

PROJET DE MODELISATION

**Problème : cylindre creux infini sous
pression**

BRETT Tiphaine

LONGUAR Zahia

THIBAUT Emilie

Promotion 54

12 juin 2007

Sommaire



Position du problème



Modélisation mécanique

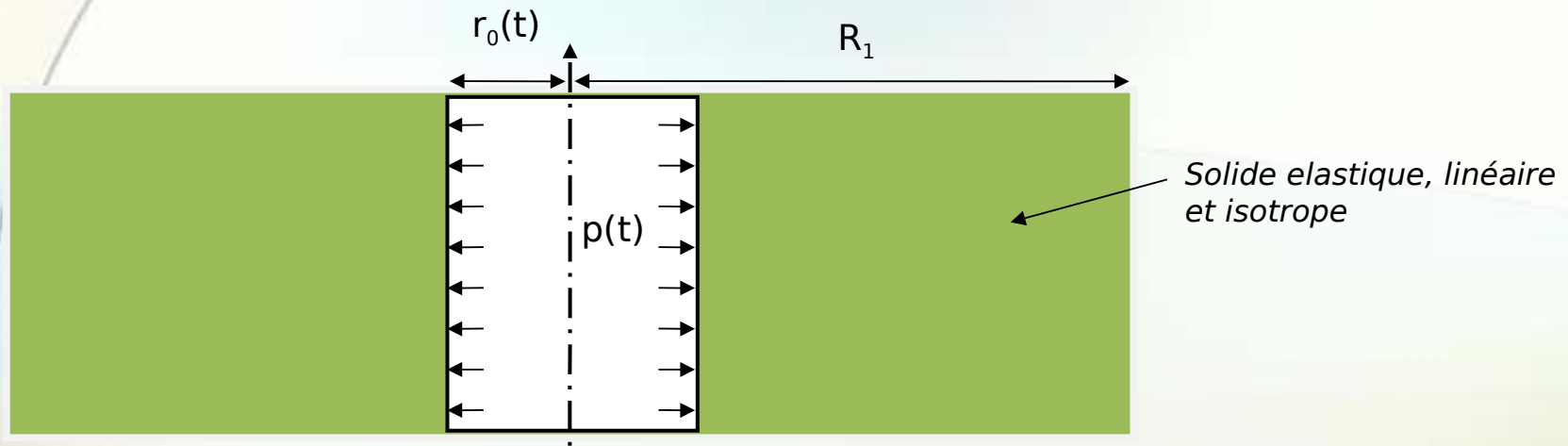


Modélisation informatique



Conclusion

Position du problème



Cylindre creux infini sous pression : configuration déformée à l'instant t

Objectifs

Détermination de : f (Déplacement)

σ et E (Tenseur des contraintes au sein du cylindre à t)

Modélisation mécanique

Détermination de f : le déplacement

Symétrie autour de l'axe 
Oz

$$\left. \begin{array}{l} z=Z=\text{constante} \\ \theta=\Theta=\text{constante} \\ r=f(R,t) \text{ avec } R \in \\ [R_0, R_1] \end{array} \right\}$$

La Transformation est donc RADIALE

Pour la suite du problème:

$$f'(R,t) = \partial_R f(R,t)$$

$$f''(R,t) = \partial_{RR}^2 f(R,t)$$

$$f^*(R,t) = \partial_t f(R,t)$$

Modélisation mécanique

Détermination de σ : Tenseur des contraintes

D'après l'énoncé, $\dot{\epsilon}_i = \dot{\sigma} = \lambda * trD * I + 2\mu * D$

Or, $D = \frac{1}{2} (G + tG)$ et $G = grad_x v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{f}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \dot{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Donc en intégrant $\dot{\sigma}$, on obtient :

$$\sigma = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \ln f' + \lambda (\ln f - \ln R) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) * (\ln f - \ln R) + \lambda \ln f' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda (\ln f' + \ln f - \ln R) \end{bmatrix}$$

Modélisation mécanique

Tenseur des Contraintes

En écrivant les coefficients de Lamé en fonction de E et ν on obtient:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \ln \frac{w}{v^{1-\nu}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \ln \frac{w}{v^\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln \frac{w}{v} \end{bmatrix}$$
$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Modélisation mécanique

