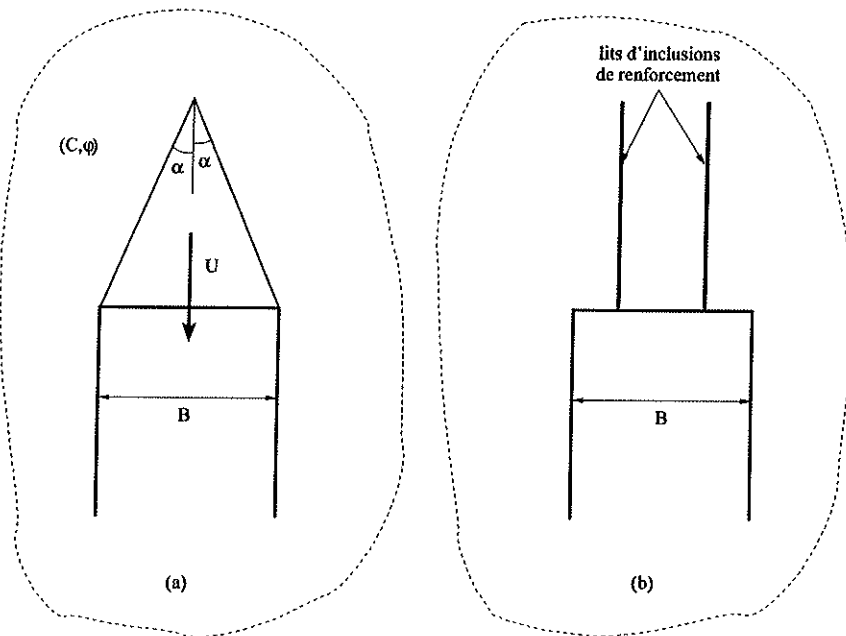


Figure 3:

- 1-1 Décrire les ensembles statiquement et cinématiquement admissibles.
- 1-2 Déterminer le mode de chargement appliqué à l'ouvrage.
- 1-3 Calculer la puissance résistante maximale et la puissance des efforts extérieurs développées dans ce mécanisme. On déterminera la condition de pertinence du champ de vitesse.
- 1-4 En déduire une estimation, dont on précisera le statut, du facteur de confiance défini comme le rapport de la puissance résistante maximale sur la puissance des efforts extérieurs.

1-5 AN: $\gamma = 20kN/m^3$, $C = 20kPa$, $\varphi = 45^\circ$, $B = 5m$. Conclure.

2- On essaie maintenant d'améliorer la stabilité de l'excavation en introduisant dans le massif, deux lits d'inclusions verticales (voir fig. 3-b). On désigne par N_o la résistance en traction (par unité de longueur selon l'axe de la galerie) de chaque lit d'inclusions supposées infiniment longues et parfaitement adhérentes au massif (résistance à l'arrachement infinie).

En étudiant le même mécanisme de bloc en translation que dans la partie 1-, calculer le facteur de confiance de l'ouvrage ainsi renforcé. Déterminer la valeur minimale que N_o doit valoir, avec les données précisées en 1-5, pour que le facteur de confiance de cet ouvrage soit égal à 1,6.

Exercice n°1: Structure à barres fléchies

On considère (Fig. 4) une structure 0BCD constituée de trois tronçons homogènes de longueur L , de même critère de résistance ($-m \leq M \leq +m$), biencastrée à ses deux extrémités, soumise à une charge ponctuelle d'intensité Q , et de direction perpendiculaire à 0B, appliquée en A.

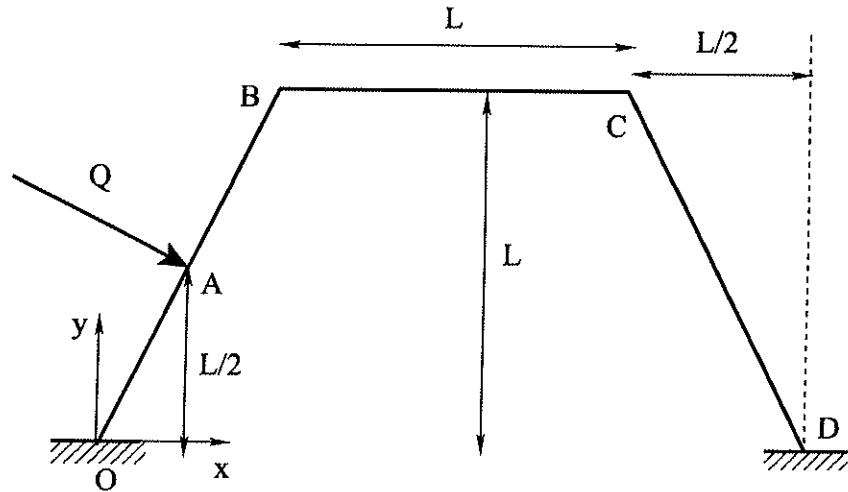


Figure 4:

