BRETT Tiphaine
LONGUAR Zahia
THIBAULT Emilie

ENTPE

PROJET DE MODELISATION

Année scolaire 2006-2007

Problème : cylindre creux infini sous pression

Position du problème.

Le cylindre creux est un solide déformable hypoélastique. Il est de longueur infini dans la direction Oz.

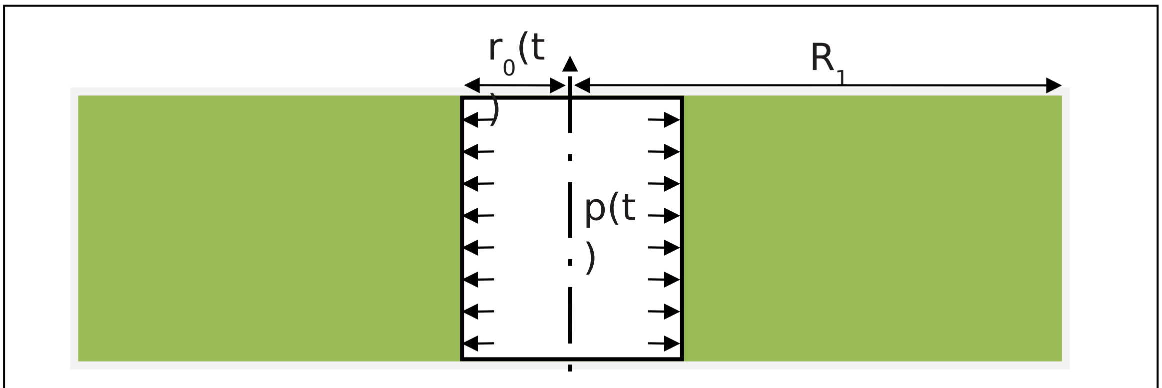

FIG. 1 – Cylindre creux infini sous pression : configuration déformée à l'instant t

La paroi extérieure du cylindre est fixe tandis que sa paroi intérieure est soumise, à chaque instant t>0, à une pression uniforme p(t) donnée et telle que p(0)=0. La transformation F de ce solide est supposée quasistatique.

Modélisation mécanique.

1.

Dans le problème, l'axe Oz est axe de symétrie. Ainsi, la transformation ne varie pas selon z.

De plus, θ est constant puisque il y a symétrie de centre axe Oz. Seul r varie selon le paramètre temps et $R \in [R0, R1]$.

En conclusion :

$$\begin{cases} z=Z=\text{constante} \\ \theta=\Theta=\text{constante} \\ r=f(R,t) \end{cases}$$

3.

On cherche à montrer que D et σ ne dépendent que de R et de t.

<u>Détermination de D</u>

On sait que $D = \frac{1}{2}\left(G + tG\right)$ et que

$$G = grad_x\, v = \begin{bmatrix} \partial r\, vr & \frac{1}{r}\,\partial r\, vr - \frac{1}{r} v\theta & \partial z\, vr \\ \partial r\, v\theta & \frac{1}{r}\,\partial\theta\, v\theta + \frac{1}{r} vr & \partial z\, v\theta \\ \partial r\, vz & \frac{1}{r}\,\partial\theta\, vz & \partial z\, vz \end{bmatrix}$$

Avec v la dérivée temporelle de f(R,t)

Or $v = \begin{bmatrix} vr \\ v\theta \\ vz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ainsi $G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{f}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\dot{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

or $\frac{\partial \dot{f}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial R} . \dot{f} . \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} . \dot{f} . \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial R} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial R}} = \frac{\dot{f}\prime}{f\prime}$ car $\frac{\partial t}{\partial r} = 0$

En remplaçant r par f, on obtient $G = \begin{bmatrix} \frac{\dot{f}\prime}{f'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cela nous permet de calculer D :

$D = \frac{1}{2} (G + tG)$

$$D = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\dot{f}\prime}{f'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\dot{f}\prime}{f'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} \frac{\dot{f}'}{f'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

D'où $D = G$

On remarque que D ne dépend que de f, d'où D dépend seulement des variables R et t.

Détermination de σ

Pour calculer σ, on se sert de la loi de comportement du solide qui est régi par la relation : $\breve{\sigma} = \lambda * trD * I + 2\mu * D$

Comme G=D+W, on en déduit que W=0. Ainsi on peut écrire que $\breve{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma . W - W . \sigma = \dot{\sigma}$.