Détermination de E : Tenseur d'Almansi

Euler

D'après le cours de MMC, $E = 1/2*(I-B^{-1})$ avec $B = F^t F = (I+H^L)^t(I+H^L)$

Comm e $H^L = grad_x u = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} u & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Avec u le déplacement radial
 $u=r-R$

D'où,

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{v^2}{2w^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2w^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modélisation mécanique

Les fonctions utilisées

- Pour calculer $w(x)$, nous avons d'abord cherché $w'(x)$: $\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{v(x) - 1}{x * v(x)}$

Puis on intègre, et on trouve $w(x) = \exp\left(\int_{x_1}^x \frac{v(\varepsilon) - 1}{\varepsilon * v(\varepsilon)} d\varepsilon\right)$

(Problème aux bornes : $\ln |w(a)| = 0$ d'où $w(a)=1$ or $w(x_1)=1$)

- Pour déterminer $v'(x)$, nous avons d'abord dérivé $v(x)$:

$$\frac{f f''}{f'^2} = x * v'(x) - v(x) + 1$$

Puis, à l'aide des équations eulériennes du mouvement :

$$\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} * \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + \frac{1}{r} * (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho b_r = \rho \gamma_r \quad \Rightarrow \quad \partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} * (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

On obtient que : $v'(x) = \frac{1}{x * (1 - v)} (v(x) - 1 + (1 - 2v) * \ln v(x))$

Modélisation informatique

1- Détermination de v

Utilisation de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 1 (méthode d'Euler)

a. EDO avec condition initiale

$$v'(x) = \frac{1}{x * (1 - v)} (v(x) - 1 + (1 - 2v) * \ln v(x)) \quad x \in \left[\frac{R_0}{R_1}; 1 \right]$$

$$v(1) = \sqrt[1-v]{e^{\frac{(1+v)(1-2v)*p(t)}{E}}}$$

b. Formule d'itération

```

7  % détermination de v(n), qui correspond à v(x) pour x=1
8  v(n)=(exp((1+nu)*(1-2*nu)*p/E))^(1/(1-nu)); ← initialisation
9
10
11 ***** détermination du vecteur v avec Runge Kutta d'ordre 2
12 for i=n-1:-1:1
13     v(i)=v(i+1)-h * (v(i+1)+((1-2*nu)*log(v(i+1))-1))/((1-nu)*x(i+1))
14 end
15

```

car initialisation en partie de la borne max

Fonction Φ de la méthode

Modélisation informatique

1- Détermination de v Méthode de Runge - Kutta à l'ordre 1


2- Détermination de w $w(x) = \exp\left(\int_{x_1}^x \frac{v(\varepsilon) - 1}{\varepsilon * v(\varepsilon)} d\varepsilon\right)$

a- détermination de la fonction sous l'intégrale

```
***** détermination des points de la fonction à intégrer
for i=1:n
    Z(i)=(v(i)-1)/(x(i)*v(i));
end
```

b- détermination de w avec la méthode des trapèzes

```
***** détermination de w avec la méthode des trapèzes
w(1)=1;
for i=2:n
    w(i)=w(i-1)*exp((Z(i)+Z(i-1))*h/2); % exp(a+b)=exp(a)*exp(b)
end
```



Modélisation informatique

- 1- Détermination de v Méthode de Runge - Kutta à l'ordre 1
- 2- Détermination de w Méthode des trapèzes
- 3- Détermination des Contraintes Normales et Tangentes et des coefficient du Tenseur d'Almansi-Euler E

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \ln \frac{w}{v^{1-\nu}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \ln \frac{w}{v^\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln \frac{w}{v} \end{bmatrix}$$