1. Déterminer le nombre de sections potentiellement critiques, ainsi que le degré d'hyperstaticité en moment de la structure. En déduire le nombre de mécanismes linéairement indépendants à étudier.
2. En étudiant le nombre suffisant de mécanismes de rupture linéairement indépendants, donner par une approche cinématique, une estimation de la charge extrême Q^+ . On précisera son statut.
3. Dessiner le champ de vitesse optimal. Retrouver par le théorème d'association la distribution des moments sous la charge Q^+ .

Exercice n°2: Structure à barres fléchies

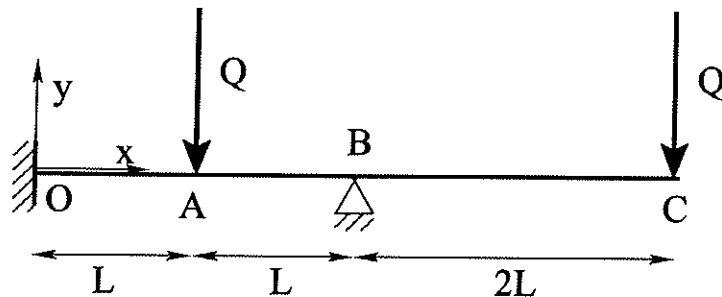


Figure 5:

Une poutre horizontale OC ($OA=AB=L$, $BC=2L$) encastrée en O et appuyée fixement en B, est chargée par deux forces concentrées verticales $-Q \underline{e}_y$ en A et C, avec $Q > 0$. Le critère de résistance caractérisant la poutre s'écrit:

$$|M| \leq m$$

1. Combien de mécanismes de rupture linéairement indépendants doit-on étudier pour obtenir la valeur exacte de la valeur extrême de Q ?
2. Déterminer cette valeur à l'aide de l'étude de ces mécanismes.
3. Dessiner le champ de vitesse optimal. Retrouver par le théorème d'association la distribution des moments sous ces charges Q^+ .

19/11/2014

Analyse limite et calcul à la Rupture.

Exercice no 1: Structure à bandes fléchies

1) Il y a 5 sections potentiellement critique.

Il y a 3 degré d'hyperstaticité qui sont aussi des degré d'hyperstaticité en moment.

Il y a donc 2 mécanisme linéaires indépendants à étudier.

2) Mécanisme 1:



Q_i	0	1	1	0	0
Q_0	-1	2	-1	0	0

$P_{ext} = Q \times \text{distance}(OA)$ donc $P_{ext} = \frac{\sqrt{5}}{2} Q \times l$

distance $OA = \frac{\sqrt{l^2 + l^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} l$

Mécanisme n°2



Calculons w_2 en fonction de $\dot{\delta}$

on a en B: $\dot{\delta} \sqrt{2} \rho = w_2 \cdot 2\ell \Rightarrow w_2 = \frac{\dot{\delta} \sqrt{2}}{4}$

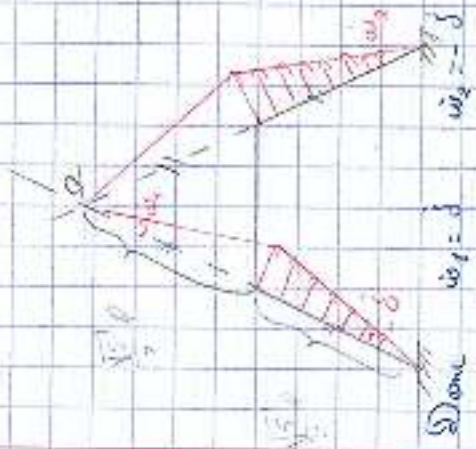
Calculons w_2 en fonction de $\dot{\delta}$

on a en C: $\sqrt{2} \delta \dot{\delta} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell w_2 \Rightarrow w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\delta}$

pts	O	A	B	C
coor	-δ	0	2δ	δ

$R_{ext} = \delta P$

Mécanisme n°2



Donc $w_1 = \dot{\delta}$ $w_2 = -\dot{\delta}$

pts	O	A	B	C	D
coor	-δ	0	2δ	-2δ	δ

$R_{ext} = \delta P \frac{\sqrt{2}}{2} \rho$

Calculons $M_2 + M_3$

pts	O	A	B	C	D
coor	(-δ; δ)	2δ	2δ; -2	-2δ	δ

$R_{ext} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \ell (\dot{\delta} + \dot{\delta})$