Ainsi $\breve{\sigma} = \dot{\sigma} = \lambda * trD * I + 2\mu * D$

$$\dot{\sigma} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{\dot{f'}}{f'} + \frac{\dot{f}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f'}}{f'} + \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{f'}}{f'} + \frac{\dot{f}}{f} \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\dot{f'}}{f'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\sigma} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\frac{\dot{f'}}{f'} + \lambda \frac{\dot{f}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{\dot{f'}}{f'} + (\lambda + 2\mu)\frac{\dot{f}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{\dot{f'}}{f'} + \lambda \frac{\dot{f}}{f} \end{bmatrix}$$

Puis on intègre $\dot{\sigma}\ sur\ t$. Ce qui nous permet de trouver σ. On remarque que σ n'est fonction que de R et de t.

$$\sigma = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) lnf'(R,t) + \lambda\, lnf(R,t) - A & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) lnf + \lambda\, lnf' - B & 0 \\ 0 & 0 & \lambda lnf' + \lambda\, lnf - C \end{bmatrix}$$

Avec

$$A = (\lambda + 2\mu) lnf'(R, t = 0) + \lambda\, lnf(R, t = 0) = \lambda\, lnR$$

$$B = (\lambda + 2\mu)\, lnf(R, t = 0) + \lambda \ln f'(R, t = 0) = (\lambda + 2\mu) \ln R$$

$$C = \lambda\, lnf'(R, t = 0) + \lambda\, lnf(R, t = 0) = \lambda \ln R$$

Puisque f(R, t=0)=R et f'(R, t=0)=0

$$\boxed{\sigma = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) lnf' + \lambda\,(lnf - lnR) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) * (lnf - \ln R) + \lambda\, lnf' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\,(lnf' + lnf - \ln R) \end{bmatrix}}$$

5.

On veut connaître w(x). Pour cela, on calcule w'(x) :

$$w'(x) = \frac{\partial h(R)}{\partial x}$$

$$w'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)$$

$$w'(x) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$w'(x) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial x}$$ puisque $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$

$$w'(x) = \frac{f'(R,t) * R + f(R,t)}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x}$$

Comme $x = \frac{R_0}{R}$ alors $dx = -\frac{R_0}{R^2} * dR$ d'où $\frac{dR}{dx} = -\frac{R^2}{R_0}$

On peut ainsi écrire que $w'(x) = -\frac{f'(R,t) * R + f(R,t)}{R^2} * \frac{R^2}{R_0}$

$$w'(x) = -\frac{f'(R,t) * R + f(R,t)}{R_0}$$

$$w'(x) = -\frac{f'(R,t)}{x} + \frac{f(R,t)}{R_0}$$

$$w'(x) = \frac{1}{x} * \left(\frac{f(R,t)}{R} - f'(R,t)\right)$$

$$w'(x) = \frac{w(x)}{x} * \left(1 - \frac{R\,f'(R,t)}{f(R,t)}\right)$$ or $v(x) = \frac{f(R,t)}{R\,f'(R,t)}$

Donc $w'(x) = \frac{w(x)}{x} * \left(1 - \frac{1}{v(x)}\right)$

On obtient que $\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{v(x) - 1}{x * v(x)}$

En intégrant, on trouve que $ln|w(x)| = \int_a^x \frac{v(\varepsilon) - 1}{\varepsilon * v(\varepsilon)}\, d\varepsilon$

Or $\ln|w(a)| = 0$, on en déduit que $w(a) = 0$. On sait que :

$$w(x_1) = \frac{f\left(\frac{R_0}{R_1}, t\right)}{\frac{R_0}{R_1}} = \frac{R_1}{R_0} * f\left(\frac{R_0}{R_1}, t\right) = \frac{R_1}{R_0} * \frac{R_0}{R_1} = 1$$

. Ainsi, $a = x_1$.

On peut écrire que $\boxed{w(x) = exp\left(\int_{x1}^{x} \frac{v(\varepsilon) - 1}{\varepsilon * v(\varepsilon)}\, d\varepsilon\right)}$

Pour calculer v(x),

Modélisation mécanique.