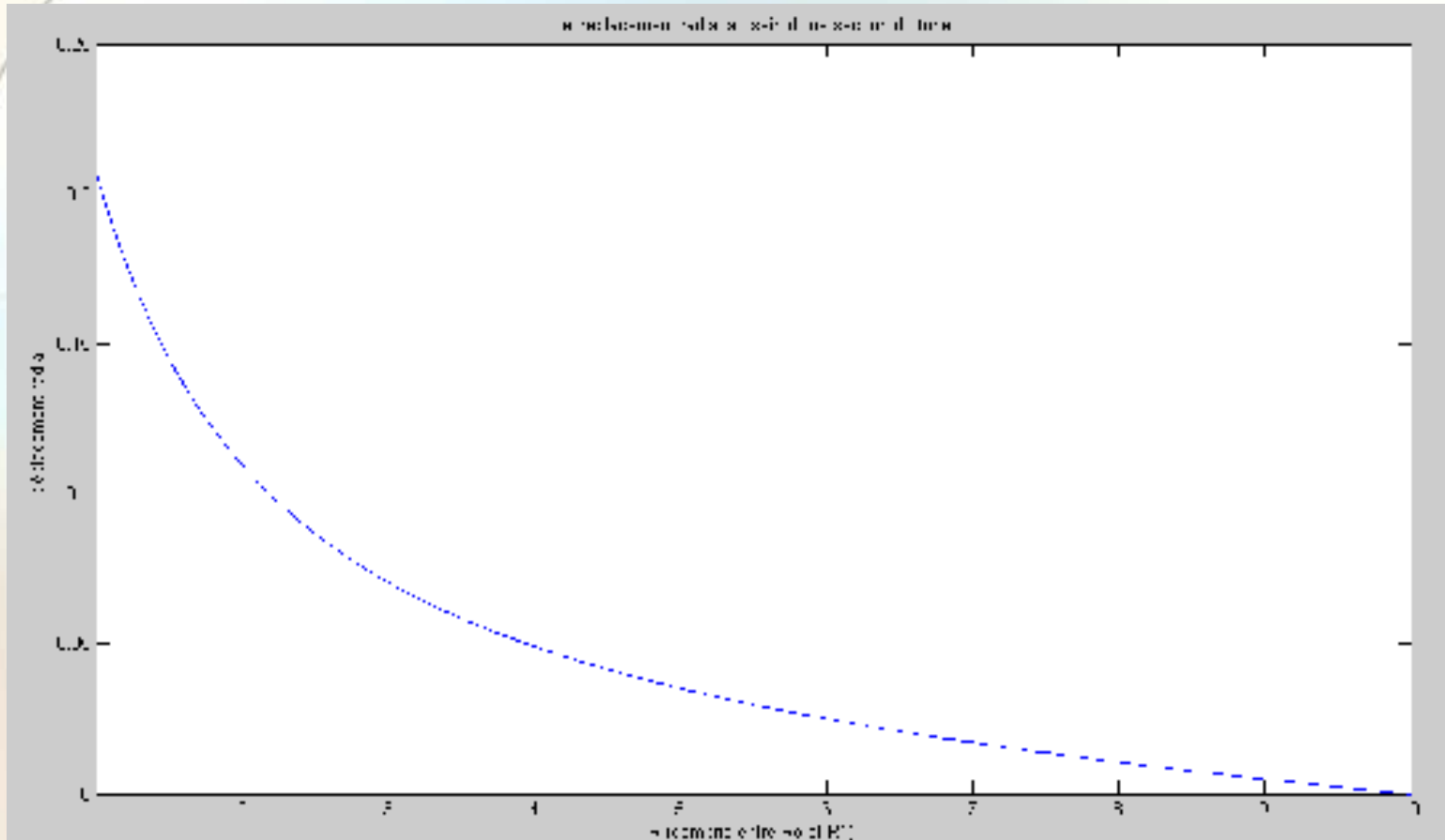
σ_{rr} points to the top-left element.
 $\sigma_{\theta\theta}$ points to the middle-right element.
 σ_{zz} points to the bottom-right element.

$$E_{rr} \rightarrow E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2w^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2w^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_{\theta\theta}$ points to the middle-right element.