$R_{sum} = m (\dot{\delta} + \dot{\delta}) + 2P\rho + 2\delta \dot{\delta} \rightarrow 2 + 2(\dot{\delta} + \dot{\delta})$

On prend $\dot{\delta} + \dot{\delta} = 2$ (changement de variable $\Rightarrow \dot{\delta} = 1$)

$R_{sum} = m (2 + 2) + 2P\rho + 2\delta \dot{\delta} + 2\delta \dot{\delta} + 2\delta \dot{\delta}$
 On veut donc chercher R_{sum}

P_{min} est min

pour $|\dot{\delta}|=0 \Rightarrow \dot{\delta}=0 \Rightarrow P_{\text{min}}=6$

ou $|1-\dot{\delta}|=0 \Rightarrow \dot{\delta}=1 \Rightarrow P_{\text{min}}=6$

ou $|3\dot{\delta}-1|=0 \Rightarrow \dot{\delta}=\frac{1}{3} \Rightarrow P_{\text{min}}=\frac{10}{3}$

donc le min est pour $\dot{\delta}=\frac{1}{3}$
 et $P_{\text{min}}=\frac{10}{3}$

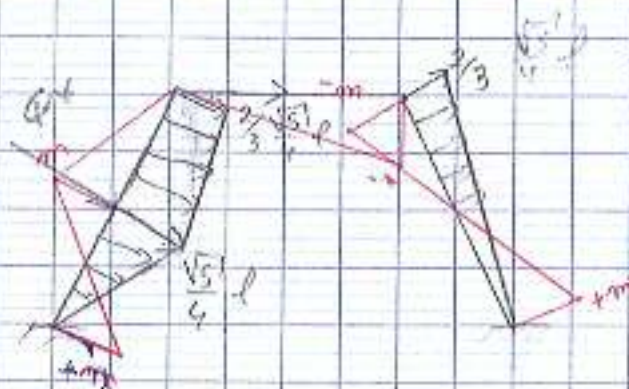
d'où $\frac{\sqrt{5}}{4} Q^+ l = \frac{10}{3} \text{ m} \Rightarrow Q^+ = \frac{40}{3\sqrt{5}} \text{ t}$

On a égalité et non pas un majorant de Q^+ car on a trouvé la valeur exacte par le mécanisme associé à Q^+ , en effet on a "testé" tout les mécanisme.

3) Pour $Q = Q^+$
 $\dot{\delta} = \frac{1}{3}$ donc $\alpha = \frac{2}{3}$

Bts	O	A	B	C	D
$\dot{u} \dot{\delta}$	-1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Au niveau d'une SPC le moment vaut $\text{sign}(\dot{u} \dot{\delta}) m$



Exercice n°2: Structure à base flexible.

1) Il y a 4 S.P.C.

Il y a 2 degré d'hyperstativité en ment.
donc S.P.C. y a 2 mécanisme de rupture à étudier.

2) Mécanisme 1:



S.P.C.	0	1	1	0
DOF	$-\dot{x}$	$2\dot{y}$	$-\dot{y}$	0

$$P_{ext} = \dot{x} Q l$$

Mécanisme 2:



S.P.C.	0	1	1	0
DOF	0	0	$-\dot{y}$	0

$$P_{ext} = 2 l \dot{y} Q$$

Étude de $M_1 + M_2$:

$$P_{ext} = l Q (\dot{x} + 2\dot{y})$$

$$P_{int} = m (l|\dot{x}| + 2l|\dot{y}| + l|\dot{x} + \dot{y}|) \quad \text{On pose } \dot{x} + 2\dot{y} = \dot{z}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{z} - \dot{x}}{2}$$

$$\text{d'où } P_{int} = m (3l|\dot{x}| + l|\frac{\dot{z}}{2}|)$$

Base (B_{min}) min

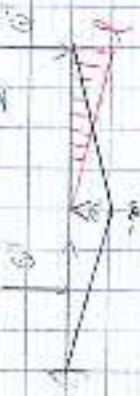
avec $1 \cdot 1/2 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow B_{\min} = 2/3$
 ou $1 \cdot 1/2 + 1/2 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow B_{\min} = 3/5$

donc B_{min} min pour $a = 0$

donc $Q^T = \frac{2a}{3} \Rightarrow Q^T = \frac{2a}{3}$

3) Base $Q = Q^T$

$a = 0 \quad b = 1$



Problème: Résistance en compression d'une poutre mince.