Etude du déplacement radial

Graphique : déplacement radial = $f(\text{position } R \text{ dans le cylindre})$

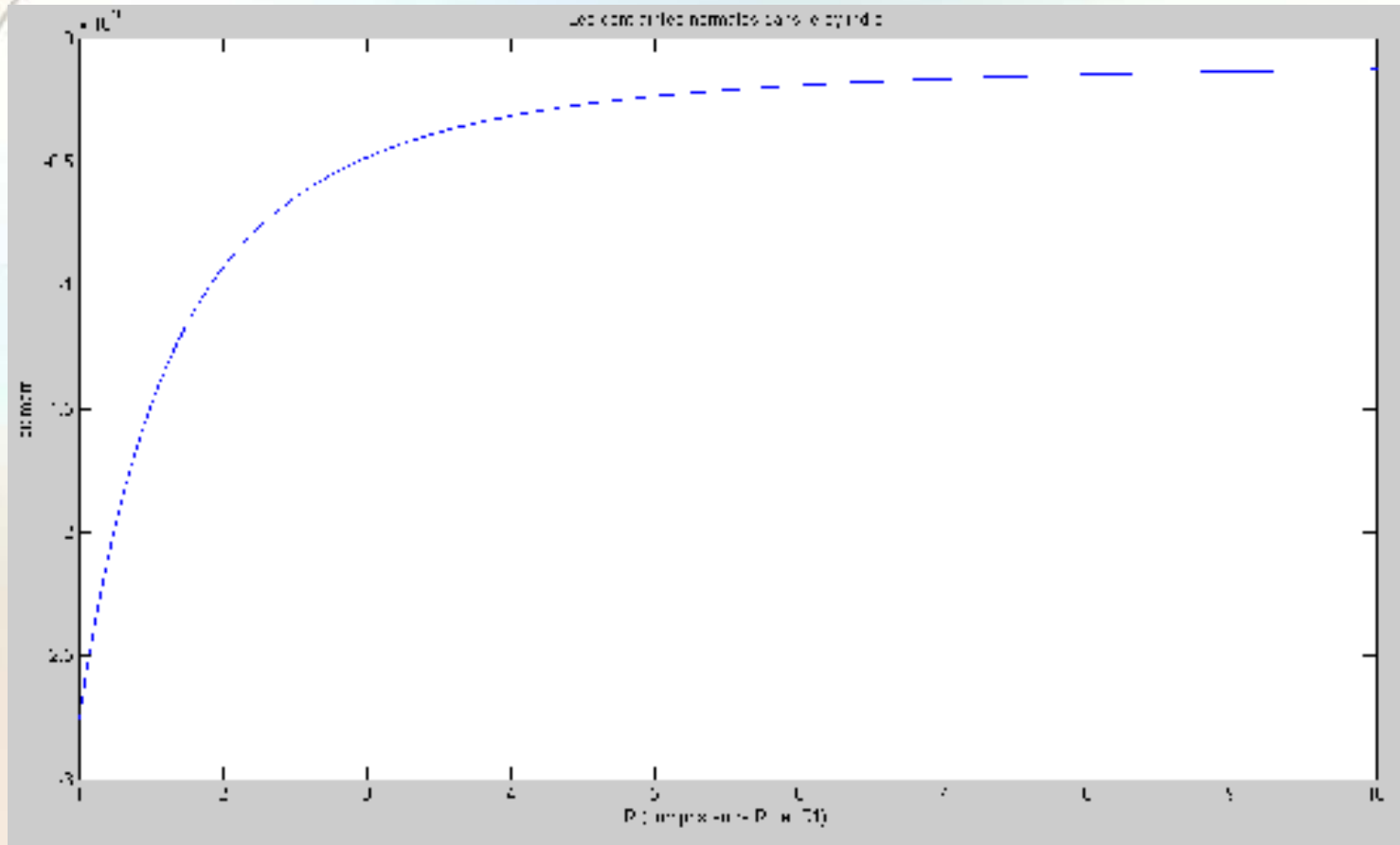


Interprétation :

Le déplacement radial diminue lorsque l'on s'éloigne du point d'application de la contrainte (en R_0)