1) Champ de contraintes statiquement équivalent

$\Sigma = \{ \text{div}(\sigma) = 0, \sigma_{xx} \text{ continue}, \sigma_{xx} = 0, T_y = T_z = 0 \}$
 en $x = 1, T_y = T_z = 0$, le Σ est continu
 adhérence $\sigma_{xz} = 0$ en $x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2}$
 (au $\partial \Sigma$ $\sigma \cdot n = 0$)

Champ de vitesses cinématiquement admissible.

$\Sigma = \{ \dot{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{fixe}}, \dot{u} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{libre}}, \dot{u} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{libre}} \}$

2) $B_{\text{ext}} = \int_{\partial V} \sigma \cdot n \cdot dx$

$= \int_{x=1} -\sigma_{xx} \delta dx = \delta \int_{x=1} -\sigma_{xx} dx$

3) Approche statique par l'intérieur.

• $\text{div}(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 en $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$
 par symétrie

• σ_{xx} est continue par construction
 est la seule solution à ce problème à l'échelle $1/2$
 en $\sigma_{xx} = 0$ dans les bords et dans le haut.

• De plus en $x = 0$ et en $z = 1$

$\sigma_{xx} = \begin{cases} -A \frac{x}{2} & \text{à } z = 1/2 \text{ et } 1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -B \frac{x}{2} & \text{à } 1/2 \leq x \leq 1 \text{ et } z = 1/2 \end{cases}$

donc $T_y = T_z = 0$, et même sur le contour intérieur de la poutre $\sigma \cdot n = 0$

Donc ce champ de contraintes est bien statiquement admissible.

Donc pour ce champ $Q = \int -\sigma_{xx} dx$

donc $Q^* = A \delta + B \delta (1-x)$

• La contrainte dans le haut est maximale
 le centre de la poutre (au bord) donne

$F(Q) \leq 0 \Rightarrow 1-A \leq 1-A \sin \varphi - 2C \cos \varphi \leq 0$
 $A \leq \frac{2C \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$

La contrainte dans la plaque doit respecter le critère de von Mises donc:

$$F(\sigma) \leq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\sigma^+)^2}{\sigma^2} - 2k} \leq 0 \Rightarrow B \leq \sqrt{2} k$$

donc $Q^+ = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} b(h-e) + \sqrt{2} k b e$

on a $Q^+ \geq Q^3$

4) Approche cinématique par l'intérieur.

4.1.1)

• L'acier étant de Von Mises il faut que la discontinuité de vitesse soit colinéaire à la surface de discontinuité donc AB à la même direction de V car si V est aussi la discontinuité de vitesse.

• Le béton étant de Mohr-Coulomb il faut que la discontinuité de vitesse fasse un angle φ avec la surface de discontinuité donc la direction de (AB) doit au moins faire un angle φ avec la direction de V .

4.1.1). Dans l'acier $\pi(\sigma, \varphi) = k V$

$$\left. \begin{array}{l} \text{au-dessus} \\ \text{des aciers} \end{array} \right\} k V d\delta = k V b e \cos(\varphi)$$

Dans le béton $\pi(\sigma, \varphi) = c \cos \varphi V \sin \varphi = c \cos \varphi V$

$$\int C \cos \varphi V d\delta = C \cos \varphi V b (h-e) \cos(\alpha)$$

à la discontinuité dans le bûche

donc $\underline{P_{arm} = V [k b e \cos(\alpha) + C \cos \varphi b (h-e) \cos(\alpha)]}$

4.1.3) $P_{ext} = Q \delta$ avec $\delta = V \sin \alpha$

donc $P_{ext} = Q V \sin \alpha$

4.1.4) $P_{ext} \leq P_{arm}$

$$Q V \sin \alpha \leq V \cos \alpha [k b e + C \cos \varphi b (h-e)]$$

$$Q \leq \cotg(\alpha) [k b e + C \cos \varphi b (h-e)]$$

$$Q^d = \cotg(\alpha) [k b e + C \cos \varphi b (h-e)] \geq Q^t$$

C'est un majorant de Q^t car nous avons même une approche par l'intérieur.

4.2) • En $x=0$ $U_x = 0$

En $x=l$ $U_x = -\delta$

• De plus $U_x \geq 0$, et U_x de même U_x

• En ce qui concerne U_y le problème se pose en $|y| = (h-e)/2$ on trouve alors que $U_y = \pm \frac{\delta (h-e)}{2e}$ (dans l'axe, comme dans le lab)

De plus les expressions sont $e^{\pm \lambda x}$ donc $U^t \geq 0$ et $e^{\pm \lambda x}$ donc U^t est cinématiquement admissible.