Etude des contraintes normales

Graphique : $\sigma_{rr} = f(\text{position } R \text{ dans le cylindre})$

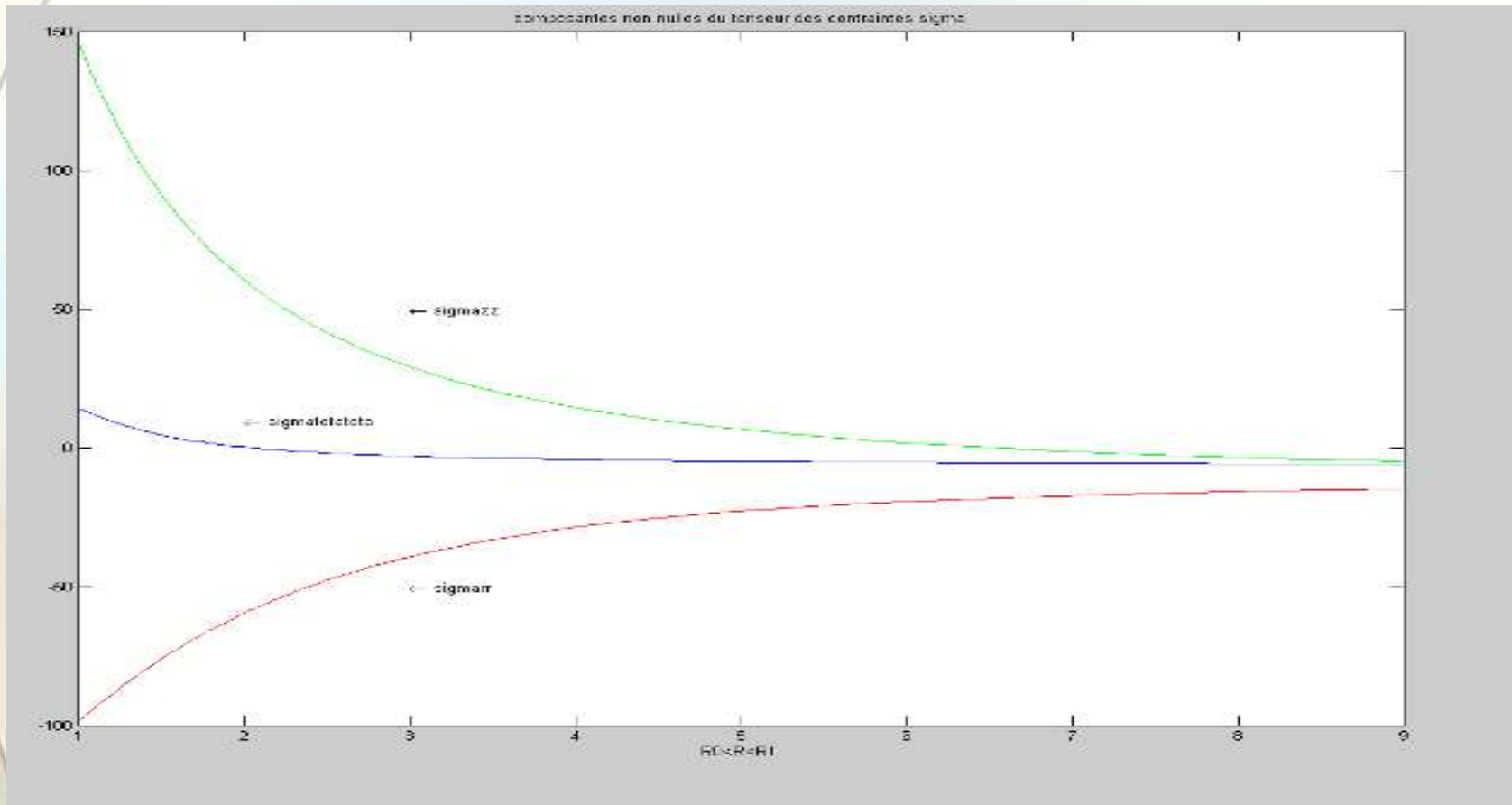


Interprétation :

De même que pour le déplacement radial, les contraintes normales diminuent lorsque l'on s'éloigne de R_0 .