En ce qui concerne la pertinence et faut calculer $\text{tr}(\underline{d})$

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad}(V) + {}^t \text{grad}(V) \right\}$$

Dans le cas

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \text{ dans l'axe } \left(\text{ce change est pertinent car } \text{tr}(\underline{d}) = 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{d}) &> (1, d, 1) + (d, 1, 1) + (1, 1, d) \sin \varphi \\ -\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} &> \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \sin \varphi \\ \delta &> \frac{\delta}{2} \sin \varphi = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

$$4.2.2) \text{Barr} = \int_V \pi(\underline{d}) dV$$

$$= \int_V \pi(\underline{d})_{\text{cote}} dV + \int_V \pi(\underline{d})_{\text{axe}} dV$$

$$\pi(\underline{d})_{\text{cote}} = \delta \frac{\sqrt{3} \delta}{2}$$

$$\pi(\underline{d})_{\text{axe}} = C \cos \varphi \left(-\frac{\delta}{2} + \left(\frac{1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} \right) \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right)$$

donc

$$\text{Barr} = \delta \frac{\sqrt{3}}{2} \delta^2 b e + C \cos \varphi \left(-\frac{\delta}{2} \delta \left(\frac{1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} + \frac{\delta}{2} \right) \delta (h - e) \right)$$

4.2.3) $\text{Barr} \leq \text{Barr}$

$$\delta Q \leq \delta A \sqrt{3} b e + C \cos \varphi \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} \right) \delta b (h - e)$$

$$Q^{12} = A \sqrt{3} b e + C \cos \varphi \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} \right) b (h - e)$$

$$Q^T \leq Q^{12}$$

après développement

$$\cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\frac{1 + 1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{1(1 - \sin \varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi \left(\frac{1}{2} + \frac{1 + 3 \sin \varphi}{2(1 - \sin \varphi)} \right) = \frac{\cos \varphi}{2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi)} + \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

$$Q^{12} = A \sqrt{3} b e + C \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{1 + 2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} b (h - e) = Q^S$$

4.2.4) donc $Q^S \leq Q^T \leq Q^{12}$

$$\text{donc } Q^T = A \sqrt{3} b e + C \frac{1 + 2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} b (h - e)$$

Problème: Stabilité d'une galerie souterraine

1.1) On étudie le massif de sol.

$$\mathcal{I} = \left\{ \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{\tau} = \underline{0}, \underline{\sigma} \cdot \underline{n}, \text{catène, les pressions de la galerie sont libre de contracter} \right\}$$

$$\mathcal{I} = \left\{ \forall \rho^0, \rho^1, \rho^2, \text{ a os } \underline{v} = \underline{0} \right\}$$

1.2) $\mathcal{P}_{act} = \int_{\partial V} \underline{\tau} \cdot \underline{v} dS + \int_V \underline{I} \cdot \underline{v} dV$

pour (a) $\mathcal{P}_{act} = \sigma U \frac{B^2}{2 \tan \alpha}$
 $= \sigma \frac{B^2}{2 \tan \alpha} L$
 $= Q L$

avec $Q = \sigma \frac{B^2}{2 \tan \alpha}$

(NB on prend une tranche de longueur 1 m.)

1.3) Pour que le champ soit parfait il faut $\alpha \geq \varphi$ car la condition de plasticité impose que la discontinuité de vitesse fasse un angle φ (au moins) avec la surface de discontinuité. Ici la discontinuité de vitesse vaut U et de plus la géométrie U fait un angle

α avec la discontinuité de l'interface
(voir schéma ci-dessous)



$$\text{Donc } P_{\text{perm}} = C \cotg \varphi \sin(\alpha) L$$

$$P_{\text{act}} = Q L$$

$$1.4) F_{\text{act}} = \frac{P_{\text{perm}}}{P_{\text{act}}} = \frac{C \cotg \varphi \sin(\alpha)}{Q}$$

$$F_{\text{act}} = \frac{C \cotg \varphi \sin(\alpha)}{\gamma \frac{B^2}{2 \tan \alpha}} = \frac{2C \cotg \varphi \sin(\alpha) \tan \alpha}{\gamma B^2}$$

F_{act} est une estimation du facteur de confiance par le séisme, c'est donc un majorant de celui-ci.

$$1.5) \frac{2 \cdot 20 \cdot \cotg(45^\circ) \sin(45^\circ) \tan(45^\circ)}{20 \times 5^2} = \frac{\sqrt{2}}{25} < 1$$

comme < 1 on met $\alpha = \varphi$ pour cette AN car c'est le cas optimal.
donc il y a instabilité car $P_{\text{act}} > P_{\text{perm}}$.