Etude des contraintes tangentes

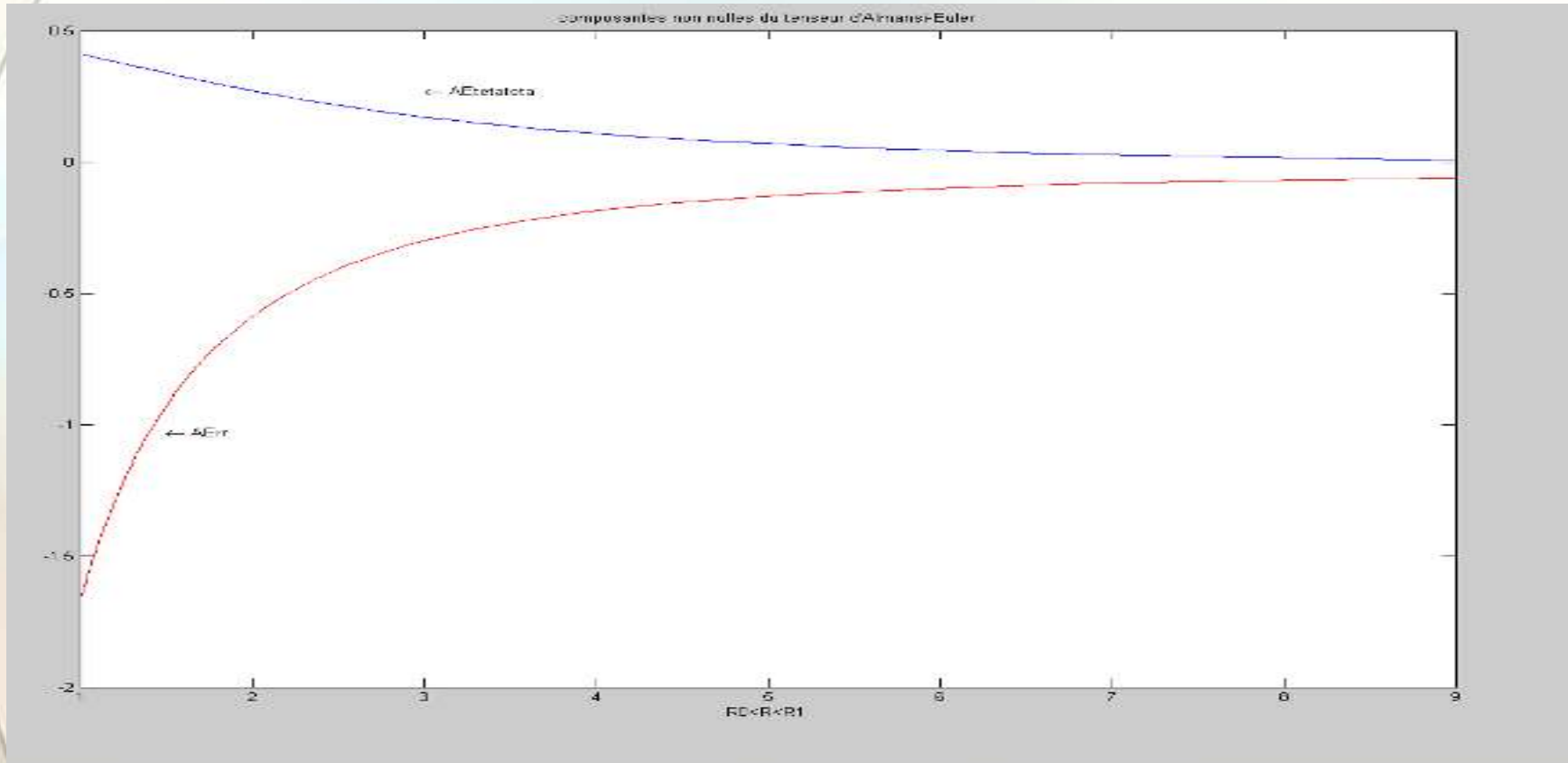
Graphique : $\sigma_{zz} = f(\text{position } R \text{ dans le cylindre})$



Interprétation :

Etude des coefficients d'Almansi Euler

Graphique : $\sigma_{\theta\theta} = f(\text{position } R \text{ dans le cylindre})$



Interprétation :